17.

Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres.

Première partie.

Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*

En m'occupant, il y a deux ans *), à prouver que toute progression arithmétique indéfinie, dont les termes n'ont pas tous un même diviseur commun, renferme une infinité de nombres premiers, ce qui n'avait pas encore été fait d'une manière rigoureuse, j'ai été conduit à envisager un grand nombre de questions relatives aux nombres, sous un point de vue entièrement nouveau, et qui les rattache aux principes de l'analyse infinitésimale et aux propriétés remarquables d'une classe de séries et de produits infinis qui ont beaucoup d'analogie avec les expressions que l'illustre *Euler* a considérées dans le chap. de son Introd. à l'analyse de l'infini, ayant pour titre „De seriebus ex evolutione factorum ortis." Dans une note insérée dans ce journal **), j'ai déjà indiqué plusieurs des questions auxquelles ce genre d'analyse peut être appliqué. Je me propose maintenant d'exposer mes recherches sur cette matière avec tous les développements nécessaires, dans une suite de mémoires dont celui que je soumets aujourd'hui au jugement des géomètres, sera particulièrement destiné à l'examen d'une question dont la solution n'avait pas encore été donnée, et qui a pour objet de déterminer le nombre des formes quadratiques différentes dont le déterminant D est un entier quelconque positif ou négatif, ou ce qui est la même chose, le nombre des diviseurs quadratiques qui appartiennent à l'expression $x^2 - Dy^2$. L'analyse qui nous conduira à la solution complète de cette question intéressante, nous fournira en

---

*) Le mémoire que j'ai lu sur cette question à l'Académie de Berlin, vient d'être imprimé dans la collection de l'Académie, année 1837.

**) Tome XVIII. pag. 259.

même temps et pour ainsi dire, chemin faisant, des démonstrations nouvelles et très-simples de plusieurs beaux théorèmes dûs à Mr. *Gaufs,* mais que cet illustre géomètre n'avait établis qu'au moyen de considérations très-compliquées dans la seconde partie de la 5$^{\text{ième}}$ section de ses Disquisitiones arithmeticae.

Cette section de l'ouvrage de Mr. *Gaufs,* qui est consacrée à la théorie des formes du second degré, se compose de deux parties très-distinctes, dont la première, qui se termine à l'art. 223, peut être considérée comme l'exposition de la partie élémentaire de cette théorie, et renferme tous les résultats antérieurement donnés par *Euler, Lagrange* et *Legendre,* complétés et étendus à beaucoup d'égards et déduits d'ailleurs de principes nouveaux. La seconde partie qui commence proprement à l'art. 234, (les art. 223 — 233 contenant des définitions et des lemmes qui servent d'introduction à la seconde partie) se compose presque exclusivement de recherches propres à l'illustre auteur. Ces recherches, aussi remarquables par la profondeur des méthodes que par le nombre et la variété des résultats, forment sans contredit la partie de tout l'ouvrage dont l'étude présente le plus de difficultés. Aussi sont-elles très-peu connues des géomètres, et l'on doit y rapporter particulièrement ce que *Legendre* dit dans la préface de la seconde édition de sa Théorie des Nombres, lorsqu'après avoir indiqué les découvertes de Mr. *Gaufs* qu'il avait fait entrer dans son ouvrage, il ajoute:

> „On aurait désiré enrichir cet Essai d'un plus grand nombre des excellents matériaux qui composent l'ouvrage de Mr. *Gaufs:* mais les méthodes de cet auteur lui sont tellement particulières qu'on n'aurait pu, sans des circuits très-étendus, et sans s'assujettir au simple rôle de traducteur, profiter de ses autres découvertes."

J'ose donc espérer qu'indépendamment des résultats nouveaux qu'il fait connaître, mon travail pourra encore contribuer à l'avancement de la science, en établissant sur de nouvelles bases et en rapprochant des éléments, de belles et importantes théories, qui n'ont été jusqu'à présent à la portée que du petit nombre de géomètres capables de la contention d'esprit nécessaire, pour ne pas perdre le fil des idées dans une longue suite de calculs et de raisonnements très-composés.

§. 1.

Les lettres k et ϱ désignant deux quantités positives, la première constante, la seconde variable, considérons la somme de la série infinie

$$1.\quad \frac{1}{k^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+2)^{1+\varrho}}+\text{etc.}$$

Cette somme croissant au delà de toute limite finie, lorsque la variable ϱ devient infiniment petite, voyons quelle est la fonction de ϱ la plus simple qui puisse servir de mesure à cette augmentation, ou, en d'autres termes, dont le rapport à l'expression précédente converge vers l'unité, lorsque ϱ convergera vers zéro. Pour cela, nous aurons recours à la formule connue

$$\int_0^1 x^{k-1}\log^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{\Gamma(1+\varrho)}{k^{\varrho+1}}.$$

En mettant successivement k, $k+1$, $k+2$, ... à la place de k et faisant la somme de toutes ces équations, la série (1.) se trouvera exprimée comme il suit,

$$\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1\frac{x^{k-1}}{1-x}\log^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Si l'on ajoute $\frac{1}{\varrho}$ à cette expression et que l'on en retranche la quantité égale $\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1+\varrho)}=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1\log^{\varrho-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx$, elle deviendra

$$\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{1-x}-\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\log^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Comme le second terme converge vers la limite finie

$$\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{1-x}-\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}\right)dx,$$

k étant >0, on conclut que le rapport de la somme (1.) à la fraction $\frac{1}{\varrho}$ a l'unité pour limite, lorsque la variable positive ϱ devient moindre que toute grandeur donnée.

Au moyen du résultat précédent, il nous sera facile de démontrer le théorème suivant dont nous ferons un usage très-fréquent dans nos recherches.

„Soient

$$2.\quad l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_n,\ \ldots$$

des constantes en nombre infini, positives, différentes de zéro, inégales ou en partie égales; soit encore $f(t)$ une fonction discontinue de la variable positive t, qui exprime combien il y a dans la suite (2.) de termes dont la valeur ne surpasse pas celle de t. Cela posé, si la fonction $f(t)$ peut être mise sous la forme

$$3. \quad f(t) = ct + t^\gamma \psi(t),$$

c et γ désignant des constantes positives dont la seconde est inférieure à l'unité, et la nouvelle fonction $\psi(t)$, abstraction faite de son signe et quelque grande qu'on y suppose la variable t, restant toujours moindre que la constante positive C, je dis que la somme

$$4. \quad \varphi(\varrho) = \frac{1}{l_1^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_2^{1+\varrho}} + \frac{1}{l_3^{1+\varrho}} + \text{etc.}$$

dans laquelle ϱ désigne une variable positive, sera telle qu'on aura pour une valeur infiniment petite de ϱ,

$$5. \quad \varphi(\varrho) = \frac{c}{\varrho},$$

c'est-à-dire que le rapport de la somme $\varphi(\varrho)$ à la fraction $\frac{c}{\varrho}$ convergera vers l'unité, lorsque ϱ devient moindre que toute grandeur donnée."

Comme le nombre des termes de la suite (2.), qui ne surpassent pas l'unité, est limité, (ce nombre étant $= c + \psi(1)$) et comme parmi ces termes il n'y en a aucun dont la valeur soit zéro, il est évident par la nature de la proposition qu'il s'agit d'établir, que nous pouvons omettre la partie de l'expression $\varphi(\varrho)$, qui correspond à ces termes. Ce qui reste après ce retranchement, étant toujours désigné par $\varphi(\varrho)$, choisissons une constante δ supérieure à $\frac{1}{1-\gamma}$, et partageons la somme $\varphi(\varrho)$ en une infinité de sommes partielles, en comprenant dans la $m^{\text{ième}}$ de ces sommes partielles, tous les termes qui satisfont à la double condition

$$m^\delta < l_n \leqq (m+1)^\delta,$$

et par suite à celle-ci

$$\frac{1}{m^{\delta(1+\varrho)}} > \frac{1}{l_n^{1+\varrho}} \geqq \frac{1}{(m+1)^{\delta(1+\varrho)}}.$$

Le nombre de ces termes sera évidemment

$$f((m+1)^\delta) - f(m^\delta).$$

La valeur numérique de $t^\gamma \psi(t)$, lorsqu'on suppose successivement $t = m^\delta$ et $t = (m+1)^\delta$, étant inférieure à $C(m+1)^{\gamma\delta}$, on aura ces deux inégalités

$$\begin{aligned} f((m+1)^\delta) - f(m^\delta) &< c((m+1)^\delta - m^\delta) + 2C(m+1)^{\gamma\delta} \\ &> c((m+1)^\delta - m^\delta) - 2C(m+1)^{\gamma\delta}. \end{aligned}$$

En combinant ces inégalités avec celles que nous venons d'écrire, on conclura que la somme partielle dont il s'agit, est respectivement inférieure et supérieure aux quantités

$$c\frac{(m+1)^\delta-m^\delta}{m^{\delta(1+\varrho)}}+2C\frac{(m+1)^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1+\varrho)}},\qquad c\frac{(m+1)^\delta-m^\delta}{(m+1)^{\delta(1+\varrho)}}-2C\frac{(m+1)^{\gamma\delta}}{(m+1)^{\delta(1+\varrho)}}.$$

Il suit de là qu'on a

$$\varphi(\varrho)<c\Sigma\frac{(m+1)^\delta-m^\delta}{m^{\delta(1+\varrho)}}+2C\Sigma\frac{(m+1)^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1+\varrho)}},$$

le signe Σ s'étendant depuis $m=1$ jusqu'à $m=\infty$.

Puisqu'on a en vertu d'un théorème connu

$$(m+1)^\delta-m^\delta=\delta m^{\delta-1}+\frac{\delta(\delta-1)}{2}(m+\varepsilon_m)^{\delta-2},$$

ε_m désignant une fraction positive, l'inégalité précédente pourra se mettre sous la forme

$$\varphi(\varrho)<c\delta\Sigma\frac{1}{m^{1+\delta\varrho}}+\tfrac{1}{2}c\delta(\delta-1)\Sigma\frac{\left(1+\frac{1}{m}\varepsilon_m\right)^\delta}{m^{\delta\varrho}(m+\varepsilon_m)^2}+2C\Sigma\frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\gamma\delta}}{m^{\delta(1-\gamma)+\delta\varrho}}.$$

Or, ϱ devenant infiniment petit, les deux dernières sommes resteront finies car elles seront constamment inférieures à celles-ci

$$\Sigma\left(1+\frac{1}{m}\right)^\delta\frac{1}{m^2},\qquad \Sigma\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\gamma\delta}\frac{1}{m^{\delta(1-\gamma)}},$$

qui sont elles-mêmes finies, comme il est facile de le voir au moyen des principes connus, si l'on se rappelle que d'après la supposition faite sur la constante δ, on a $\delta(1-\gamma)>1$. Quant à la première somme, comme elle a une forme analogue à l'expression (1.) considérée plus haut, elle sera évidemment $\frac{1}{\delta\varrho}$, ϱ étant supposé infiniment petit. On voit donc que la limite supérieure de $\varphi(\varrho)$ prend la forme $\frac{c}{\varrho}$, lorsque ϱ devient moindre que toute grandeur donnée, et comme le même raisonnement peut s'appliquer à la limite inférieure et conduit au même résultat, la proposition énoncée se trouve établie.

On pourrait donner au théorème que nous venons de démontrer, beaucoup plus d'étendue, mais comme ce théorème tel que nous l'avons énoncé, suffit aux applications que nous avons en vue, quant à présent, nous ne nous arrêterons pas à cette généralisation qui ne présente d'ailleurs aucune difficulté.

Nous aurons encore besoin de deux autres lemmes qui appartiennent, comme le précédent, à l'analyse infinitésimale. Le premier de ces nouveaux lemmes est tellement simple que nous nous contenterons de l'énoncer, sans en donner la démonstration qui est très-facile à suppléer.

Tous les points d'un plan infini étant rapportés à deux axes rectangulaires des x et des y, concevons dans ce plan une courbe fermée assujettie ou non à une même loi analytique dans toutes ses parties, supposons que les dimensions de cette courbe augmentent de plus en plus et au delà de toute limite, de manière cependant que la courbe variable reste toujours semblable à elle-même, et désignons par σ l'aire également variable à laquelle la courbe sert de contour.

Soient maintenant a, b, α, β quatre constantes dont les deux premières ont des valeurs positives, et supposons que l'on construise tous les points dont les coordonnées x et y ont la forme

$$6. \qquad x = av + \alpha, \qquad y = bw + \beta,$$

où v et w désignent tous les entiers depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Cela posé, si l'on désigne par $F(\sigma)$ le nombre de ces points situés dans l'intérieur de la courbe, on aura évidemment pour des valeurs infinies de σ,

$$F(\sigma) = \frac{1}{ab}\sigma,$$

c'est à dire que le rapport des deux membres de cette équation convergera vers l'unité lorsque σ croît au delà de toute limite positive. Il est également facile de voir que la différence $F(\sigma) - \frac{\sigma}{ab}$ croîtra moins rapidement que la puissance σ^γ, l'exposant γ étant supposé $> \frac{1}{2}$. Nous pouvons donc poser

$$7. \qquad F(\sigma) = \frac{1}{ab}\sigma + \sigma^\gamma \psi(\sigma),$$

où l'on a $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, et l'on sera assuré que la fonction $\psi(\sigma)$, abstraction faite de son signe, restera toujours moindre qu'une certaine constante finie C.

Le dernier des lemmes que nous emprunterons à l'Analyse infinitésimale, se rapporte à la théorie des séries. On sait que les séries infinies convergentes sont de deux espèces très-différentes, les séries de la première espèce étant convergentes indépendamment des signes dont leurs termes sont affectés, tandis que celles de la seconde ne jouissent de cette propriété que parceque les termes se détruisent en partie par l'opposition de leurs signes.

La convergence d'une série de la première espèce subsiste et sa somme conserve toujours la même valeur quel que soit l'ordre que l'on établisse entre ses termes. Les séries de la seconde espèce se comportent d'une manière entièrement différente. Une série de cette espèce, convergente pour un certain arrangement de ses termes, peut perdre cette propriété, lorsque cet ordre vient à être changé. Il peut arriver aussi que la série soit encore convergente après ce changement, mais que sa somme ait varié en même temps que l'ordre de ses termes. Ces remarques intimement liées à notre sujet, comme on le verra plus loin, ne sont pas sans importance pour d'autres recherches. Il en résulte par exemple et pour le dire en passant, que si l'on parvient à sommer une série qui appartient à la seconde espèce, et que l'on trouve pour la somme de la série une valeur entièrement déterminée, sans que l'ordre dans lequel les termes sont supposés se suivre, entre comme un élément essentiel dans l'analyse dont on fait usage, la méthode de sommation doit renfermer quelque vice caché, ou du moins a besoin d'être complétée par quelque considération qui indique clairement quel est l'arrangement des termes auquel la somme obtenue correspond.

Pour revenir à notre objet, soit s une variable positive et considérons la série dont le terme général est

$$c_n \frac{1}{n^s},$$

l'entier n étant susceptible de toutes les valeurs depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Si nous supposons que c_n, abstraction faite de son signe, et quel que soit l'indice n, soit toujours moindre que la constante C, notre série appartiendra à la première espèce tant que l'on aura $s > 1$. En posant donc $s = 1 + \varrho$, ϱ étant une variable positive aussi petite que l'on voudra, la somme

$$\psi(1+\varrho) = \Sigma\, c_n \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

aura une valeur unique et entièrement indépendante de l'arrangement de ses termes. Concevons maintenant qu'il s'agisse d'obtenir la limite vers laquelle la fonction $\psi(1+\varrho)$, évidemment continue tant que la variable ϱ reste positive, converge lorsque ϱ devient moindre que toute grandeur donnée, en supposant toutefois qu'une pareille limite existe ce qui peut n'avoir pas lieu. D'après les remarques faites plus haut, on ne serait pas fondé à dire que cette limite soit exprimée par $\Sigma\, c_n \frac{1}{n}$, l'ordre des termes étant arbitraire, car il est évident que cette dernière série appartient à la seconde espèce, et n'a par conséquent pas de somme déterminée.

Les suppositions énoncées plus haut, étant conservées, soit k un entier positif, et concevons que c_n satisfasse à l'équation

$$8.\quad c_{n+k} = c_n,$$

ou en d'autres termes, que la suite

$$c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_k;\ c_{k+1},\ c_{k+2},\ \ldots\ c_{2k};\ c_{2k+1},\ \ldots$$

soit périodique, le nombre des termes qui composent une période, étant égal à k. Supposons encore que la somme de ces termes soit zéro, c'est à dire que l'on ait

$$9.\quad c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 0.$$

Cela étant, je dis que la somme

$$\Sigma\, c_n \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

qui ne dépend pas de l'ordre des termes, converge vers une limite finie, donnée par l'expression

$$\Sigma\, c_n \frac{1}{n},$$

où les termes sont supposés se suivre dans l'ordre naturel, c'est à dire de manière à ce que les valeurs de n croissent constamment depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Pour démontrer cette assertion, il suffira évidemment de faire voir que la série,

$$\Sigma\, c_n \frac{1}{n^s}$$

les termes étant rangés dans l'ordre indiqué, reste convergente et exprime une fonction continue de s, depuis $s=\infty$ jusqu'à $s=1$ inclusivement. Or il est facile de prouver que cette double propriété subsiste non seulement entre les limites précédentes, mais plus généralement tant que s reste supérieur à zéro. En effet, h étant un entier positif quelconque, exprimons par une intégrale définie la somme du hk premiers termes de la série précédente. Au moyen de la formule

$$\int_0^1 x^{n-1} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

et en ayant égard à l'équation (8.), on trouvera pour cette somme

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\Sigma\, c_n\, x^{n-1}}{1-x^k} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx - \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\Sigma\, c_n\, x^{n-1}}{1-x^k}\, x^{hk} \log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

le signe sommatoire s'étendant depuis $n=1$ jusqu'à $n=k$. La polynome $\Sigma\, c_n\, x^{n-1}$ étant divisible par $1-x$, comme on le voit par l'équation (9.), la fraction algébrique sous le signe d'intégration reste finie. Soit K la plus grande valeur numérique de cette fraction depuis $x=0$ jusqu'à

$x=1$; la seconde intégrale sera donc moindre que

$$\frac{K}{\Gamma(s)}\int_0^1 x^{kh}\log^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{K}{(hk+1)^s},$$

et s'évanouira pour $h=\infty$. Il résulte de là que la série prolongée à l'infini est convergente, et l'on voit avec la même facilité que sa somme exprimée par la première intégrale, est une fonction de s, qui varie d'une manière continue avec cette variable tant que l'on a $s>0$.

§. 2.

p étant un nombre premier impair, positif ou négatif, et k un entier non-divisible par p, qui peut être aussi positif ou négatif, nous désignons avec *Legendre* par $\left(\frac{k}{p}\right)$ l'unité prise avec le signe plus ou avec le signe moins, suivant que k sera ou ne sera pas résidu quadratique relativement à p. L'illustre auteur définit le symbole $\left(\frac{k}{p}\right)$ comme le reste que donne la puissance $k^{\frac{p-1}{2}}$, lorsqu'on la divise par p; la définition précédente, quoique la même au fond, est préférable pour notre objet en ce qu'elle ne suppose pas que p soit un nombre positif. Si nous désignons par l un second entier non-divisible par p et par q un nombre premier impair dont la valeur numérique diffère de celle de p, on aura suivant la notation précédente:

$$1.\quad\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{l}{p}\right)=\left(\frac{kl}{p}\right),\quad\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}},\quad\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},\\&\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations qui renferment toute la théorie des résidus quadratiques, supposent de plus, la seconde que p est positif, la quatrième que p et q n'ont pas simultanément le signe négatif.

Les entiers k et P, positifs ou négatifs, n'ayant pas de diviseur commun, et le second P, que nous supposons impair, étant décomposé en ses facteurs simples $p, p', p'', \ldots$ égaux ou inégaux, de sorte que $P=pp'p''\ldots$, nous aurons souvent à distinguer si ceux des nombres premiers $p, p', p'', \ldots$ à l'égard desquels k est non-résidu quadratique, sont en nombre pair ou impair, ou ce qui est la même chose, si le produit

$$\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\ldots$$

a la valeur $+1$ ou celle-ci -1. Mr. *Jacobi* a proposé d'étendre la notation de *Legendre* à de semblables produits et d'écrire

$$\left(\frac{k}{P}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\cdots.$$

Comme cette généralisation de la notation de *Legendre*, dont l'illustre géomètre que je viens de citer, a fait des applications ingénieuses, *) est très-propre à simplifier les formules et à abréger les démonstrations, nous l'adopterons dans ce qui suivra. On aura suivant cette notation

$$2.\quad \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{l}{P}\right) = \left(\frac{kl}{P}\right),\quad \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{k}{Q}\right) = \left(\frac{k}{PQ}\right),\quad \left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}, \\ \left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}},\quad \left(\frac{Q}{P}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}, \end{array}\right.$$

en supposant que les entiers k et l n'ont pas de diviseur commun avec les nombres impairs P et Q, que P est positif dans la troisième, et enfin que P et Q sont premiers entre eux et n'ont pas simultanément le signe négatif dans la dernière de ces équations. Toutes ces équations sont ou évidentes ou se déduisent facilement des formules (1.), et il serait d'autant plus inutile de nous arrêter à les démontrer que les théorèmes qu'elles expriment se trouvent déjà, à la notation près, dans l'ouvrage de Mr. *Gaufs* art. 133. Pour éviter des distinctions inutiles il conviendra de ne pas exclure le cas où P dans le symbole $\left(\frac{k}{P}\right)$ a la valeur ± 1, en supposant $\left(\frac{k}{\pm 1}\right) = 1$. Il est évident que cette nouvelle convention est compatible avec les équations précédentes, et qu'en l'adoptant, la troisième de ces équations se trouvera comprise dans la cinquième et répondra à $Q = -1$.

Nous terminerons ce §., en posant les équations évidentes qui suivent, et dans lesquelles k et l désignent des nombres impairs et δ la valeur ± 1,

$$3.\quad \delta^{\frac{k-1}{2}}\delta^{\frac{l-1}{2}} = \delta^{\frac{kl-1}{2}},\quad \delta^{\frac{k^2-1}{8}}\delta^{\frac{l^2-1}{8}} = \delta^{\frac{(kl)^2-1}{8}}.$$

§. 3.

Nous avons maintenant à rappeler quelques résultats connus qui se rapportent à le théorie des formes quadratiques. En désignant par D un entier positif ou négatif (le cas de $D = 0$ sera excepté), nous appellerons avec Mr. *Gaufs* forme du déterminant D, toute expression comme

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

a, b, c étant des entiers donnés, liés entre eux par la condition $b^2 - ac = D$,

---

*) Compte rendu des séances de l'Académie de Berlin, Oct. 1837.

et x et y désignant des entiers indéterminés. Lorsque le déterminant D est un nombre négatif, les coëfficients extrêmes seront toujours de même signe. Nous ne considérons, dans ce cas, que les formes pour lesquelles ce signe est $+$, c'est à dire les formes qui n'expriment que des nombres positifs. Mr. *Gaufs* range les formes qui appartiennent à un même déterminant en différents ordres, en comprenant dans un même ordre toutes celles pour lesquelles le plus grand diviseur commun de a, b, c a la même valeur. Nous supposerons toujours qu'un pareil diviseur n'existe pas ou plutôt qu'il est égal à l'unité, les autres cas peuvant toujours être immédiatement ramenés à celui-ci. Les formes dont il s'agit et dont l'ensemble forme l'ordre appelé primitif, peuvent elles-mêmes présenter deux cas. Il peut arriver que a et c soient simultanément pairs ou que cette condition n'ait pas lieu. Dans le second de ces cas, les formes constituent ce que Mr. *Gaufs* appelle l'ordre proprement primitif, l'autre cas étant celui de l'ordre improprement primitif. Quand nous parlerons de formes quadratiques sans autre désignation, nous sous-entendrons toujours que ces formes appartiennent à l'ordre proprement primitif. On sait d'ailleurs que l'ordre improprement primitif n'existe que lorsqu'on a $D \equiv 1$ (mod. 4).

Deux formes $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ étant telles que la première se change dans la seconde, au moyen de la substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \text{où l'on a} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

sont dites équivalentes et cette équivalence est appelée propre ou impropre, suivant que le signe supérieur ou le signe inférieur a lieu. Cette distinction que Mr. *Gaufs* a introduite dans la théorie des formes quadratiques, et qui est analogue à celle que l'on fait en géométrie entre l'égalité par superposition et l'égalité par symétrie, *) a beaucoup d'importance en ce qu'elle conserve à la théorie des formes du second degré une simplicité que cette théorie n'aurait pas, à beaucoup près, si l'on n'y avait pas égard. Nous n'aurons pas à considérer l'équivalence impropre; en disant donc simplement que deux formes sont équivalentes, nous sous-entendrons toujours qu'il s'agit de l'équivalence propre.

---

*) On peut consulter sur cette analogie remarquable un article que Mr. *Gaufs* a inséré dans les annonces littéraires de Gottingue et dans lequel l'illustre auteur, après avoir rendu compte d'un ouvrage de Mr. *Seber* sur les formes quadratiques à trois indéterminées, entre dans des détails très-intéressants, sur la manière dont on peut représenter géométriquement les propriétés des formes du second degré qui renferment deux ou trois entiers indéterminés.

Les formes (positives et proprement primitives) dont le déterminant est un nombre donné D, et qui sont toujours en nombre infini, peuvent se distribuer en un nombre limité de classes, en plaçant deux formes dans la même classe ou dans des classes différentes suivant que ces formes sont ou ne sont pas équivalentes. Si l'on prend dans chaque classe l'une quelconque des formes qui la composent, on aura ce que nous appelerons le système complet des formes différentes, ou plus simplement, les formes différentes du déterminant D. Ce système étant construit, il est évident que toute forme dont le déterminant est D, aura toujours son équivalente et n'en aura qu'une dans ce système. Il est également facile de voir que si l'on construit un système semblable pour l'ordre des formes improprement primitives, ce nouveau système jouira de la même propriété relativement à toute forme qui appartient au même ordre.

Les formes différentes qui correspondent au déterminant quelconque D, sont divisées par M. *Gauſs* en genres, qui sont analogues à ce que *Legendre* appelle groupes de diviseurs quadratiques. La différence qui existe à cet égard entre les illustres géomètres que je viens de citer, tient uniquement à ce que *Legendre* exclut les déterminants qui ont des diviseurs quarrés, ce que Mr. *Gauſs* ne fait pas et ce que nous ne ferons pas non plus, la considération des déterminants de cette espèce étant indispensable dans différentes recherches. Voici maintenant les principes très-faciles à établir, sur lesquels la division en genres repose. (Disq. arithm. art. 229 et suiv.)

I. Si l est un nombre premier impair qui divise D, les entiers m, non-divisibles par l, qui peuvent être représentés par une même forme ayant D pour déterminant, sont ou tous tels que $\left(\frac{m}{l}\right) = 1$, ou tous tels que $\left(\frac{m}{l}\right) = -1$.

II. Lorsqu'on a $D \equiv 3 \pmod{4}$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$.

III. Lorsqu'on a $D \equiv 2 \pmod{8}$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = -1$.

IV. Lorsqu'on a $D \equiv 6 \pmod{8}$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1$.

V. Lorsqu'on a $D \equiv 4 \pmod{8}$, les nombres impairs m, susceptibles d'être représentés par la même forme, sont ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = 1$, ou tous tels que $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = -1$.

VI. Losqu'on a $D \equiv 0 \pmod{8}$, les nombres impairs m, susceptibles d'êtres représentés par la même forme, sont tous exclusivement contenus dans l'une de ces quatre formes $8\mu+1$, 3, 5, 7, ou, ce qui revient au même, on a à la fois $(-1)^{\frac{m-1}{2}} = \pm 1$, $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} = \pm 1$, chacun des deux signes ambigus restant invariable pour la même forme.

Toute propriété de la nature de celles exprimées dans les énoncés précédents, est ce que Mr. *Gaufs* appelle un caractère particulier de la forme à laquelle cette propriété appartient. C'est ainsi que les caractères particuliers de la forme $5x^2+4xy+14y^2$, dont le déterminant est $-66 = -2.3.11$, sont contenus dans les équations

$$\left(\frac{m}{3}\right) = -1, \quad \left(\frac{m}{11}\right) = 1, \quad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}} = -1.$$

L'ensemble des caractères particuliers d'une forme constitue son caractère complet, et la distribution des formes en genres consiste à rapporter au même genre les formes qui ont le même caractère complet, et à des genres différents celles dont les caractères complets sont différents. Quant au nombre des genres différents, ou ce qui est la même chose, des caractères complets différents, il est, généralement parlant, moindre que celui des combinaisons que l'on peut former avec les caractères particuliers différents, puisqu'il existe toujours, à l'exception d'un cas singulier, une relation entre les caractères particuliers qui conviennent à la même forme quadratique, relation qui dérive des théorèmes (2.) du §. précédent. Pour voir en quoi consiste cette relation, soit S^2 le plus grand quarré qui divise D, et désignons par P ou par $2P$ le quotient $\frac{D}{S^2}$, suivant qu'il est impair ou pair. Nous aurons donc selon ces deux cas

$$D = PS^2, \quad \text{ou} \quad D = 2PS^2$$

et le nombre impair P étant décomposés en ses facteurs simples $p, p, p, \ldots$

$$P = p\,p'\,p''\ldots,$$

ces facteurs seront tous inégaux. Si nous considérons maintenant une forme quelconque, appartenant à l'ordre proprement primitif et ayant D pour déterminant, on pourra toujours attribuer aux indéterminées x et y des valeurs premières entre elles et telles que la valeur correspondante m de la forme soit positive, impaire et première à D. Cela étant, D sera résidu quadratique relativement à m et par suite aussi à l'égard de tous les facteurs simples de m. (Disq. arithm. art. 154.) On aura donc $\left(\frac{D}{m}\right) = 1$, et par conséquent suivant les deux cas que nous venons de distinguer,

$$\left(\frac{P}{m}\right) = 1, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2P}{m}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{P}{m}\right) = 1.$$

D'un autre côté, m étant positif, il résulte des équations (2.) §. 2.:

$$\left(\frac{P}{m}\right) = \left(\frac{m}{P}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}.$$

Si l'on remarque maintenant que la puissance $(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}$ est équivalente à 1, ou à $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, suivant que $P \equiv 1$, ou $P \equiv 3$ (mod. 4), et que l'on écrive $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\ldots$ à la place de $\left(\frac{m}{P}\right)$, et $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$ à la place de $\left(\frac{2}{m}\right)$, on aura ces résultats:

$$D = PS^2, \begin{cases} P \equiv 1 \text{ (mod. 4)}, & \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right) \ldots\ldots\ldots = 1, \\ P \equiv 3 \text{ (mod. 4)}, & (-1)^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right) \ldots\ldots\ldots = 1, \end{cases}$$

$$D = 2PS^2, \begin{cases} P \equiv 1 \text{ (mod. 4)}, & (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right) \ldots\ldots\ldots = 1, \\ P \equiv 3 \text{ (mod. 4)}, & (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right) \ldots\ldots = 1. \end{cases}$$

Quant aux caractères particuliers qui n'entrent pas dans ces relations, il n'existe aucune condition à leur égard, ou, pour parler plus exactement et pour ne pas aller au delà de ce qui a été démontré, il ne résulte aucune condition qui les concerne, des théorèmes (2.) §. 2., dont nous venons de faire usage. Au moyen des résultats précédents et des théorèmes énoncés plus haut, il sera facile de former le tableau suivant qui pourra servir dans chaque cas à faire l'énumération complète des genres différents qui répondent au déterminant D, et dans lequel

$$r,\ r',\ r'',\ \ldots.$$

désignent les nombres premiers impairs inégaux qui divisent D, sans diviser P.

Premier cas. $D = PS^2$, $P \equiv 1 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$,	$\left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$\left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$
$S \equiv 2 \pmod{4}$,	$\left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ \left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$
$S \equiv 0 \pmod{4}$,	$\left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ (-1)^{\frac{m^2-1}{8}},\ \left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$

Second cas. $D = PS^2$, $P \equiv 3 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$,	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$\left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$
$S \equiv 2 \pmod{4}$,	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$\left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$
$S \equiv 0 \pmod{4}$,	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}},\ \left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$

Troisième cas. $D = 2PS^2$, $P \equiv 1 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$,	$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$\left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$
$S \equiv 0 \pmod{2}$,	$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ \left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$

Quatrième cas. $D = 2PS^2$, $P \equiv 3 \pmod{4}$.

$S \equiv 1 \pmod{2}$,	$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$\left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$
$S \equiv 0 \pmod{2}$,	$(-1)^{\frac{m-1}{2}},\ (-1)^{\frac{m^2-1}{8}},\ \left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots.$	$\left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots.$

Pour énumérer les caractères complets, ou ce qui est la même chose, les genres différents qui peuvent avoir lieu pour un déterminant donné, il faudra écrire toutes les expressions qui forment la ligne horisontale qui correspond au déterminant donné dans ce tableau, les unes à la suite des autres, après avoir égalé chaque expression à ± 1, et varier ensuite les signes ambiguës de toutes les manières possibles, en s'assujettissant toutefois à la condition que les seconds membres de celles de ces équations qui répondent à la première partie de la ligne horisontale, doivent donnner 1 pour produit, cette condition coïncidant avec celle dont la nécessité a été établie plus haut. Soit, par exemple, $D = 2.3.5^2$. Ce déterminant se rapportant à la première subdivision du quatrième cas, on aura ces 4 caractères complets:

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=1;\ (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=-1;$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=-1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=-1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=1;\ (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}=-1,\ \left(\frac{m}{3}\right)=-1,\ \left(\frac{m}{5}\right)=-1.$$

Suivant la notation de Mr. *Gaufs*, ces mêmes genres seraient charactérisés comme il suit:

1 et 3, 8; $R3$; $R5$ — 1 et 3, 8; $R3$; $N5$ — 5 et 7, 8; $N3$; $R5$ — 5 et 7, 8; $N3$; $N5$.

Il importe de remarquer que les considérations précédentes ne prouvent nullement que les genres compatibles avec la condition énoncée, existent réellement; on peut en conclure seulement qu'il ne saurait y en avoir d'autres. Quant à la question de savoir 1°. si pour chaque déterminant il y a réellement des formes qui appartiennent à chacun des genres ainsi énumérés, et 2°. de quelle manière les formes différentes se distribuent entre les genres, qui ont une existence réelle, c'est une question très-difficile qui forme l'un des principaux objets de la seconde partie de la 5ième section de l'ouvrage de Mr. *Gaufs*, et dont nous donnerons aussi plus bas la solution au moyen de nos principes.

Nous ferons encore observer, avant d'aller plus loin, que si l'on désigne par λ le nombre des expressions contenues dans la même ligne horisontale du tableau précédent, le nombre des genres énumérés de la manière indiquée, sera évidemment exprimé par $2^{\lambda-1}$. Il n'y a qu'une seule exception à cette règle générale, exception qui a lieu lorsque la première partie de la ligne qui est assujettie à une condition dont l'effet est de réduire le nombre des combinaisons de moitié, n'existe pas. En jetant les yeux sur le tableau, on voit de suite que cela ne peut arriver que lorsque le déterminant se trouve compris dans le premier cas, et qu'en même temps P ne contient aucun facteur premier p, p', ... Comme l'on a alors d'une part $P \equiv 1$ (mod. 4) et de l'autre $P = \pm 1$, et par suite $P = 1$, on voit que ce cas n'a lieu que lorsque le déterminant est un quarré positif, et que le nombre des genres est alors égal à 2^λ.

Tout ce qui précède, est relatif aux formes proprement primitives. Il nous reste à considérer le cas des formes qui appartiennent à l'ordre improprement primitif, et qui ne peuvent représenter que des nombres pairs. Ce cas ne peut avoir lieu que lorsqu'on a $D\equiv 1$ (mod. 4), et par suite $P\equiv 1$ (mod. 4), $S\equiv 1$ (mod. 2). Si l'on désigne par m un entier positif, impair et premier à D, dont le double puisse être exprimé par une pareille forme, on formera sans peine le tableau qui suit, et dont l'usage est entièrement semblable à celui du tableau donné plus haut.

$$D=PS^2,\quad P\equiv 1 \text{ (mod. 4)},\quad S\equiv 1 \text{ (mod. 2)},$$
$$\left(\frac{m}{p}\right),\ \left(\frac{m}{p'}\right),\ \ldots\ \Big|\ \left(\frac{m}{r}\right),\ \left(\frac{m}{r'}\right),\ \ldots$$

§. 4.

Nous avons maintenant à examiner sous quelles conditions et de combien de manières différentes un nombre m que je suppose positif, impair et premier à D, ou son double peut être représenté par les formes du déterminant D, en supposant que les valeurs positives ou négatives que l'on attribuera à cet effet aux indéterminées x et y, doivent être premières entre elles. Pour qu'une telle représentation soit possible, il faut que D soit résidu quadratique relativement à m ou à $2m$, (Disq. arithm. 154.), conditions dont la seconde ne diffère pas de la première. Or, pour que D soit résidu quadratique par rapport à m, il faut et il suffit qu'on ait pour chacun des diviseurs simples f de m (art. 105.),

$$1.\quad \left(\frac{D}{f}\right)=1.$$

En supposant f positif, et distinguant comme dans le §. précédent, les 4 cas suivants que le déterminant D peut présenter,

$D=PS^2$, $P\equiv 1$ ou 3 (mod. 4); $D=2PS^2$, $P\equiv 1$ ou 3 (mod. 4), la condition dont il s'agit, pourra être remplacée en vertu des théorèmes (2.) §. 2. et selon ces 4 cas, par l'une de celles-ci:

$$2.\quad \left(\frac{f}{P}\right)=1,\ (-1)^{\frac{f-1}{2}}\left(\frac{f}{P}\right)=1,\ (-1)^{\frac{f^2-1}{8}}\left(\frac{f}{P}\right)=1,\ (-1)^{\frac{f-1}{2}+\frac{f^2-1}{8}}\left(\frac{f}{P}\right)=1.$$

Cela posé, soit

$$3.\quad ax^2+2bxy+cy,\quad a'x^2+2b'xy+c'y^2,\ \ldots.$$

le système complet des formes différentes (proprement primitives), ayant pour déterminant le nombre négatif D, et voyons combien de fois le nombre m dont tout diviseur simple f est supposé satisfaire à la condition (1.), peut être représenté de la manière indiquée, par la totalité de ces formes. Si nous désignons par μ le nombre des diviseurs premiers inégaux f de m, la congruence

$$z^2 \equiv D \pmod{m},$$

aura autant de racines différentes qu'il y aura d'unités dans la puissance 2^μ (art. 105). Soient

$$l,\ l',\ l'',\ \ldots.$$

ces racines et cherchons d'après les préceptes de l'art. 180., les représentations qui appartiennent à chacune de ces racines. Pour obtenir celles qui se rapportent à $z = l$, il faudra voir si parmi les formes (3.) il y en a une qui soit équivalente à celle-ci:

$$mx^2 + 2lxy + \frac{l^2 - D}{m} y^2.$$

Or, m étant impair et premier à D, cette dernière sera proprement primitive, et aura donc toujours son équivalente dans le système (3.), par laquelle m pourra être représenté de deux manières. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à toutes les autres racines l', l'', ..., on voit que m peut être représenté par la totalité des formes (3.), d'autant de manières différentes qu'il y a d'unités dans la puissance $2^{\mu+1}$, deux représentations étant considérées comme différentes lorsqu'elles se font par des formes différentes ou lorsqu'ayant lieu par la même forme, et désignant par x, y, et par x', y', les valeurs simultanées des indéterminées, on n'a pas à la fois $x = x'$, et $y = y'$.

Si le système complet (3.) est celui de l'ordre improprement primitif, et si en même temps le nombre qu'il s'agit de représenter par ces formes, est $2m$, on arrive à la même conclusion. Il suffit de remarquer que le nombre des racines de la congruence $z^2 \equiv D \pmod{2m}$, est également 2^μ, et que l'une quelconque de ces racines étant désignée par l, la forme $2mx^2 + 2lxy + \frac{l^2 - D}{2m} y^2$ sera improprement primitive. C'est ce qui résulte de ce que m est impair et premier à D, et de ce que, l^2 et D étant de la forme $4\nu + 1$, le coëfficient de y^2 est pair. Nous avons donc ce théorème dans lequel les deux cas sont réunis dans le même énoncé.

Théorème I.

Soient $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$, ... les formes proprement (improprement) primitives différentes, ayant l'entier négatif D

pour déterminant; soit encore m un nombre positif, impair et premier à D, dont tous les diviseurs simples f satisfont à celle des conditions (2.), qui se rapporte au nombre donné D, et désignons par μ le nombre des facteurs simples inégaux de D. Cela posé, je dis que, si les indéterminées x et y sont assujetties à n'avoir pas de diviseur commun, l'entier m, $(2m)$ sera toujours représenté par la totalité de ces formes, d'autant de manières différentes qu'il y a d'unités dans la puissance $2^{\mu+1}$.

Remarque. Le théorème précédent est sujet à deux exceptions, dont la première a lieu lorsqu'on a $D = -1$, la seconde lorsqu'on a $D = -3$, et qu'il s'agit des formes de l'ordre improprement primitif. Il résulte de l'art. déjà cité de l'ouvrage de Mr. *Gaufs*, que le nombre des représentations est respectivement dans ces cas, $2^{\mu+2}$ ou $3.2^{\mu+1}$.

Pour établir le théorème que nous allons énoncer, et qui se rapporte au cas où D est un nombre positif (*non-quarré*) *), il n'y aura rien à changer aux considérations précédentes, si ce n'est qu'au lieu de s'appuyer sur l'art. 180. des Disq. arithm., il faudra recourir à l'art. 205. du même ouvrage. Pour réunir le cas des formes proprement primitives et celui des formes improprement primitives dans un énoncé commun, nous avons fait usage de la lettre ω, par laquelle il faut entendre le nombre 1 ou 2 selon ces deux cas.

Théorème II.

Soient $ax^2+2bxy+cy^2$, $a'x^2+2b'xy+c'y^2$, ... les formes proprement (improprement) primitives différentes ayant l'entier positif D pour déterminant; soit encore m un nombre positif, impair et premier à D, dont tous les facteurs simples f satisfont à celle des conditions (2.), qui se rapporte au nombre donné D, et désignons par μ le nombre des facteurs simples inégaux de D. Cela posé, et les indéterminées x et y étant assujetties à n'avoir pas de diviseur commun, je dis que les représentations de ωm par la totalité de ces formes, pourront toujours être distribuées en 2^μ groupes distincts, en comprenant dans un même groupe deux représentations telles que

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \omega m, \quad ax'^2+2bx'y'+cy'^2 = \omega m,$$

*) Les formes dont le déterminant est un quarré positif, et qui se décomposent toujours en deux facteurs linéaires, ne sont pas de véritables formes quadratiques. Par cette raison nous les exclurons toujours dans ce qui va suivre.

qui se font par la même forme quadratique, et dans lesquelles les valeurs x, y et x', y' des indéterminées, sont liées entre elles par les équations

$$x = \frac{1}{\omega}(x't - (bx' + cy')u), \quad y = \frac{1}{\omega}(y't + (ax' + by')u),$$

t et u désignant des entiers quelconques positifs ou négatifs tels qu'on ait

$$4. \quad t^2 - Du^2 = w^2.$$

[On peut remarquer que cet énoncé, si l'on y supprimait la condition que D doit être positif, resterait exact et comprendrait alors le théorème I., avec ses deux exceptions. En effet, D étant supposé négatif, l'équation (4.) n'a en général que ces deux solutions $t = \pm\omega$, $u = 0$, ce qui donne deux représentations pour chaque groupe, de sorte que le nombre total des représentations, fini dans ce cas, devient $2^{\mu+1}$ comme dans le théorème I. Il n'y a exception que lorsqu'on a ou $D = -1$, $\omega = 1$; ou $D = -3$, $\omega = 2$, auxquels cas le nombre des solutions de l'équation (4.) est respectivement 4 ou 6, ce qui s'accorde avec les exceptions indiquées plus haut. Mais tout en faisant remarquer ce que le cas de D positif et celui de D négatif ont de commun, comme sous d'autres rapports ces deux cas sont très-différents et doivent être traités séparément, nous avons cru devoir donner deux énoncés distincts, pour pouvoir appliquer plus facilement les résultats précédents que nous aurons souvent à employer.]

Il est facile de voir que les représentations, ou ce qui est la même chose, les solutions de l'équation,

$$5. \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = \omega m,$$

qui appartiennent au même groupe, peuvent toujours se déduire toutes de l'une quelconque d'entre elles, $x = \alpha$, $y = \gamma$, au moyen des formules

$$6. \quad x = \frac{1}{\omega}(\alpha t - (b\alpha + c\gamma)u), \quad y = \frac{1}{\omega}(\gamma t + (a\alpha + b\gamma)u),$$

en attribuant à t et u toutes les valeurs entières, tant positives que négatives, qui satisfont à l'équation (4.).

Nous allons faire voir maintenant qu'il existe certaines limites très-simples entre lesquelles se trouve toujours comprise une de ces solutions en nombre infini, et entre lesquelles il ne saurait y en avoir plus d'une. Pour éviter des distinctions inutiles à notre objet, nous supposerons que dans chacune des formes données,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2, \quad \ldots.$$

les coëfficients de x^2 et de xy sont positifs, et que celui de y^2 est négatif. On s'assure facilement de la légitimité de cette supposition; il suffit de remarquer que parmi les formes qui composent une même classe, et entre lesquelles nous pouvons en choisir une à volonté, pour construire ce que nous avons appelé le système complet des formes différentes, il y en a toujours au moins une qui satisfait aux conditions énoncées. En effet, la période des formes réduites qui appartiennent à une classe donnée de déterminant positif, contient toujours au moins deux formes (Disq. arithm. art. 187.), et il est évident que sur deux formes contiguës quelconques de cette période, il y en a toujours une qui est telle que

$$7.\quad a > 0,\quad b > 0,\quad c < 0.$$

Ces conditions ayant lieu, il est facile de voir que parmi les solutions de l'équation (5.), il ne saurait y en avoir aucune pour laquelle x soit zéro, puisqu'il résulterait de cette supposition, $cy^2 = m$, ce qui est impossible, c et m ayant des signes opposés. La valeur particulière α sera donc aussi différente de zéro, et nous remarquerons que cette valeur peut toujours être supposée positive. Cela résulte de ce que la solution $x = \alpha$, $y = \gamma$, qui sert de point de départ pour obtenir toutes celles qui appartiennent à un même groupe, peut être choisie à volonté dans ce groupe, et de ce que le groupe qui contient la solution $x = \alpha$, $y = \gamma$, renferme évidemment aussi celle-ci $x = -\alpha$, $y = -\gamma$, cette dernière rapportée à la première, répondant à $t = -\omega$, $u = 0$.

Les solutions, en nombre infini, qui forment un même groupe, et qui résultent des équations (6.), peuvent se distribuer en deux groupes partiels dont le premier comprend toutes celles pour lesquelles on a $x > 0$, tandis que celles du second satisfont à la condition $x < 0$.

Nous allons maintenant faire voir que dans le premier de ces groupes partiels, les valeurs de y s'étendent depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, sans que cette indéterminée puisse obtenir la même valeur dans deux solutions différentes, et que celle de ces solutions pour laquelle y a la plus petite valeur positive, différente de zéro, satisfait à des conditions d'inégalité très-simples au moyen desquelles il est facile de la séparer de toutes les autres, et de réduire chaque groupe à une représentation unique, ce qui rendra le théorème II. entièrement semblable au théorème I. qui se rapporte aux déterminants négatifs. Pour remplir l'objet que nous avons en vue, nous observerons qu'il résulte de l'équation $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 = \omega m$, mise sous la forme $(b\alpha+c\gamma)^2-D\alpha^2=\omega cm$, et de ce que ωcm est négatif, qu'on a, abstraction faite des signes,

$$\alpha\sqrt{D}>b\alpha+c\gamma,$$

et comme l'on a pareillement en vertu de l'équation (4.),

$$\frac{t}{\omega}>\frac{u}{\omega}\sqrt{D},$$

on conclut, en faisant toujours abstraction des signes,

$$\alpha t>(b\alpha+c\beta)u.$$

Il suit de là et de ce qu'on a supposé $\alpha>0$, que pour embrasser toutes celles des représentations contenues dans les équations (6.), pour lesquelles x a une valeur positive, on n'aura à faire usage que de celles des solutions de l'équation (4.), dans lesquelles t a le signe plus. Or, il résulte d'un théorème connu que toutes les solutions qui satisfont à cette condition, sont données par les formules

$$t_n=\frac{\omega}{2}\left\{\left(\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n+\left(\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n\right\},$$

$$u_n=\frac{\omega}{2\sqrt{D}}\left\{\left(\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n-\left(\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n\right\},$$

dans lesquelles T et U désignent les plus petits nombres positifs (autres que ω et 0) qui satisfont à l'équation (4.), et où n doit être égalé successivement à tous les entiers depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. On aura donc pour le groupe partiel dans lequel x est positif, en distinguant les différentes solutions de ce groupe par l'indice n, déjà employé dans les équations précédentes,

$$x_n=\frac{1}{\omega}(\alpha t_n-(\alpha b+\gamma c)u_n),\qquad y_n=\frac{1}{\omega}(\gamma t_n+(\alpha a+\gamma b)u_n).$$

En substituant les expressions de t_n, u_n, la seconde de ces équations deviendra

$$y_n=\left(\frac{\gamma\sqrt{D}+\alpha a+\gamma b}{2\sqrt{D}}\right)\left(\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n+\left(\frac{\gamma\sqrt{D}-\alpha a-\gamma b}{2\sqrt{D}}\right)\left(\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}\right)^n.$$

Il est facile de voir que les quantités $\gamma\sqrt{D}+\alpha a+\gamma b$, $\gamma\sqrt{D}-\alpha a-\gamma b$, sont la premier positive, le second négative. Pour s'en assurer il suffira de faire voir que $\alpha a+\gamma b$ est numériquement supérieur à $\gamma\sqrt{D}$, et a le signe positif. La première de ces assertions se prouve, en mettant l'équation $a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2=\omega m$, sous la forme $(\alpha a+\gamma b)^2-D\gamma^2=\omega am$, et en observant que le second membre est positif. Pour justifier la seconde assertion, on remarquera que, puisque la valeur numérique de $\alpha a+\gamma b$

surpasse celle de $\gamma\sqrt{D}$, elle surpassera *a fortiori* celle de γb, b étant $<\sqrt{D}$. De là et de ce que αa a le signe positif, on conclut que $\alpha a + \gamma b$ est également positif.

Comme en vertu de ce qui précède, les coëfficients qui entrent dans l'expression de y_n, sont le premier positif, le second négatif, et que d'un autre côté, les quantités positives $\frac{T}{\omega}+\frac{U}{\omega}\sqrt{D}$, $\frac{T}{\omega}-\frac{U}{\omega}\sqrt{D}$, dont le produit est 1, sont évidemment la première supérieure, la seconde inférieure à l'unité, on voit sans peine que chacun des deux termes dont se compose y_n, croît avec l'indice n. On aura donc, quel que soit cet indice,

$$y_n > y_{n-1},$$

ce qui prouve que, comme nous l'avons avancé plus haut, l'indéterminée y ne saurait obtenir deux fois la même valeur dans le groupe partiel où x est positif, et l'on voit également que y doit passer du négatif au positif, car on a évidemment $y_{-\infty} = -\infty$, $y_\infty = \infty$. Pour obtenir la solution que nous avons en vue, et dans laquelle y_n a la plus petite valeur positive, différente de zéro, il faudra poser ces deux conditions

$$y_n > 0, \quad y_{n-1} \overline{\overline{<}} 0.$$

Si l'on observe qu'en vertu des expressions de x_n, y_n, t_n, u_n, données plus haut, on a la relation

$$y_{n-1} = \frac{1}{\omega}(y_n T - (a x_n + b y_n) U),$$

la seconde de ces conditions prendra cette autre forme

$$(T - bU) y_n \leqq a U x_n.$$

Comme l'on a $T > U\sqrt{D}$, $b < \sqrt{D}$, et par suite $T - bU > 0$, l'inégalité précédente est équivalente à celle-ci

$$y_n \leqq \frac{aU}{T-bU} x_n.$$

Il résulte de ce qui précède, que parmi les représentations en nombre infini, qui forment un même groupe, et qui sont toutes données par les équations (6.), il y en a toujours une qui satisfait à ces trois conditions

$$8. \quad x > 0, \quad y > 0, \quad y \leqq \frac{aU}{T-bU}x.$$

Ces inégalités ont été déduites de la définition de la solution particulière que nous voulions séparer de toutes les autres contenues dans le même groupe qu'elle. D'après cette définition, la solution dont il s'agit devait appartenir au premier des deux groupes partiels, et répondre dans ce groupe à la plus petite valeur positive de y. On peut prouver réciproquement que toute solution pour laquelle les inégalités précédentes ont lieu, est nécessairement parmi toutes les solutions qui forment avec elle une même groupe total, celle à laquelle s'applique la définition précédente; il suffit pour cela de répéter en sens inverse les raisonnements que nous venons de développer. Cela étant, on voit que le théorème II. peut être remplacé par un autre théorème dont voici l'énoncé.

Théorème III.

Les suppositions de l'énoncé du théorème II. étant conservées, si l'on ajoute que les coëfficients et les indéterminées de la forme $ax^2+2bxy+cy^2$, doivent satisfaire aux conditions (7.) et (8.), et que l'on assujettise toutes les autres formes à des conditions analogues, je dis que le nombre des représentations différentes de l'entier ωm, que l'on peut effectuer au moyen des formes données, sera exprimé par la puissance 2^μ.

Pour rendre plus faciles les applications que nous aurons à faire du théorème précédent, il conviendra de mettre sous une forme géométrique, le résultat sur lequel ce théorème est fondé. Soient à cet effet OX, OY, deux axes rectangulaires des x et des y, dirigés dans le sens des coordonnées positives, le premier horisontalement, le second verticalement et de bas en haut. Les variables x et y dans l'équation $ax^2+2bxy+cy^2=\omega m$, étant considérées comme continues, cette équation sera à une hyperbole, et l'on déduira facilement des conditions $a>0$, $b>0$, $c<0$, que l'axe des y sépare l'une de l'autre, les deux branches infinies de cette courbe. Si donc nous appellons première branche celle de ces deux branches infinies, sur laquelle l'abscisse x est partout positive, le premier des deux groupes partiels précédemment distingués, répondra à cette première branche, et l'interprétation géométrique du résultat établi plus haut, consistera à dire que parmi les solutions en nombre infini, qui forment le même groupe total, et qui sont toutes comprises dans les équations (6.), il y en a toujours une, et qu'il ne saurait y en avoir plus d'une, qui soit représentée par un point de l'arc de la première branche, intercepté d'une part par l'axe OX, et de l'autre par la droite qui a pour équation $y=\frac{aU}{T-bU}x$; à quoi il faut ajouter qu'on doit toujours exclure la solution qui répond à l'extrémité inférieure de cet arc.

§. 5.

Il nous reste une dernière question préliminaire à resoudre, avant d'en venir au véritable objet de ce mémoire. Cette question consiste à assigner toutes les valeurs simultanées des indéterminées x et y, qui, étant substituées dans une forme donnée du déterminant D, rendent cette forme première à D, et en outre impaire ou impairement paire suivant qu'il s'agit d'une forme proprement ou improprement primitive. Nous désignons par D_1 la valeur numérique de D, et nous commencerons cette recherche par l'examen du cas où la forme donnée appartient à l'ordre proprement primitif. Ce cas se subdivise lui même, suivant que D est pair ou impair. Soit en premier lieu D impair. Les indéterminées x et y étant mises sous la forme

$$2D_1 v + \alpha, \quad 2D_1 w + \gamma,$$

où v, w désignent des entiers quelconques positifs ou négatifs, et α, γ sont des nombres pris l'un et l'autre dans la suite

$$0, 1, 2, \ldots\ 2D_1 - 1,$$

on aura évidemment

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \equiv a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \pmod{2D_1}.$$

La question proposée revient donc à voir pour lesquelles des combinaisons α, γ, ou plutôt, pour combien de ces combinaisons, car c'est uniquement leur nombre qu'il nous importe de connaître, le second membre est premier à $2D_1$. Nous observerons d'abord qu'on peut, sans nuire en rien à la généralité de la question, supposer l'un des coëfficients extrêmes, le premier a par exemple, sans diviseur commun avec $2D_1$. En effet, si cette condition n'a pas lieu dans la forme donnée, on peut toujours transformer celle-ci en une autre où elle se trouve remplie. Soit $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ la nouvelle forme équivalente à la première, et soient

$$x = px' + qy', \quad y = rx' + sy', \quad ps - qr = 1,$$

les équations qui correspondent à cette transformation. Si maintenant dans les congruences

$$\alpha \equiv p\alpha' + q\gamma', \quad \gamma \equiv r\alpha' + s\gamma', \pmod{2D_1},$$

l'on combine les nombres α', γ', pris l'un et l'autre dans la suite $0, 1, 2, \ldots$ $2D_1 - 1$, de toutes les manières possibles entre eux, et que l'on détermine α, γ de manière à se trouver compris entre les mêmes limites, à chaque combinaison α', γ', il correspondra une combinaison α, γ, et réciproquement, comme on le voit en mettant les congruences précédentes sous la forme

$$\alpha' \equiv s\alpha - q\gamma, \quad \gamma' \equiv -r\alpha + p\gamma \pmod{2D_1}.$$

De là et de ce que l'on a évidemment

$$a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \equiv a'\alpha'^2 + 2b'\alpha'\gamma' + c'\gamma'^2 \pmod{2D_1},$$

on conclut que le nombre des combinaisons α, γ, qui rendent $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$, premier à $2D_1$, est égal à celui des combinaisons α', γ' qui produisent le même effet sur le second membre. Cette conclusion justifiant l'assertion avancée plus haut, nous pouvons considérer a comme premier à $2D_1$. Cela posé, pour que le trinome $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ n'ait pas de diviseur commun avec $2D_1$, il faut et il suffit que le produit

$$a(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2,$$

jouisse de la même propriété, et par suite, que $a\alpha + b\gamma$ soit premier à $2D_1$, lorsque γ est pair, ou que $a\alpha + b\gamma$ soit pair et premier à D_1, lorsque γ est impair. Or, γ ayant une valeur déterminée, celles de l'expression $a\alpha + b\gamma$, lorsqu'on y pose successivement $\alpha = 0, 1, 2, \ldots.\ 2D_1 - 1$, coïncideront, abstraction faite des multiples de $2D_1$, avec la même suite. Tout se réduit donc à voir dans le cas de γ pair, combien la suite précédente renferme de termes premiers à $2D_1$, et dans le cas de γ impair, combien il y en a dans la même suite, qui jouissent de la double propriété d'être pairs et premiers à D_1. Si l'on désigne par Δ le nombre des entiers positifs non-supérieurs*) à D_1, qui n'ont pas de diviseur commun avec D, le nombre des termes en question sera pour l'un et l'autre cas, exprimé par Δ. Comme d'un autre côté, γ est susceptible de $2D_1$ valeurs différentes, on voit que les combinaisons α, γ qui donnent à $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$, une valeur première à $2D_1$, sont au nombre de $2D_1\Delta$. Une discussion toute semblable étant appliquée au cas où D est pair, fait voir que le nombre des combinaisons est alors $4D_1\Delta$.

Considérons en dernier lieu le cas où la forme donnée $ax^2 + 2bxy + cy^2$ appartient à l'ordre improprement primitif. Si nous posons $\frac{1}{2}a = a'$, $\frac{1}{2}b = b'$, et comme précédemment, $x = 2D_1 v + \alpha$, $y = 2D_1 w + \gamma$, nous aurons

$$a'x^2 + bxy + c'y^2 \equiv a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2 \pmod{2D_1},$$

*) Je dis à dessein non-supérieurs, pour que le cas de $D_1 = 1$, ne fasse pas exception.

et il s'agira de voir pour combien de combinaisons α, γ, le second membre est impair et premier à D_1. Pour y parvenir de la manière la plus simple, nous supposerons, ce qui est permis, que a' n'a pas de diviseur commun avec $2D_1$. Cela étant, il faut distinguer le cas où l'on a $D \equiv 1$, et celui où $D \equiv 5$ (mod. 8). Dans le premier de ces deux cas, il résulte de l'équation $D = b^2 - ac = b^2 - 4a'c'$, et de ce que b est impair, que c' est pair, et l'on voit de même que dans le second, c' est impair. On conclut de là que $a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$ ne saurait être impair dans le premier cas, à moins que les nombres α, γ, ne soient le premier impair, le second pair, et dans le second cas, à moins que α, γ, ne soient ou l'un pair, l'autre impair, ou impairs tous les deux. Pour avoir égard à l'autre condition d'après laquelle $a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$ doit être premier à D_1, on remarquera qu'il faut et qu'il suffit, pour qu'elle soit remplie, que le produit $4a'(a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2$ jouisse de la même propriété. Cela posé, si nous supposons d'abord $D \equiv 1$ (mod. 8), il faudra, après avoir attribué à γ une valeur déterminée paire, égaler α à chaque terme de la suite 1, 3, 5, ... $2D_1 - 1$, et voir combien de fois $a\alpha + b\gamma$, ou ce qui est la même chose, le reste de cette expression, pris relativement au diviseur D_1, est premier à D_1. Or il est facile de voir que les restes de $a\alpha + b\gamma$ sont, abstraction faite de l'ordre, 0, 1, 2, ... $D_1 - 1$, d'où l'on conclut qu'à chaque valeur de γ, il correspond un nombre Δ de valeurs impaires de α, telles que $a'\alpha^2 + b\alpha\gamma + c'\gamma^2$ soit impair et premier à D. Il résulte de là et de ce que le nombre γ est lui-même susceptible de D_1 valeurs différentes, que le nombre des combinaisons α, γ qui donnent à l'expression $\frac{1}{2}(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)$, une valeur impaire et première à D, est égal $D_1\Delta$. Si nous considérons en second lieu le cas où $D \equiv 5$ (mod. 8), on trouve comme dans le cas précédent, qu'à chaque valeur paire de γ, il correspond un nombre de valeurs convenables de α, égal à Δ, puisque, γ étant pair, α doit être impair; mais il n'en est plus de même, lorsque la valeur déterminée que l'on attribue a γ, est impaire, α pouvant être alors pair ou impair. Il faut dans cette dernière supposition, égaler α dans l'expression $a\alpha + b\gamma$, à chacun des nombres 0, 1, 2, ... $2D_1 - 1$. Or, les valeurs de $a\alpha + b\gamma$, correspondantes à ces nombres, étant diminuées des multiples de D_1, qu'elles contiennent, coïncideront évidemment avec la suite 0, 1, 2, ... $D_1 - 1$, chacun des termes de cette suite étant supposé écrit deux fois. On conclut de là que les valeurs convenables de α, qui répondent à une valeur impaire donnée de γ, sont toujours au nombre de 2Δ. Si l'on remarque maintenant que parmi les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2D_1-1$, dont γ est susceptible, il y en a D_1, qui sont paires, et autant qui sont impaires, on verra que dans le cas où l'on a $D \equiv 5 \pmod{8}$, le nombre des combinaisons α, γ, qui rendent le trinome $\frac{1}{2}(a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2)$ impair et premier à D, est égal à $3D_1\Delta$.

Nous résumerons ici les résultats qui ont été établis dans ce §. La valeur numérique du déterminant D étant désignée par D_1, et Δ exprimant le nombre de ceux des termes $1, 2, \ldots D_1$, qui n'ont pas de diviseur commun avec D_1, les valeurs simultanées de x et de y, qui rendent une forme quelconque de ce déterminant, ou la moitié de cette forme, lorsqu'elle appartient à l'ordre improprement primitif, impaire et première à D, peuvent toujours se distribuer en systèmes de la forme,

$$x = 2D_1 v + \alpha, \quad y = 2D_1 w + \gamma,$$

où v et w désignent des entiers indéterminés positifs ou négatifs, et α et γ sont l'un et l'autre compris dans la suite $0, 1, 2, \ldots 2D_1-1$; quant au nombre des systèmes qui jouissent de la propriété énoncée, il sera, lorsqu'il s'agit d'une forme proprement primitive $2D_1\Delta$ ou $4D_1\Delta$, suivant que D est impair ou pair, et, lorsque la forme est improprement primitive, $D_1\Delta$ ou $3D_1\Delta$, suivant que l'on a $D\equiv 1$, ou $D\equiv 5 \pmod{8}$.

Nous terminerons les préliminaires, en démontrant le lemme qui suit. „Soit $K = kk'k'' \ldots$ le produit des nombres premiers positifs, impairs et inégaux $k, k', k'', \ldots$, et désignons par L un entier quelconque qui divise K. Posons encore $\theta = \pm 1$, $\eta = \pm 1$, les signes ambigus étant quelconques et indépendants l'un de l'autre. Cela étant, je dis que l'expression $\Sigma \theta^{\frac{n-1}{2}} \eta^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{L}\right)$, où le signe sommatoire s'étend à tous les entiers n premiers à $2K$, et compris depuis $n=1$ jusqu'à $n=8K-1$, est toujours égale à zéro, si on n'a pas simultanément $\theta=1$, $\eta=1$, $L=1$."

Désignons par a l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots k-1$, par a' l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots k'-1$, et ainsi de suite. Soit encore b l'un quelconque des nombres $1, 3, 5, 7$. Cela posé, il est facile de voir que l'on obtiendra toutes les valeurs que n doit recevoir dans la somme précédente, en déterminant pour chacune des combinaisons a, a', ...; b, le nombre n, moindre que $8K$, qui satisfait aux conguences simultanées,

$$n \equiv \mathrm{a}\ (\mathrm{mod.}\, k), \quad n \equiv \mathrm{a}'\ (\mathrm{mod.}\, k'), \quad \ldots\ldots; \quad n \equiv \mathrm{b}\ (\mathrm{mod.}\, 8).$$

On conclut de ces congruences

$$\left(\frac{n}{k}\right) = \left(\frac{\mathrm{a}}{k}\right), \quad \left(\frac{n}{k'}\right) = \left(\frac{\mathrm{a}'}{k'}\right), \quad \ldots\ldots; \quad \theta^{\frac{n-1}{2}} = \theta^{\frac{b-1}{2}}, \quad \eta^{\frac{n^2-1}{8}} = \eta^{\frac{b^2-1}{8}}.$$

Si maintenant l'on forme le produit des deux dernières de ces équations et de celles des autres qui répondent à ceux des nombres premiers $k, k', \ldots.$ contenus dans L, et que l'on somme ensuite depuis $\mathrm{a} = 1$, $\mathrm{a}' = 1, \ldots.$ jusqu'à $\mathrm{a} = k-1$, $\mathrm{a}' = k'-1, \ldots.$ et relativement à $b = 1, 3, 5, 7$, la somme du lemme prendra la forme d'un produit, dont les facteurs sont outre $\Sigma\theta^{\frac{b-1}{2}}\eta^{\frac{b^2-1}{8}}$, celles des sommes $\Sigma\left(\frac{\mathrm{a}}{k}\right)$, $\Sigma\left(\frac{\mathrm{a}'}{k'}\right)$, ... qui se rapportent à des nombres premiers contenus dans L, et celles des expressions $k-1$, $k'-1, \ldots.$ qui répondent aux autres nombres $k, k', \ldots.$ Il résulte de là que l'expression $\Sigma\,\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{L}\right)$ s'évanouit toujours, à moins qu'on n'ait à la fois, $\theta = 1$, $\eta = 1$, $L = 1$, ce qu'il s'agissait de prouver.

§. 6.

En passant maintenant aux questions indiquées dans le préambule de ce mémoire, nous conserverons les notations dont nous avons fait usage dans les §§. 3., 4. et 5. Nous poserons donc

$$1. \quad D = PS^2, \quad \text{ou} \quad D = 2PS^2,$$

S^2 étant toujours le plus grand quarré qui divise D, et

$$2. \quad P = pp'p''\ldots.,$$

$p, p', p'', \ldots.$ étant des nombres premiers impairs, positifs ou négatifs, tous différents les uns des autres. Nous poserons aussi

$$3. \quad R = rr'r''\ldots.,$$

$r, r', r'', \ldots.$ désignant comme plus haut, les facteurs premiers impairs inégaux, contenus dans S, sans l'être dans P. Soit encore q un nombre premier positif impair quelconque, contenu ni dans P ni dans R, et décomposons chacun de ces produits d'une manière quelconque en deux facteurs, sans exclure le cas où l'un de ces facteurs serait égal à l'unité, c'est à dire, écrivons les deux équations

$$4. \quad P = P_1 P_2, \quad R = R_1 R_2.$$

Posons enfin

$$5. \quad \delta = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \theta = \pm 1, \quad \eta = \pm 1.$$

les signes étant quelconques et indépendants les uns des autres. Cela étant et s désignant une variable continue positive, assujétie à rester supérieure à l'unité, nous aurons par le développement en série, et en ayant égard aux équations (2.) et (3.) du §. 2.,

$$\frac{1}{1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}} = 1+\ldots+\theta^{\frac{q^l-1}{2}}\eta^{\frac{q^{2l}-1}{8}}\left(\frac{q^l}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{(q^l)^s}+\ldots,$$

où pour abréger, on n'a écrit dans le second membre que son terme général, dans lequel il faut égaler l successivement à toutes les valeurs entières depuis $l=0$ jusqu'à $l=\infty$.

Supposons maintenant que dans l'équation précédente, l'on mette pour q toutes les valeurs dont ce nombre est susceptible, c'est à dire tous les nombres premiers impairs positifs, qui ne divisent pas D, et que l'on forme le produit de toutes ces équations. Le produit des seconds membres formera une série dont la loi est très-facile à reconnaître, si l'on se rappelle que d'après un théorème connu, un nombre composé ne peut résulter que d'une seule manière, de la multiplication de facteurs simples, et que l'on continue en même temps à avoir égard aux théorèmes cités du §. 2. On obtient ainsi l'équation

$$6.\quad \Pi\frac{1}{1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma\,\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{2}}\left(\frac{n}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{n^s},$$

le signe de multiplication Π se rapportant à toutes les valeurs de q, précédemment définies, et le signe sommatoire s'étendant à tous les entiers, compris depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$, et qui remplissent la double condition d'être impairs et premiers à D, ou plus simplement, qui sont premiers à $2D$. Avant d'aller plus loin, nous aurions à montrer la nécessité de la supposition faite plus haut, et d'après laquelle on doit avoir $s>1$. On s'en rendra facilement compte, si l'on remarque que la série précédente n'a une somme indépendante de l'arrangement de ses termes, que lorsque la condition $s>1$ a lieu, et qu'il en est de même du produit, dont la valeur n'est également indépendant de l'ordre de ses facteurs qu'autant que la même condition est remplie. Il me semble d'autant plus inutile d'entrer dans de plus grands développements à ce sujet, que je me suis déjà expliqué avec détail sur le point en question, dans la démonstration du théorème sur la progression arithmétique, que j'ai citée plus haut et qui est fondée sur une équation de même nature, mais plus générale que la précédente.

Si dans l'équation précédente on remplace θ, η respectivement par $\delta\theta$, $\varepsilon\eta$, et que l'on change en même temps P_2 en P_1, elle deviendra

$$7.\quad \Pi \frac{1}{1-(\delta\theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma\, (\delta\theta)^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{n^s}.$$

On a encore, en y faisant $\theta=1$, $\eta=1$, $P_2=1$, $R_1=1$, et remplaçant s par $2s$,

$$8.\quad \Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}} = \Sigma \frac{1}{n^{2s}},$$

les signes de multiplication et de sommation s'étendant toujours aux valeurs de q et de n, précédemment définies. Le produit des équations (6.) et (7.) étant divisé par l'équation (8.), le facteur général dans le premier membre sera

$$\frac{\left(1+\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\frac{1}{q^s}\right)}{\left(1-(\delta\theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right)}.$$

Comme le numérateur de cette fraction est évidemment équivalent à

$$\left(1+\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}\right),$$

elle pourra se mettre sous cette forme plus simple

$$\frac{1+\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}{1-(\delta\theta)^{\frac{q-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}.$$

L'expression précédente présente deux cas différents, suivant que l'on a

$$\delta^{\frac{q-1}{2}}\varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_1 P_2}\right) = \delta^{\frac{q-1}{2}}\varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P}\right) = -1 \quad \text{ou} \quad +1.$$

Dans le premier de ces deux cas, elle est égale à l'unité et peut être omise dans le produit; dans le second, on peut lui donner cette autre forme

$$\frac{1+\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}{1-\theta^{\frac{q-1}{2}}\eta^{\frac{q^2-1}{8}}\left(\frac{q}{P_2 R_1}\right)\frac{1}{q^s}}.$$

Les doubles signes dans les valeurs $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, que contient l'équation (7.), ont été tout à fait arbitraires jusqu'à présent. Nous supposerons désormais que suivant les 4 cas que le déterminant D peut présenter, et que nous avons déjà distingués dans le §. 3. et 4., savoir:

$D = PS^2$, $P \equiv 1$ ou 3 (mod. 4); $D = 2PS^2$, $P \equiv 1$ ou 3 (mod. 4), ces signes seront respectivement

$$9. \quad \delta = 1,\ \varepsilon = 1;\ \delta = -1,\ \varepsilon = 1;\ \delta = 1,\ \varepsilon = -1;\ \delta = -1,\ \varepsilon = -1.$$

Cela étant, la condition $\delta^{\frac{q-1}{2}} \varepsilon^{\frac{q^2-1}{8}} \left(\frac{q}{P}\right) = 1$, coïncidera avec celle des 4 conditions (2.) du §. 4., qui correspond à chacun des 4 cas précédents. En désignant donc les nombres premiers q, positifs, impairs et non-diviseurs de D, qui y satisfont, par f, cette dernière lettre aura la même signification que dans le §. 4., c'est à dire que l'on aura

$$10. \quad \delta^{\frac{f-1}{2}} \varepsilon^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P}\right) = 1,$$

et le premier membre de l'équation dont l'origine a été indiquée plus haut, sera

$$\Pi \frac{1 + \theta^{\frac{f-1}{2}} \eta^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{f^s}}{1 - \theta^{\frac{f-1}{2}} \eta^{\frac{f^2-1}{8}} \left(\frac{f}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{f^s}},$$

le signe Π s'étendant à toutes les valeurs de f. Au moyen de l'équation

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \text{etc.}$$

et en ayant égard aux équation (2.) et (3.) du §. 2., le facteur général du produit précédent pourra se développer dans une série dont le $l+1^{\text{ième}}$ terme est

$$2\theta^{\frac{f^l-1}{2}} \eta^{\frac{f^{2l}-1}{8}} \left(\frac{f^l}{P_2 R_1}\right) \frac{1}{(f^l)^s}.$$

Le premier terme qui répond à $l = 0$, fait exception à cette loi et a l'unité pour valeur. Il est facile de conclure de là, et en ayant toujours égard aux équations citées du §. 2., que le produit précédent peut lui-même prendre la forme d'une série, ayant pour terme général

$$\theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right) \frac{2^\mu}{m^s},$$

où m désigne généralement tous les entiers positifs, impairs et premiers à D, qui n'ont que des diviseurs simples f tels que la condition (10.) soit satisfaite, et où μ indique comme dans le §. 4., le nombre des diviseurs simples inégaux de m, sans compter le diviseur 1. On peut remarquer que le terme qui répond à $m=1$, ne fait pas exception à la loi générale, l'expression précédente se réduisant à l'unité dans ce cas. Nous avons donc l'équation

$$11.\quad \Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\theta^{\frac{m-1}{2}}\eta^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P_2R_1}\right)\frac{2^\mu}{m^s}$$
$$=\Sigma(\delta\theta)^{\frac{n-1}{2}}(\varepsilon\eta)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_1R_1}\right)\frac{1}{n^s}.\Sigma\theta^{\frac{n-1}{2}}\eta^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P_2R_1}\right)\frac{1}{n^s},$$

dans laquelle on doit étendre les sommations à tous les entiers n ou m, précédemment définis, et l'on doit se rappeller que les valeurs $\delta=\pm1$, $\varepsilon=\pm1$, sont celles que nous avons fixées par les conditions (9.), tandis que les signes dans les équations $\theta=\pm1$, $\eta=\pm1$ restent arbitraires.

En faisant $\theta=1$, $\eta=1$, $P_2=1$, $R_1=1$, et par suite $P_1=P$, l'équation précédente, prendra la forme:

$$12.\quad \Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}=\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s}.$$

C'est cette équation particulière qui nous servira à déterminer le nombre des formes différentes qui répondent à un déterminant quelconque positif ou négatif. Il faudra dans cette recherche, traiter séparément le cas où D est positif et celui où D est négatif, et subdiviser encore chacun de ces deux cas suivant qu'il s'agira de formes proprement ou improprement primitives. Mais comme il y a néanmoins une partie commune à l'analyse de ces quatre cas, il conviendra, pour n'avoir pas à présenter deux fois les mêmes considérations, que nous nous occupions d'abord de cette partie de la discussion, dont l'objet consiste à voir quelle forme prend le second membre de l'équation (12.), si l'on y suppose $s=1+\varrho$, et que l'on considère la variable positive ϱ comme devenant moindre que toute quantité donnée. Pour commencer cet examen par le premier des deux facteurs contenus dans le second membre, soient $e, e', e'', \ldots$ ceux des nombres $1, 2, 3, \ldots 2D_1-1$, qui n'ont pas de diviseur commun avec $2D_1$. Cela posé, il est évident que la somme $\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}}$, où n ne doit recevoir que des valeurs positives et premières à $2D_1$, peut être décomposée en autant de sommes partielles de la forme

$$\frac{1}{e^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2D_1+e)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(4D_1+e)^{1+\varrho}}+\text{etc.}$$

qu'il y a de termes dans la suite $e, e', e'', \ldots$. Comme, d'un autre côté, on conclut facilement du résultat obtenu plus haut sur la série (1.) du §. 1., que chacune de ces sommes partielles prend la forme $\frac{1}{2D_1} \cdot \frac{1}{\varrho}$, et qu'il est d'ailleurs évident que le nombre de ces sommes partielles, ou ce qui revient au même, le nombre des termes $e, e', e'', \ldots$ est Δ ou 2Δ, selon que D est impair ou pair, la lettre Δ ayant la même signification que dans le §. 5., on aura selon ces deux cas

$$13. \quad \Sigma \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\Delta}{2D_1} \cdot \frac{1}{\varrho}, \quad \text{ou} \quad \Sigma \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\Delta}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho},$$

la variable ϱ étant toujours supposée infiniment petite. Si nous considérons en second lieu l'autre facteur du second membre, il est facile de voir que ce facteur est un cas particulier de la série à laquelle se rapporte le troisième des lemmes du §. 1.; il faudra, pour l'y comprendre, supposer dans la série générale de ce lemme, $c_n = \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right)$, ou $c_n = 0$, suivant que n est ou n'est pas premier à $2D_1$. Quant aux deux conditions que ce lemme suppose, et qui consistent 1°. en ce que c_n doit être une fonction périodique de l'indice n, et 2°. en ce que la somme des termes qui composent une période, doit être zéro, on s'assure facilement qu'elles sont remplies. Cela est évident pour la première, et pour voir que la seconde a également lieu, il suffira de recourir au lemme qui termine le §. 5., et de remarquer qu'on ne saurait avoir à la fois, $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $P = \pm 1$. En effet, il résulte des conditions (9.) que les équations précédentes ne sont compatibles entre elles, que lorsqu'on a $P = 1$; ces équations se rapportent alors au cas où le déterminant est un quarré positif, et que nous avons exclu. Il résulte de ce qui précède, que la somme $\Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$, lorsqu'on y considère la variable positive comme devenant infiniment petite, converge vers une limite finie donnée par l'expression

$$14. \quad \Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n},$$

dans laquelle il faut supposer que les valeurs de n se suivent dans l'ordre naturel, c'est à dire de manière à former une suite croissante.

I. Revenons maintenant à l'équation (12.), et considérons en premier lieu le cas où D est négatif de sorte que $D = -D_1$. Soient

15. $ax^2+2bxy+cy^2, \quad a'x^2+2b'xy+c'y^2, \quad \ldots,$

les formes différentes et proprement primitives de ce déterminant D, formes dont je désignerai le nombre par h. Cela étant, on aura l'égalité

$$16. \quad \Sigma \frac{2^{\mu+1}}{m^s} = \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots,$$

où le second membre contient autant de termes qu'il y a de formes (15.), et où la double sommation dans chaque terme doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs entières de x et de y, comprises entre $-\infty$ et ∞, qui remplissent la double condition de n'avoir pas de diviseur commun et de donner à la forme où elles sont substituées, une valeur première à $2D$. Cela résulte 1°. de ce que chacun des entiers m, contenus dans le premier membre, est en vertu du théorème I. du §. 4., susceptible d'être représenté de la manière indiquée et par l'ensemble des formes (15.), autant de fois qu'il y a d'unités dans l'expression $2^{\mu+1}$, et 2°. de ce que réciproquement toute valeur première à $2D$, que l'une quelconque des formes (15.), peut obtenir lorsqu'on y attribue à x et y des valeurs sans diviseur commun, coïncide d'après les résultats connus et que nous avons rappelés au commencement du §. cité, avec l'un des entiers désignés par m. Si maintenant l'on substitue l'expression de $\Sigma \frac{2^{\mu+1}}{m^s}$, donnée par l'équation précédente, dans l'équation (12.), il viendra

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma \frac{1}{n^{2s}} \cdot \Sigma \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots$$
$$= 2\Sigma \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Il est facile de voir que chacun des termes du premier membre peut être mis sous une forme plus simple. Le premier de ces termes est évidemment équivalent à l'expression

$$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s},$$

où les valeurs simultanées de x et de y, dans la sommation double, ne sont plus assujéties qu'à la condition unique de rendre le trinome où elles sont substituées, impair et premier à D. En attachant donc ce sens au signe Σ', on aura

$$17. \quad \Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots$$
$$= 2\Sigma \frac{1}{n^s} \cdot \Sigma\, \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Il faut maintenant poser $s = 1 + \varrho$, la variable positive ϱ étant toujours considérée somme infiniment petite, et voir ce que les différents termes du premier membre deviendront dans cette supposition. Puisque d'après les résultats que nous avons établis dans le §. 5., les valeurs simultanées que l'on doit attribuer à x et y, dans chacune de ces sommes doubles, dans la première par exemple, peuvent être distribuées en systèmes de la forme

$$18. \qquad x = 2D_1 v + \alpha, \qquad y = 2D_1 w + \gamma,$$

on voit que la somme en question peut être décomposée en autant de sommes partielles qu'il y a de ces systèmes, et telles que celle-ci

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}},$$

où il faut substituer pour x et y les expressions précédentes, et sommer ensuite relativement aux entiers v et w, depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour obtenir cette somme partielle, nous chercherons l'entier qui exprime combien de fois le trinome $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans cette somme, obtient une valeur qui ne surpasse pas la quantité positive quelconque σ. Or, cette dernière question est évidemment identique à celle de savoir combien dans l'intérieur ou sur le contour de l'ellipse, déterminée par l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma$, il y a de points dont les coordonnées x et y sont de la forme (18.), et si l'on observe que l'aire de cette ellipse est $\frac{\pi}{\sqrt{(ac - b^2)}}\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{D_1}}\sigma$, où la lettre π a la signification ordinaire, on conclura immédiatement du second lemme du §. 1.*) que le nombre qu'il s'agit de déterminer, peut être mis sous la forme

$$\frac{\pi}{4\sqrt{D_1^5}}\sigma + \sigma^\delta \psi(\sigma)$$

l'exposant constant δ ayant une valeur quelconque comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, et la fonction $\psi(\sigma)$ restant finie quelque grande que l'on suppose la variable σ. Il résulte de là et du premier théorème du §. déjà cité, que la somme partielle que nous considérons, a la valeur $\frac{\pi}{4\sqrt{D_1^5}} \cdot \frac{1}{\varrho}$, d'où l'on conclut, en considérant que d'après le §. 5., le nombre des systèmes (18.) et par suite celui des sommes partielles dans lesquelles la somme

---

*) Il est évident par la nature de ce lemme, que les points placés sur le contour de la courbe peuvent être considérés à volonté comme des points intérieurs ou comme des points extérieurs. On peut donc aussi et à plus forte raison, ranger ces points en partie parmi les points intérieurs et en partie parmi les points extérieurs, comme nous le ferons plus bas, lorsque nous nous occuperons des déterminants positifs.

$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}$ a été partagée, est $2D_1\Delta$ ou $4D_1\Delta$, selon que D est impair ou pair, que la somme précédente est suivant ces deux cas,

$$\frac{\pi\Delta}{2\sqrt{D_1^2}}\cdot\frac{1}{\varrho} \quad \text{ou} \quad \frac{\pi\Delta}{\sqrt{D_1^2}}\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Comme ce résultat ne contient rien qui soit particulier à la forme $ax^2+2bxy+cy^2$, et qu'il ne renferme que le déterminant commun à toutes les formes (15.), on voit que le premier membre de l'équation (17.), en supposant toujours ϱ infiniment petit et en distinguant le cas de D impair et celui de D pair, est

$$\frac{h\pi\Delta}{2\sqrt{D_1^2}}\cdot\frac{1}{\varrho} \quad \text{ou} \quad \frac{h\pi\Delta}{\sqrt{D_1^2}}\cdot\frac{1}{\varrho}.$$

Au moyen de ces expressions et des résultats (13.) et (14.), précédemment établis, l'équation (17.) se changera pour une valeur infiniment petite de ϱ, dans l'équation remarquable qui suit et où les cas de D pair et impair sont confondus dans la même forme,

$$19. \quad h = \frac{2}{\pi}\sqrt{D}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}.$$

Cette équation est sujette à une exception qui a lieu lorsque D est -1, et qui est une suite de l'exception que le théorème I. du §. 4., souffre dans le même cas. Pour rétablir l'exactitude dans ce cas singulier, il faut doubler le second membre, comme cela résulte de l'analyse précédente, et comme on peut aussi le vérifier *a posteriori*. En effet, on a dans ce cas $h=1$, $D_1=1$, $\delta=-1$, $\varepsilon=1$, $P=-1$; l'équation modifiée comme on vient de le dire, deviendra donc

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\text{etc.}\right),$$

ce qui est exact d'après la série connue de *Leibnitz*.

II. Le déterminant D étant toujours négatif et en outre tel que $D \equiv 1$ (mod. 4), nous supposerons que les formes (15.) sont celles de l'ordre improprement primitif. On aura dans cette supposition, $\delta=1$, $\varepsilon=1$, et l'égalité (16.) devra être remplacée par celle-ci

$$\Sigma\frac{2^{\mu+1}}{(2m)^s} = \Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y)^s} + \ldots,$$

où la double sommation s'étend dans chaque terme à toutes les valeurs simultanées de x et du y, qui n'ont pas de diviseur commun, et qui rendent la moitié de la forme qui entre dans ce terme, première à $2D$.

La substitution de l'expression précédente dans l'équation (12.) donne

$$\Sigma\frac{1}{n^{2s}}\cdot\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{n^{2s}}\cdot\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\dots$$
$$= 2^{1-s}\Sigma\frac{1}{n^s}\cdot\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s},$$

équation de laquelle on passe, comme dans le cas déjà examiné, à cette autre

$$20.\quad \Sigma'\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma'\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\dots$$
$$= 2^{1-s}\Sigma\frac{1}{n^s}\cdot\Sigma\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s},$$

le signe Σ' indiquant que dans la double sommation la moitié de la forme quadratique ne doit recevoir que des valeurs premières à $2D$. En supposant maintenant $s=1+\varrho$, ϱ étant toujours une variable infiniment petite et positive, on achevera la solution comme dans le cas déjà traité, si l'on se rappelle que d'après ce qui a été démontré dans le §. 5., le nombre des systèmes de la forme

$$x=2D_1v+\alpha,\quad y=2D_1w+\gamma,$$

qui rendent la moitié d'une forme improprement primitive du déterminant D, première à $2D$, est $D_1\Delta$ ou $3D_1\Delta$, suivant que l'on a $D\equiv 1$ ou $D\equiv 5$ (mod. 8). On trouve ainsi pour le nombre h des formes improprement primitives

$$21.\quad \begin{cases} h=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{D_1}\,\Sigma\left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D\equiv 1 \text{ (mod. 8)},\\ h=\dfrac{1}{3}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{D_1}\,\Sigma\left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D\equiv 5 \text{ (mod. 8)}. \end{cases}$$

On doit ajouter que la seconde de ces équations est en défaut lorsqu'on a $D=-3$, comme cela résulte de l'exception à laquelle le théorème I. du §. 4., est sujet dans le même cas, et que pour rétablir l'exactitude, le second membre doit être triplé.

III. Nous passons maintenant au cas des déterminants positifs, c'est à dire au cas où l'on a $D=D_1$, et nous supposerons d'abord que les formes différentes (15.) appartiennent à l'ordre proprement primitif, et remplissent chacune les conditions (7.) du §. 4. On a alors d'après le théorème III. du §. 4.

$$\Sigma\frac{2\mu}{m^s}=\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\dots,$$

où la double sommation dans chacun des termes du second membre doit s'étendre à tous les systèmes de valeurs simultanées de x et y, premières entre elles, qui donnent au trinome où elles sont substituées, une valeur première à $2D$ et satisfont en outre aux inégalités (8.) du §. cité, lorsqu'il s'agit du premier terme, et à des inégalités de forme analogue pour tous les autres termes.

Comme les nombres susceptibles d'être exprimés par une forme de déterminant positif, peuvent être positifs ou négatifs, il semble d'abord que l'on doive ajouter encore la condition que les indéterminées soient choisies de manière à donner à la forme quadratique une valeur positive; mais il est aisé de voir que cette condition est déjà implicitement contenue dans les précédentes. En effet, a, b, x et y étant positifs, la condition $x \geqq \frac{T-bU}{aU}y$ entrainera évidemment celle-ci

$$ax^2+2bxy+cy^2 \geqq \frac{y^2}{aU^2}(T^2-(b^2-ac)U^2) = \frac{y^2}{aU^2}.$$

L'expression précédente de $\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}$, étant substituée dans l'équation (12.), il viendra

$$\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s}+\dots$$
$$=\Sigma\frac{1}{n^s}.\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s}.$$

On voit sans peine que le produit $\Sigma\frac{1}{n^{2s}}.\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}$ peut être mis sous cette forme plus simple

$$\Sigma'\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s},$$

où la double sommation est supposée s'étendre à toutes les valeurs simultanées de x et y, qui rendent le trinome premier à $2D$, et en outre telles que l'on ait $x>0$, $y>0$, $y\leqq\frac{aU}{T-bU}x$. Il suffit pour cela de remarquer que les conditions (8.) du §. 4. conservent la même forme lorsqu'on y remplace x et y par nx et ny, n étant positif, et qui si l'on écrit ensuite x et y au lieu de nx et ny, les nouvelles indéterminées x et y ne seront plus assujéties à la condition d'être premières entre elles. En attachant donc au signe Σ', le sens que l'on vient de définir et en supposant, bien entendu, que s'il s'agit de la seconde forme, a, b dans la dernière des inégalités précédentes, doivent être remplacées par a', b', et ainsi de suite, on aura l'équation

$$22. \quad \Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma' \frac{1}{(a'x^2+2b'xy+c'y^2)^s} + \ldots$$
$$= \Sigma \frac{1}{n^s} . \Sigma \delta^{\frac{n-1}{2}} \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Il s'agira maintenant de voir ce que les différents termes de cette équation deviendront, lorsqu'après avoir posé $s = 1+\varrho$, la variable positive ϱ devient moindre que toute grandeur donnée. A cet effet, nous décomposerons chacun des termes du premier membre, le premier

$$\Sigma' \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

par exemple, en autant de sommes partielles qu'il y a de systèmes de la forme $x = 2Dv+\alpha$, $y = 2Dw+\gamma$, qui rendent le trinome $ax^2+2bxy+cy^2$ premier à $2D$. Soit

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}; \quad x > 0, \quad y > 0, \quad y \leqq \frac{aU}{T-bU} x,$$
$$x = 2Dv+\alpha, \quad y = 2Dw+\gamma,$$

l'une de ces sommes partielles, dans laquelle la sommation double relative à v et w, doit s'étendre à toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour obtenir l'expression de cette somme, nous désignerons par σ une variable positive quelconque, et nous chercherons le nombre qui exprime combien de fois le trinome $ax^2+2bxy+cy^2$ dans la double sommation obtient une valeur non-supérieure à σ. Or, d'après la construction géométrique indiquée dans le §. 4., la recherche dont il s'agit, revient évidemment à la question de savoir combien dans l'intérieur ou sur le contour du secteur hyperbolique, terminée d'une part par les droites, exprimées par les équations $y = 0$, $y = \frac{aU}{T-bU} x$, et de l'autre par l'arc de la première branche de l'hyperbole ayant pour équation $ax^2+2bxy+cy^2 = \sigma$, il y a de points dont les coordonnées x et y sont de la forme $x = 2Dv+\alpha$, $y = 2Dw+\gamma$; à quoi il faut ajouter, pour être tout à fait exact, quoique cela n'influe en rien sur le résultat définitif, que l'on doit faire abstraction de ceux des points en question, qui pourraient se trouver sur la partie du contour, formée par l'axe de x. Si l'on a recours aux coordonnées polaires ν et φ, liées aux coordonnées rectangulaires x et y, par les équations $x = \nu\cos\varphi$, $y = \nu\sin\varphi$, l'aire du secteur sera

$$\tfrac{1}{2}\int \nu^2 \partial\varphi = \tfrac{1}{2}\sigma \int \frac{\partial\varphi}{a\cos^2\varphi+2b\cos\varphi\sin\varphi+c\sin^2\varphi},$$

les limites de l'intégrale étant zéro et l'angle aigu, dont la tangente trigonométrique est $\frac{aU}{T-bU}$. L'intégration étant effectuée par les méthodes connues, on trouvera pour l'aire dont il s'agit, cette expression très-simple $\frac{\sigma}{2\sqrt{D}}\log(T+U\sqrt{D})$. Au moyen de ce résultat et du second lemme du §. 1., on conclura que le nombre que nous nous étions proposé de déterminer, peut être mis sous la forme

$$\frac{\sigma}{8\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})+\sigma^\delta\psi(\sigma),$$

l'exposant constant δ étant compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, et la fonction $\psi(\sigma)$ restant finie, quelque grande que l'on suppose la variable σ. Il suit de là et du premier des théorèmes du §. 1., que la somme partielle que nous considérons, est

$$\frac{1}{8\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},$$

et comme d'après les résultats du §. 5., le nombre des sommes partielles contenues dans la même somme totale, est $4D\Delta$ ou $2D\Delta$, suivant que D est pair ou impair, on conclura que chacun des termes du premier membre de l'équation (22.) est selon ces deux cas, et pour une valeur infiniment petite de ϱ,

$$\frac{\Delta}{2\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},\quad \text{ou}\quad \frac{\Delta}{4\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho}.$$

Si donc nous désignons par h, le nombre des formes différentes du déterminant D, le premier membre sera

$$\frac{h\Delta}{2\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},\quad \text{ou}\quad \frac{h\Delta}{4\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})\frac{1}{\varrho},$$

selon que D est pair ou impair.

Comme d'un autre côté et en vertu des résultats (13.) et (14.), le second membre est respectivement dans ces deux cas,

$$\frac{\Delta}{D}\cdot\frac{1}{\varrho}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n}\quad \text{ou}\quad \frac{\Delta}{2D}\cdot\frac{1}{\varrho}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

on conclura, en effaçant le facteur $\frac{1}{\varrho}$, commun aux deux membres,

$$23.\qquad h=\frac{2\sqrt{D}}{\log(T+U\sqrt{D})}\,\Sigma\,\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n},$$

équation qui convient à un déterminant positif (non-quarré) quelconque, pair ou impair, et dans laquelle T et U sont les plus petits entiers positifs, autres que 1 et 0, qui satisfont à l'équation $t^2-Du^2=1$.

IV. Le cas où le déterminant positif D est de la forme $4\nu+1$, et où les formes de ce déterminant, dont il s'agit de déterminer le nombre h, sont celles de l'ordre improprement primitif, étant entièrement semblable à celui que nous venons de traiter en détail, nous nous contenterons de rapporter le résultat qui répond à ce cas, et qui est conteuu dans les équations qui suivent

$$24.\quad \begin{cases} h = \dfrac{2\sqrt{D}}{\log\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})}\,\Sigma\left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D\equiv 1\ (\text{mod. }8),\\[2ex] h = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{2\sqrt{D}}{\log\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})}\,\Sigma\left(\dfrac{n}{P}\right)\dfrac{1}{n}, & D\equiv 5\ (\text{mod. }8),\end{cases}$$

et dans lesquelles T et U désignent les moindres entiers positifs, autres que 2 et 0, qui satisfont à l'équation $t^2-Du^2=4$.

V. Nous nous occuperons maintenant de la recherche déjà indiquée dans le §. 3., en prouvant que les genres énumérés d'après les préceptes connus et que nous avons rappelés dans le §. cité, existent tous réellement et contiennent chacun le même nombre de formes. Soient à cet effet

$$25.\qquad \Phi,\ \Phi',\ \Phi'',\ \ldots\ \mid\ \Psi,\ \Psi',\ \Psi'',\ \ldots,$$

les expressions qui servent à faire cette énumération pour un déterminant quelconque, soit qu'il s'agisse des formes proprement primitives, soit qu'il s'agisse de celles qui composent l'ordre improprement primitif, lorsque ce dernier ordre existe pour le déterminant donné. Les déterminants quarrés étant exclus, la première partie de la ligne précédente contiendra au moins un terme, et il résulte de l'inspection des deux tableaux donnés dans le §. 3., que les expressions Φ, Φ', Φ'', ... qui forment cette première partie, sont toujours telles qu'on ait

$$26.\qquad \Phi\Phi'\Phi''\ldots = \delta^{\frac{m-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{P}\right).$$

Nous désignerons généralement par χ l'une quelconque des expressions (25.), ou l'un quelconque des produits que l'on peut former avec ces expressions, en les combinant 2 à 2, 3 à 3, et ainsi de suite, ou enfin le produit de toutes, en n'excluant que le seul produit (26.), ou autrement dit, nous désignerons par χ l'un quelconque des termes de l'expression développée

$$27.\quad [(1+\Phi)(1+\Phi')(1+\Phi'')\ldots][(1+\Psi)(1+\Psi')(1+\Psi'')\ldots]-1-\Phi\Phi'\Phi''\ldots$$

Si nous conservons à la lettre λ la même signification que nous lui avons donnée dans le §. 3., le nombre des expressions χ sera $2^{\lambda}-2$. Cela supposé, nous allons faire voir que si l'on partage le nombre total h des formes qui répondent au déterminant donné, en deux groupes comprenant respectivement H et H' formes, en rangeant dans le premier groupe, toutes celles qui satisfont à la condition $\chi = 1$, et dans le second, celles qui remplissent la condition opposée $\chi = -1$, on aura toujours $H - H' = 0$. Pour prouver ce dont il s'agit, il suffira d'appliquer l'analyse dont nous avons fait usage, en partant de l'équation (12.), à l'équation plus générale (11.), après avoir attribué dans cette dernière à θ, η, P_2 et R_1, des valeurs qui font coïncider l'expression $\theta^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P_2 R_1}\right)$ avec celle-ci χ. Il est facile de voir qu'en remplissant cette condition, il ne peut arriver qu'on ait à la fois, soit $\theta = 1$, $\eta = 1$, $P_2 R_1 = \pm 1$, soit $\delta\theta = 1$, $\varepsilon\eta = 1$, $P_1 R_1 = \pm 1$. L'impossibilité du premier système de valeurs simultanées résulte de ce que χ contient au moins un facteur de l'une de formes $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$, $\left(\frac{m}{p}\right)$, $\left(\frac{m}{r}\right)$; et pour que le second pût avoir lieu, il faudrait que l'on eût $\theta = \delta$, $\eta = \varepsilon$, $P_2 R_1 = \pm P$, ce qui donnerait à χ la forme $\delta^{\frac{m-1}{2}} \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \left(\frac{m}{P}\right) = \varphi\varphi'\varphi''\ldots$, que nous avons exclue plus haut. Il résulte de là que chacun des deux facteurs du second membre de l'équation (11.) est de même nature que le second facteur du second membre de l'équation (12.), et que par conséquent ces deux facteurs convergent l'un et l'autre vers une limite finie de la forme (14.), lorsque la variable ϱ devient infiniment petite. Pour discuter le premier membre de l'équation (11.) dans la même circonstance, il faudra substituer à l'égalité (16.), lorsqu'il s'agit d'un déterminant négatif et de l'ordre proprement primitif, celle-ci

$$\Sigma \chi \frac{2^{\mu+1}}{m^s} = \pm \Sigma \frac{1}{(a x^2 + 2 b x y + c y^2)^s} \pm \Sigma \frac{1}{(a' x^2 + 2 b' x y + c' y^2)^s} \pm \ldots,$$

où l'on doit choisir le signe supérieur ou le signe inférieur dans chacun des termes du second membre, suivant que la forme que ce terme contient, satisfait à la condition $\chi = 1$, ou à celle-ci $\chi = -1$, et il faudra faire une substitution analogue dans les trois autres cas. Cela posé, on voit sans peine et sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans aucun détail à cet égard, que le premier membre de l'équation (11.), en y supposant toujours la variable ϱ infiniment petite, sera, abstraction faite d'un facteur purement numérique, et qui varie suivant les 4 cas, le produit de $(H - H')\frac{1}{\varrho}$

et d'une expression telle que $\frac{\Delta}{\sqrt{D_1^3}}\pi$, $\frac{\Delta}{\sqrt{D^3}}\log(T+U\sqrt{D})$ ou $\frac{\Delta}{\sqrt{D^3}}\log\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})$. Or, cette dernière expression étant manifestement différente de zéro, il faut pour que le premier membre reste fini comme le second, qu'on ait $H-H'=0$, ce qu'il s'agissait de faire voir.

Au moyen de ce résultat, il nous sera facile de prouver que les formes sont également réparties entre les genres énumeres d'après les préceptes du §. 3. Soit pour abréger $2^{\lambda-1}=\varkappa$, et désignons par h_1, h_2, h_3, ... $h_\varkappa$, les nombres des formes contenues dans les différents genres, rangés dans un ordre quelconque, les termes de la suite précédente qui répondraient à des genres non-existants étant supposés égaux à zéro. Si maintenant l'on remarque que les formes qui composent un même genre, satisfont ou tous à la condition $\chi=1$, ou tous à la condition opposée $\chi=-1$, il est évident que toute équation de la forme $H-H'=0$, peut s'écrire comme il suit

$$28. \quad h_1\pm h_2\pm h_3\pm\ldots\pm h_\varkappa=0,$$

où nous avons donné le signe $+$ au premier terme, et où le signe de tout autre terme est $+$ ou $-$, selon que le genre auquel ce terme correspond, satisfait à la même condition $\chi=\pm1$, que celui auquel se rapporte h_1, ou à la condition opposée. Il s'agira maintenant d'examiner combien de fois dans l'ensemble des équations analogues à la précédente et dont le nombre est $2^\lambda-2$, comme celui des expressions χ, un terme quelconque h_ω, autre que le premier, a le signe $+$ ou le signe $-$...., ou autrement dit, combien de fois ce terme a un signe égal ou opposé à celui du premier terme. Soit à cet effet

$$\Phi=\alpha,\ \Phi'=\alpha',\ \Phi''=\alpha'',\ \ldots\ \ \Big|\ \ \Psi=\beta,\ \Psi'=\beta',\ \Psi''=\beta'',\ \ldots$$

le caractère complet du genre pour lequel h_1 désigne le nombre des formes, α, α', α'',....; β, β', β'', ... étant des valeurs déterminées de la forme ±1, dont les premières satisfont à la condition $\alpha\alpha'\alpha''\ldots=1$. Soit de même

$$\Phi=\mathrm{a},\ \Phi'=\mathrm{a}',\ \Phi''=\mathrm{a}'',\ \ldots\ \ \Big|\ \ \Psi=\mathrm{b},\ \Psi'=\mathrm{b}',\ \Psi''=\mathrm{b}'',\ \ldots$$

le caractère complet du genre auquel se rapporte h_ω. Cela posé, il suffit de se reporter à l'expression (27.) dont le développement donne toutes les expressions χ, pour voir que l'excès du nombre des cas où h_1 et h_ω ont le même signe, sur celui où ils sont précédes de signes opposés, sera donné par l'expression qui suit

$$[(1+\alpha a)(1+\alpha' a')\ldots.][(1+\beta b)(1+\beta' b')\ldots.]-\alpha a\,\beta b\ldots.-1.$$

Or les deux caractères complets étant différents, on ne saurait avoir à la fois $\alpha a=1$, $\alpha' a'=1, \ldots.$; $\beta b=1$, $\beta' b'=1, \ldots.$; la première partie de l'expression précédente a donc la valeur zéro, et comme l'on évidemment $\alpha a.\beta b\ldots.=1$, l'excès dont il s'agit a la valeur -2. Il suit de là que si l'on ajoute toutes les équations de la forme (28.), dont le nombre est $2^\lambda-2$, et l'équation évidente

$$2h_1+2h_2+2h_3+\ldots.+2h_x=2h,$$

il en résultera celle-ci $2^\lambda h_1=2h$, et par suite $h_1=\frac{h}{2^{\lambda-1}}$, ce qui prouve que la totalité des formes se partage également entre les différents genres, le genre auquel se rapporte le nombre h_1, ayant été arbitrairement choisi.

On a ainsi une démonstration nouvelle et très-simple de l'un des principaux théorèmes de la théorie des formes quadratiques et qui n'avait été établi jusqu'à présent que par le concours d'un grand nombre de considérations diverses. Voyez l'ouvrage de Mr. *Gaufs,* art. 252, 261 et 287, III.

Il nous resterait maintenant a développer les théorèmes que contiennent les équations établies ~~dont~~ aux les 4 numéros précédents de ce §., et qui sont de deux espèces, les uns résultant des expressions de h telles que nous les avons obtenues dans ce qui précède, les autres exigeant au contraire que l'on effectue préalablement les sommations indiquées dans ces expressions, pour que le nombre h se présente sous une forme purement arithmétique. Comme les résultats dont il s'agit, sont très nombreux et pour la plupart entièrement nouveaux, il sera convenable de les présenter avec quelque étendue. Par cette raison j'en remettrai l'exposition à la continuation de ces recherches, et je terminerai cette première partie, en remplissant l'engagement que j'ai pris dans le mémoire déjà cité sur la progression arithmétique. D'après le §. 11. de ce mémoire, il reste à prouver que la somme

$$\Sigma(\pm 1)^\alpha(\pm 1)^\beta(\pm 1)^\gamma(\pm 1)^{\gamma'}\ldots.\ \frac{1}{n}$$

dans laquelle les signes supérieurs n'ont pas simultanément lieu, a une valeur différente de zéro.

Partageons les nombres premiers positifs p, p', p'', ... auxquels se rapportent les valeurs ambiguës de la forme ± 1, à partir de la troisième, en deux groupes, en comprenant dans le premier groupe tous ceux de ces nombres premiers, auxquels le signe inférieur correspond. En continuant à représenter par $p, p', p'', \ldots.$ les nombres du premier groupe, soit $\pm pp'p''\ldots. = P$, le double signe restant à fixer; soient encore $r, r', r'', \ldots,$ ceux du second groupe et posons $rr'r''\ldots. = R$. Cela posé, il résulte de la signification des lettres $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots,$ expliquée dans le §. 7. du mémoire cité, que la somme précédente peut être mise sous la forme

$$\Sigma(\pm 1)^{\frac{n-1}{2}}(\pm 1)^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{P}\right).$$

Si maintenant l'on suppose le signe arbitraire dans l'équation $P = \pm pp'p''\ldots.$ tellement choisi que le nombre P soit de la forme $4\mu+1$ ou de la forme $4\mu+3$, suivant que le signe donné dans l'expression $(\pm 1)^{\frac{n-1}{2}}$ est le signe supérieur ou inférieur, il est évident que la somme précédente coïncidera avec celle que contient l'expression obtenue plus haut pour le nombre h des formes qui répondent au déterminant D, en supposant ce déterminant égal à PR^2 ou à $2PR^2$, suivant que le signe donné dans l'expression $(\pm 1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ est le signe supérieur ou le signe inférieur. On conclut de là que la somme que nous avions à considérer, est en effet toujours différente de zéro, puisque, s'il en était autrement, le nombre h se reduirait lui-même à zéro, ce qui est impossible, comme on le voit par la forme $x^2 - Dy^2$, qui a lieu quel que soit le déterminant D.

Berlin ce 4. juillet 1839.

Fautes à corriger dans ce mémoire.

Page 332, ligne 20 au lieu de $\left(\frac{p}{q}\right) =$, lisez $\left(\frac{q}{p}\right) =$

Page 346, ligne 5 d'en bas, au lieu de $y \leqq \frac{aU}{T-bU}$, lisez $y \leqq \frac{aU}{T-bU}x$.