RECHERCHES

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION Γ,

ET

SUR CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES QUI EN DÉPENDENT;

PAR

PH. GILBERT,

ASSOCIÉ DE L'ACADÉMIE.

(Présenté à la classe des sciences de l'Académie le 5 avril 1873.)

RECHERCHES

SUR

LE DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION Γ,

ET

SUR CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES QUI EN DÉPENDENT.

Le présent mémoire a pour objet certaines transformations de la fonction $\log \Gamma(\mu)$, ou d'une autre fonction que les géomètres ont introduite dans l'étude de la première, et que la plupart d'entre eux désignent par $\varpi(\mu)$. Le caractère principal de ces transformations est l'introduction, dans les intégrales définies que comporte cette théorie, des fonctions trigonométriques, au lieu des exponentielles qui y figurent habituellement.

Ce changement de forme présente de nombreux avantages. Ainsi, une première transformation de cette espèce, appliquée aux intégrales que Cauchy a rencontrées dans le développement de la fonction $\varpi(\mu)$, nous a conduit très-simplement aux séries les plus remarquables obtenues par les géomètres, et à plusieurs autres nouvelles. Non-seulement la série de Gudermann, les deux séries de Binet avec l'expression du reste, d'autres plus générales, ressortent naturellement de la formule obtenue, mais la série de Stirling avec de nouvelles formes pour le reste, et l'élégante série périodique de M. Kummer. Ainsi se trouvent rattachées à un principe unique des séries obtenues généralement par des procédés fort différents.

Une autre expression de l'intégrale définie qui représente la fonction $\varpi(\mu)$ a été obtenue par le théorème de Cauchy sur les intégrales étendues à un contour fermé. Cette transformation nous a conduit aux valeurs d'un certain nombre d'intégrales définies, la plupart nouvelles, et dont quelques-unes nous paraissent intéressantes.

En outre, cette seconde expression nous a permis de mettre sous une forme nouvelle l'intégrale qui représente la fonction $\log \Gamma(\mu)$ elle-même. Par là, non-seulement on rattache à cette transcendante des intégrales définies qui, au premier abord, en paraissent assez indépendantes; mais, ainsi modifiée, l'expression de $\log \Gamma(\mu)$ se prête, mieux peut-être que toute autre, à la démonstration des propriétés essentielles de l'intégrale eulérienne $\Gamma(\mu)$.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

SUR LA SÉRIE DE GUDERMANN.

1. Depuis que Binet (*) et Cauchy (**) ont mis le logarithme de la fonction $\Gamma(\mu)$ sous la forme suivante :

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu - \mu + \varpi(\mu),$$

dans laquelle l. désigne le logarithme népérien, et $\varpi(\mu)$ l'intégrale définie

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx,$$

la fonction $\varpi(\mu)$ a été développée de bien des manières en séries convergentes. Parmi les formules obtenues par les géomètres, l'une des plus célèbres est celle de Gudermann (***). Je me propose de montrer ici que la

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 27me cah., p. 243.

(**) *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, t. II, p. 386.

(***) *Journal de Crelle*, t. XXIX, p. 209.

propriété de la fonction $\varpi(\mu)$ de s'évanouir pour $\mu=\infty$, propriété qui se voit à la simple inspection de l'équation (2), étant combinée avec la relation fondamentale

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu),$$

suffit pour conduire très-simplement à la série de Gudermann avec l'expression du reste complémentaire.

On tire, en effet, de la relation précédente

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu+1)=\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)+\mathrm{l}.\,\mu,$$

et, en remplaçant $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu+1)$, $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$ par leurs valeurs déduites de la formule (1),

$$\varpi(\mu)-\varpi(\mu+1)=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right)-1.$$

Changeons μ en $\mu+k$, k désignant un nombre entier quelconque ; il vient

$$\varpi(\mu+k)-\varpi(\mu+k+1)=\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right)-1,$$

puis, si nous faisons successivement $k=0, 1, 2, \ldots, n$ et ajoutons membre à membre,

$$\varpi(\mu)=\sum_{k=0}^{k=n}\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right)-1\right]+\varpi(\mu+n+1).$$

Lorsque n croît indéfiniment, $\varpi(\mu+n+1)$ a pour limite zéro, d'après l'observation faite ci-dessus ; *donc la série est convergente* et l'on a

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \varpi(\mu)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right)-1\right],$$

ce qui est la formule de Gudermann (*).

Il suit de la démonstration précédente que le *reste*, après le n^{me} terme, est

$$\varpi(\mu+n)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-(\mu+n)x}}{x}\,dx.$$

(*) On peut consulter, sur la série de Gudermann, deux notes de MM. Serret et O. Bonnet, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. L, pp. 662 et 862.

2. La série de Gudermann conduit à une expression de la fonction $\Gamma(\mu)$ sous forme d'un produit infini, expression de laquelle il est facile de tirer celle que Gauss avait adoptée comme définition de cette fonction.

On reconnaît d'abord sans peine que

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)[\mathrm{l}.(\mu+k+1)-\mathrm{l}.(\mu+k)]=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)[\mathrm{l}.(\mu+n+1)-\mathrm{l}.\mu]$$
$$+n\,\mathrm{l}.(\mu+n+1)-\sum_{k=1}^{k=n}\mathrm{l}.(\mu+k),$$

d'où

$$\varpi(\mu)=-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\mu+lim.\left[\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.(\mu+n+1)-(n+1)-\sum_{k=1}^{k=n}\mathrm{l}.(\mu+k)\right],$$

la limite se rapportant à n indéfiniment croissant.

Mais comme l'on a

$$\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.(\mu+n+1)=\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.n+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right)+n\,\mathrm{l}.\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right),$$

et que, dans le second membre de cette équation, le deuxième terme et le troisième ont respectivement pour limites zéro et $\mu+1$, la valeur de $\varpi(\mu)$ se transforme comme il suit :

$$\varpi(\mu)=-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\mu+\mu+lim.\left[\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.n-n-\sum_{k=1}^{k=n}\mathrm{l}.(\mu+k)\right],$$

et la formule (1) devient

$$\mathrm{l}.\Gamma(\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{l}.2\pi-\mathrm{l}.\mu+lim.\,\mathrm{l}.\left[\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots.(\mu+n)}\right].$$

Passant des logarithmes aux nombres, on a enfin

$$(4)\quad\ldots\ldots\quad\Gamma(\mu)=\sqrt{2\pi}\,lim.\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\mu(\mu+1)\ldots..(\mu+n)},\quad(lim.n=\infty).$$

3. L'équation (4) est bien facile à établir, la formule de Stirling étant admise. En effet, d'après une relation connue qui se déduit immédiatement de la relation (α), on a, pour un entier n aussi grand qu'on le veut,

$$\Gamma(\mu) = \frac{\Gamma(\mu + n + 1)}{\mu(\mu + 1) \dots (\mu + n)}.$$

La formule de Stirling donne d'ailleurs

$$\Gamma(\mu + n + 1) = \sqrt{2\pi}(\mu + n + 1)^{\mu+n+\frac{1}{2}} e^{-(\mu+n+1)}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers zéro quand n devient infini; d'où encore, à cause de

$$(\mu + n + 1)^{\mu+n+\frac{1}{2}} = n^{\mu+n+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\mu + 1}{n}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\mu + 1}{n}\right)^{n},$$

et des égalités

$$\lim \left(1 + \frac{\mu + 1}{n}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} = 1, \quad \lim \left(1 + \frac{\mu + 1}{n}\right)^{n} = e^{\mu+1}, \quad \text{pour } n = \infty,$$

on a

$$\Gamma(\mu + n + 1) = \sqrt{2\pi} n^{\mu+n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon'),$$

ε' convergeant vers zéro. La valeur de $\Gamma(\mu)$ peut donc s'écrire, si l'on fait croître n indéfiniment,

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{2\pi} \lim \frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}} e^{-n}}{\mu(\mu + 1) \dots (\mu + n)},$$

ce qui nous ramène à la formule (4).

4. La formule de Stirling donne encore, ε'' étant infiniment petit,

$$1 . 2 . 3 \dots n = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \varepsilon''),$$

d'où la relation (4) prend la forme

$$\Gamma(\mu) = \lim \frac{1 . 2 . 3 \dots n}{\mu(\mu + 1) \dots (\mu + n)} n^{\mu}, \quad (\lim n = \infty),$$

et nous retrouvons ici l'expression de $\Gamma(\mu)$ sous forme de produit infini dont Gauss a fait un usage si remarquable.

Je ne pense pas que ces relations si simples, entre l'équation $\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu)$, la série de Gudermann, la formule de Stirling et celle de Gauss, aient été signalées jusqu'ici, non plus que la remarque suivante :

D'après l'équation (4), on a, pour de très-grandes valeurs de n, quel que soit μ,

$$\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n)=\sqrt{2\pi}\,\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\Gamma(\mu)}.$$

Cette relation, plus générale que celle de Stirling, permettra donc d'évaluer par approximation le produit $\mu(\mu+1)\ldots.(\mu+n)$, au moyen de la transcendante $\Gamma(\mu)$, dont on a des tables. Ainsi, pour $\mu=\frac{1}{2}$, on aura $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, et l'égalité précédente nous donnera, réductions faites,

$$1.3.5\ldots(2n+1)=\sqrt{2}\,(2n)^{n+1}e^{-n},$$

n étant un nombre entier très-grand.

---

§ II.

SUR LA CONSTANTE D'EULER.

5. Des formules

$$\Gamma(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx,\qquad \Gamma'(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,\mathrm{l}.\,xdx,$$

on déduit, en posant $\mu=1$,

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\left[\frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu}\right]_{\mu=1}=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{l}.\,xdx;$$

ou, C désignant la constante d'Euler,

$$-\mathrm{C}=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{l}.\,xdx.$$

Mais on a

$$\int e^{-x}\,\mathrm{l}.\,x dx = -e^{-x}\,\mathrm{l}.\,x + \int \frac{e^{-x}dx}{x},$$

et par suite, ε désignant toujours une quantité positive et infiniment petite,

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{l}.\,x dx = e^{-\varepsilon}\,\mathrm{l}.\,\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x}.$$

Comme d'ailleurs $(e^{-\varepsilon} - 1)\,\mathrm{l}.\,\varepsilon$ a pour limite zéro, on peut remplacer $e^{-\varepsilon}\,\mathrm{l}.\,\varepsilon$ par $\mathrm{l}.\,\varepsilon$, et écrire

(1) . . . . . . $$-\mathrm{C} = lim.\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x} + \mathrm{l}.\,\varepsilon\right), \quad (lim.\,\varepsilon = 0).$$

Cette formule, qui justifie celle que Bidone a donnée dans les *Mémoires de Turin* pour 1812, se tire aussi très-facilement de l'expression de $\frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu}$ trouvée par Dirichlet.

Si, a étant une constante positive, l'on remplace dans l'équation (1) ε par $a\varepsilon$, et si l'on observe que

$$\int_{a\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ax}dx}{x},$$

on aura cette autre égalité :

$$-\mathrm{C} = lim.\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-ax}}{x}dx + \mathrm{l}.\,a\varepsilon\right).$$

Enfin, l'on peut encore combiner avec cette équation la suivante, qui est connue (*) :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax} - \cos ax}{x}dx = 0,$$

et l'on aura la formule souvent utile

(2) . . . . $$-\mathrm{C} = lim.\left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos ax}{x}dx + \mathrm{l}.\,a\varepsilon\right).$$

(*) On y parvient très-simplement en intégrant la fonction $\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{z}dz$ le long d'un contour fermé composé 1° de l'axe des x positifs; 2° d'un quart de circonférence de rayon indéfiniment croissant; 3° de l'axe des y positifs; 4° d'un quart de circonférence de rayon infiniment petit autour de l'origine.

D'où

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos ax}{x}\, dx = -(\mathrm{C} + \mathrm{l}.\, a\varepsilon),$$

en négligeant une quantité qui tend vers zéro en même temps que ε.

L'équation (3) revient aussi à une formule de Bidone.

---

§ III.

TRANSFORMATION ET DÉVELOPPEMENT DE $\varpi(\mu)$.

6. Cauchy a fait voir qu'en remplaçant, dans l'équation (2) du § I[er], la fonction

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

par son développement en série convergente, savoir

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{4n^2\pi^2 + x^2},$$

on obtient la série convergente

$$(1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \varpi(\mu) = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\, dx}{4n^2\pi^2 + x^2} \text{ (*)}.$$

D'autre part, de l'égalité

$$\int_0^{\infty} e^{-xz} \sin az dz = \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad (x > 0),$$

(*) Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. II, p. 393. — Voy. Limbourg, *Théorie de la fonction Gamma*, p. 46.

on déduit sans peine celle-ci :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\mu x}\,dx \int_0^\infty e^{-xz}\sin az\,dz = \frac{1}{a}\int_0^\infty \sin az\,dz \int_0^\infty e^{(\mu+z)x}\,dx,$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\sin az\,dz}{\mu+z} \text{ (*)}.$$

Si donc nous remplaçons a par $2n\pi$, et si nous substituons dans l'expression de $\varpi(\mu)$, celle-ci deviendra

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu+z}\,dz.$$

C'est de cette forme nouvelle, donnée à la transcendante $\varpi(\mu)$, que nous allons maintenant déduire diverses conséquences remarquables.

7. Observons d'abord que l'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dz}{\mu+z}\left(\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{n}\right).$$

Or, la série qui figure sous le signe $\int$ est facile à sommer. On sait, en effet, que pour toute valeur de u comprise entre zéro et 2π, l'on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2},$$

(*) Voy. Meyer, *Intégrales définies*, p. 365. Cette formule, à laquelle M. Schlömilch est parvenu un peu moins simplement (*Analytische Studien*, t. II, p. 146), s'obtient encore comme il suit : Si, dans la dernière équation de la page 45 de mon *Mémoire sur la diffraction*, on pose $\lambda=1$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\cos a\alpha + \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{a^2-y^2}\,dy.$$

Mais on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{a^2-y^2}\,dy = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{a+y}\,dy + \frac{1}{a}\int_0^\infty y\,\frac{\sin \alpha y}{a^2-y^2}\,dy,$$

et, en remplaçant cette dernière intégrale par sa valeur connue $-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha$, on retombera sur la formule du texte.

et comme le premier membre est une fonction périodique de u, à période 2π, on aura, pour toute valeur de u comprise entre $2k\pi$ et $2(k+1)\pi$, k désignant un nombre entier quelconque,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nu}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{u-2k\pi}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi - \frac{u}{2}.$$

Donc aussi, pour toute valeur de z comprise entre k et $k+1$,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi z}{n} = \frac{\pi}{2}(2k+1-2z).$$

Décomposons l'intégrale ci-dessus en une infinité d'autres, ayant respectivement pour limites 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3, etc., puisque l'on a

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \ldots,$$

et remplaçons, dans chacune de ces intégrales, la fonction $\Sigma \frac{\sin 2n\pi z}{n}$ par la valeur correspondante fournie par l'équation (3). Nous aurons évidemment

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-2z)}{\mu+z}dz + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(3-2z)}{\mu+z}dz + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(5-2z)\,dz}{\mu+z} + \ldots,$$

ou bien

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_k^{k+1} \frac{(2k+1-2z)\,dz}{\mu+z},$$

ou enfin, en remplaçant z par $k+x$ sous le signe d'intégration, afin d'avoir pour limites zéro et l'unité,

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x}.$$

La transformation précédente présente ceci de remarquable, que la fonction $\varpi(\mu)$, qui, dans les équations (1) et (2), était exprimée par une série composée d'intégrales transcendantes, se trouve, dans l'équation (4), représentée par une série composée d'intégrales définies à différentielles rationnelles. La convergence de cette série résulte de la démonstration même.

8. La formule (4) donne immédiatement la série de Gudermann. En effet,

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\mu+k+x}\,dx = \left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \frac{dx}{\mu+k+x} - \int_0^1 dx = \left(\mu+k+\frac{1}{2}\right) \mathrm{l.}\left(\frac{\mu+k+1}{\mu+k}\right) - 1,$$

d'où

$$(5) \ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right) \mathrm{l}\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right) - 1\right],$$

ce qui est la série de Gudermann.

De même, si dans l'intégrale qui précède on développe la fonction

$$\frac{1}{\mu+k+x}$$

suivant les puissances ascendantes de x, on obtient la série donnée par Cauchy (*), ce qui n'offre ici que peu d'intérêt, puisque cette série n'est qu'une simple transformation de la série de Gudermann (**).

Mais, ce qui est plus curieux, l'équation (4) conduit aussi immédiatement à la série double de Binet (***). En effet, posant

$$x = 1 - z, \quad dx = -dz,$$

on trouve

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right) dx}{\mu+k+x} = \int_0^1 \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right) dz}{(\mu+k+1)-z},$$

et comme z est égal ou inférieur à l'unité, on a en série convergente

$$\frac{1}{(\mu+k+1)-z} = \frac{1}{\mu+k+1}\left[1+\frac{z}{\mu+k+1}+\frac{z^2}{(\mu+k+1)^2}+\cdots\right];$$

(*) *Exercices d'Analyse*, t. II, p. 388, équation (6). Dans un rapport sur un travail de M. De Tilly, j'ai attribué cette série à Féaux, d'après Gudermann (*Journal de Crelle*, t. XXIX, p. 209), mais le mémoire de Cauchy est antérieur.

(**) Limbourg, *Théorie de la fonction Gamma*, p. 62.

(***) *Journal de l'École polytechnique*, 27^{me} Cahier, p. 226. — Voy. aussi Cauchy, *Mém. cité*, p. 388.

d'où, substituant et observant que

$$\int_0^1 \left(z-\frac{1}{2}\right) z^n dz = \frac{n}{2(n+1)(n+2)},$$

on obtient

$$\int_0^1 \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{(\mu+k+1)-z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}\frac{1}{(\mu+k+1)^2} + \frac{2}{3.4}\frac{1}{(\mu+k+1)^3} + \frac{3}{4.5}\frac{1}{(\mu+k+1)^4} + \cdots\right].$$

Transportant cette valeur de l'intégrale dans l'équation (4), et groupant ensemble les termes affectés des mêmes facteurs numériques, ce qui n'offre aucune difficulté puisque tous les termes sont positifs, nous obtiendrons la série de Binet :

$$(6)\ \ldots\ \varpi(\mu) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k+1)^2} + \frac{2}{3.4}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k+1)^3} + \cdots\right].$$

9. L'équation (4) conduit facilement à des séries nouvelles, notablement plus convergentes que les précédentes. Posons, dans l'intégrale qui figure sous le signe sommatoire,

$$\frac{1}{2} - x = z,$$

d'où

$$dx = -\,dz.$$

Nous aurons

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\mu+k+x}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{zdz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{zdz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z} - \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{zdz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z},$$

ou, en changeant z en $-z$ dans cette dernière intégrale,

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z} - \frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)+z}\right] zdz = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2 dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2 - z^2}.$$

Mais, z étant compris entre zéro et $\frac{1}{2}$, on a, en série toujours convergente,

$$\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2}=\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}\left[1+\frac{z^2}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^4}+\cdots\right];$$

et, par suite,

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2}=\frac{2}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{7.2^7}\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^4}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{(2\mu+2k+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2\mu+2k+1)^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{(2\mu+2k+1)^6}+\cdots$$

Substituant dans la valeur de $\varpi(\mu)$ et groupant les termes différemment, nous aurons

$$(7).\quad \varpi(\mu)=\frac{1}{3}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^2}+\frac{1}{5}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^4}+\frac{1}{7}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^6}+\cdots,$$

série assez convergente lorsque μ est un peu considérable.

La relation (7) renferme diverses conséquences curieuses. Par exemple, posons $\mu=\frac{1}{2}$; nous trouverons

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3.2^2}\sum_0^\infty\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{5.2^4}\sum_0^\infty\frac{1}{(k+1)^4}+\cdots,$$

ou, plus simplement,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3.2^2}\sum_1^\infty\frac{1}{k^2}+\frac{1}{5.2^4}\sum_1^\infty\frac{1}{k^4}+\cdots.$$

Mais on sait que

$$\sum_1^\infty\frac{1}{k^{2n}}=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}B_n}{1.2.3\ldots 2n},$$

B_1, B_2, ..., B_n, ... désignant les nombres de Bernoulli. Substituant dans l'équation ci-dessus, remplaçant $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur connue, qui est $\frac{1}{2}(1-\mathrm{l}.2)$, nous trouverons cette formule curieuse :

$$1-\mathrm{l}.2=\frac{\pi^2}{1.2.3}B_1+\frac{\pi^4}{1.2.3.4.5}B_2+\frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7}B_3+\cdots,$$

qui associe les nombres bernoulliens, le nombre π et le logarithme népérien de 2 dans une même équation.

Si l'on remplaçait, dans cette égalité, les nombres B_n par leurs expressions sous forme d'intégrales définies, données par Plana, on retomberait, après quelques transformations, sur une identité.

10. L'intégration par partie, appliquée à la formule (4), conduit à d'autres séries convergentes pour le développement de $\varpi(\mu)$. On a, en effet,

$$\int_0^z \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} = \frac{1}{3}\frac{z^3}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} - \frac{2}{3}\int_0^z \frac{z^4dz}{\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{z^3}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} - \frac{2}{3.5}\frac{z^5}{\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\right]^2} + \frac{2.4}{3.5}\int_0^z \frac{z^6dz}{\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\right]^3},$$

et ainsi de suite. Le dernier terme tend vers zéro quand l'opération se prolonge indéfiniment, parce que z reste inférieur à $\frac{1}{2}$.

On a donc, en série convergente,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} = \frac{1}{3.2^3}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)} - \frac{1}{3.5.2^4}\frac{1}{(\mu+k)^2(\mu+k+1)^2}$$
$$+ \frac{1.2}{3.5.7.2^6}\frac{1}{(\mu+k)^3(\mu+k+1)^3} - \dots$$

Substituons cette valeur de l'intégrale dans la formule

$$\varpi(\mu) = 2\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2},$$

et observons que, la série qui représente l'intégrale définie restant convergente lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs absolues, il est permis de grouper ensemble les termes de même rang.

Nous aurons

$$(8)\left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{3.2^2}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}-\frac{1}{3.5.2^3}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^2(\mu+k+1)^2}\\&+\frac{1.2}{3.5.7.2^4}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^3(\mu+k+1)^3}-\frac{1.2.3}{3.5.7.9.2^5}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^4(\mu+k+1)^4}+\dots(^*).\end{aligned}\right.$$

Les termes étant alternativement positifs et négatifs, et toujours décroissants, l'erreur commise lorsqu'on arrête la série en un point quelconque est toujours moindre que le premier terme négligé.

Cette série, comme toutes les précédentes, converge d'autant plus rapidement que μ a une valeur plus grande.

---

§ IV.

DÉVELOPPEMENT DE $\varpi(\mu)$ (*suite*).

11. On doit à Binet une série remarquable pour représenter la fonction $\varpi(\mu)$, série que Cauchy a retrouvée par une analyse savante, mais assez pénible (**). Notre formule (4) du § III conduit avec une extrême facilité à la série de Binet, ainsi qu'à l'expression du reste de cette série, ce qui n'avait été obtenu jusqu'ici que pour des valeurs entières de μ.

On démontre sans peine l'identité suivante, due à Stirling (***) :

$$\frac{1}{u+\alpha}=\frac{1}{u}-\frac{\alpha}{u(u+1)}-\frac{\alpha(1-\alpha)}{u(u+1)(u+2)}-\dots-\frac{\alpha(1-\alpha)\dots(n-1-\alpha)}{u(u+1)\dots(u+n)}-\frac{\alpha(1-\alpha)\dots(n-\alpha)}{u(u+1)\dots(u+n)(u+\alpha)}.$$

(*) D'après une formule que nous aurons l'occasion de citer plus loin, le premier terme de cette suite se réduit à $\frac{1}{12\mu}$.

(**) Binet, *Journal de l'École polytechnique,* 27me cahier, p. 226. — Cauchy, *Mém. cité,* p. 389. — Voy. encore, sur cette série de Binet: Limbourg, p. 65. — Genocchi, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique,* t. XXII, 2me partie, p. 392. — De Tilly, *même collection,* t. XXXV, 2me série, p. 30.

(***) Voy., par exemple; la note de M. Genocchi, citée plus haut.

Si l'on y fait $u = \mu + k$, $\alpha = x$, elle devient

$$\frac{1}{\mu+k+x} = \frac{1}{\mu+k} - \frac{x}{(\mu+k)(\mu+k+1)} - \frac{x(1-x)}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)} - \dots$$
$$- \frac{x(1-x)(2-x)\dots(n-1-x)}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)} - \frac{x(1-x)\dots(n-x)}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)(\mu+k+x)}.$$

De là nous tirons

$$\int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\mu+k+x} = \frac{1}{\mu+k}\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)dx - \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$- \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)}\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx - \dots$$
$$- \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)}\int_0^1 x(1-x)\dots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$- \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)}\int_0^1 \frac{x(1-x)\dots(n-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\mu+k+x}dx.$$

Le premier terme du second membre disparaît, car l'on a

$$\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)dx = 0.$$

Substituons dans l'équation

$$\varpi(\mu) = -\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\mu+k+x},$$

et observons que les intégrales relatives à x sont, sauf la dernière, indépendantes de k. Nous aurons évidemment

$$\left\{\begin{aligned}
\varpi(\mu) &= \left[\sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\right]\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx \\
&+ \left[\sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)}\right]\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + \dots \\
&+ \left[\sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)}\right]\int_0^1 x(1-x)\dots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx \\
&+ \sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)\dots(\mu+k+n)}\int_0^1 \frac{x(1-x)\dots(n-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\mu+k+x}dx.
\end{aligned}\right.$$

Mais on sait, d'autre part, par des relations dues à Stirling, que l'on a

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}=\frac{1}{\mu},\quad \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)}=\frac{1}{2\mu(\mu+1)},\ldots$$
$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}=\frac{1}{n\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}\ (^*).$$

Il viendra donc

$$(1)\ldots\left\{\begin{array}{l}\varpi(\mu)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{1}{2\mu(\mu+1)}\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\cdots\\ \quad+\frac{1}{n\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}\int_0^1 x(1-x)\ldots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\mathrm{R}_n,\end{array}\right.$$

équation dans laquelle on a posé

$$(2)\ldots\mathrm{R}_n=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}\int_0^1\frac{x(1-x)\ldots(n-x)}{\mu+k+x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx.$$

La formule (1) est la série de Binet. L'équation (2) donne l'expression du reste de la série après le n^{me} terme. Sa limite supérieure, que nous allons déterminer, fournira à la fois la preuve de la convergence de la série et la limite de l'erreur commise lorsqu'on néglige le reste.

12. Observons que, dans l'intégrale qui figure sous le signe Σ, le facteur $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ est négatif depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$, positif depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, les autres facteurs étant toujours positifs. Si donc nous partageons l'intégrale en deux autres, ayant respectivement pour limites 0 et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 1, la première aura une valeur négative $-\mathrm{A}$, la seconde une valeur positive $+\mathrm{B}$, et la valeur absolue de l'intégrale entière sera $<\mathrm{A}+\mathrm{B}$. Or, nous avons

$$\mathrm{A}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{\mu+k+x}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx<\frac{1.2.3\ldots n}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{2}-x\right)dx,$$

(*) Bertrand, *Traité de calcul différentiel*, p. 226.

$$B=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{\mu+k+x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx<\frac{1.2.3\dots n}{\mu}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx,$$

d'où, remplaçant ces deux intégrales par leurs valeurs numériques,

$$A+B<\frac{1.2.3\dots n}{8\mu}.$$

Nous aurons donc, R_n étant réduit à sa valeur absolue,

$$R_n<\frac{1.2.3\dots n}{8\mu}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\dots(\mu+k+n)},$$

ou, d'après les formules de Stirling rappelées ci-dessus,

$$R_n<\frac{1}{8\mu}\frac{1.2.3\dots n}{n\mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1)}=\frac{1}{8\mu^2}\frac{1.2.3\dots(n-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+n-1)}$$
$$=\frac{1}{8\mu^2}\frac{1}{(1+\mu)\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\mu}{n-1}\right)},$$

d'où, encore,

$$R_n<\frac{1}{8\mu^2}\frac{1}{1+\mu\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}\right)},$$

Mais on sait que, si l'on désigne par C la constante d'Euler dont la valeur est

$$C=0{,}57721566\dots\dots,$$

on a, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n,

$$lim.\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}-\mathrm{l}.(n-1)\right]=C,$$

et l'on reconnaît sans peine que le premier membre décroît constamment à partir de $n=2$, en sorte que l'on a

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}>C+\mathrm{l}.(n-1).$$

Donc

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad R_n < \frac{1}{8\mu^2} \frac{1}{1 + \mu C + \mu \,\mathrm{l}.(n-1)}.$$

Or, lorsque n croît indéfiniment, l. $(n-1)$ tend vers l'infini, donc R_n tend vers zéro; la série est donc convergente pour toute valeur positive de μ. L'inégalité précédente fournit d'ailleurs une limite supérieure, facile à calculer, de l'erreur que l'on commet en bornant la série de Binet à ses n premiers termes. Il ne serait pas difficile d'obtenir des limites plus resserrées, mais d'un calcul moins simple. On peut aussi mettre R_n sous la forme d'une intégrale définie double.

Nous ferons encore deux remarques au sujet de la série de Binet. Lorsque μ est un nombre entier, la formule (2) coïncide, comme on le voit sans peine, avec celle que M. De Tilly a trouvée pour exprimer le reste R_n dans ce cas particulier (*).

En second lieu, la source d'où nous avons tiré la série de Binet, savoir la formule (4) du paragraphe précédent, met en évidence la relation intime qui existe entre cette série et celle de Gudermann. La première résulte, en effet, tout simplement, du développement en série d'une intégrale définie dont la seconde utilise l'expression sous forme finie, savoir

$$\int_0^1 \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\mu + k + x}.$$

Il s'ensuit que si, dans l'expression du reste R_n, on effectue l'intégration indiquée, on ne fera que reproduire avec des signes contraires les termes déjà développés de la série, et revenir à l'intégrale primitive qui, étant remplacée par sa valeur sous forme finie, ramènera à la série de Gudermann. Ceci s'accorde avec une observation faite par M. De Tilly (**).

13. La série de Binet n'est qu'un cas particulier d'une formule beaucoup

(*) *Bulletins de l'Acad.*, loc. cit., p. 58.
(**) Page 59 du travail cité plus haut.

plus générale, qui fournit une infinité de développements convergents pour la fonction $\varpi(\mu)$: sa démonstration, semblable à celle que nous avons donnée plus haut, s'appuie sur quelques transformations assez curieuses.

Désignons par β une quantité quelconque, par p un nombre entier arbitraire. La suite d'identités

$$\frac{1}{u+\alpha}=\frac{1}{u+\beta}+\frac{\beta-\alpha}{(u+\beta)(u+\alpha)}=\frac{1}{u+\beta}+\frac{\beta-\alpha}{(u+\beta)(u+\beta+p)}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)(u+\alpha)},\text{ etc.},$$

conduit évidemment à la formule suivante, plus générale que celle de Stirling :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u+\alpha}&=\frac{1}{u+\beta}+\frac{\beta-\alpha}{(u+\beta)(u+\beta+p)}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)(u+\beta+2p)}+\dots\\&+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)\dots(\beta+\overline{n-1}\,p-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)\dots(u+\beta+np)}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)\dots(\beta+np-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)\dots(u+\beta+np)(u+\alpha)}.\end{aligned}$$

Remplaçons, dans cette égalité, u par $\mu+k$, α par x; nous aurons le développement de $\frac{1}{\mu+k+x}$, et par suite, l'équation

$$\left\{\begin{aligned}\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x}&=\frac{1}{\mu+k+\beta}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)}\int_0^1(\beta-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)(\mu+k+\beta+2p)}\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\cdots\\&+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)\dots(\mu+k+\beta+np)}\\&\times\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\dots(\beta+\overline{n-1}\,p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)\dots(\mu+k+\beta+np)}\\&\times\int_0^1\frac{(\beta-x)(\beta+p-x)\dots(\beta+np-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\mu+k+x}dx.\end{aligned}\right.$$

Observons que, ici encore,

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)dx=0,$$

substituons la valeur de l'intégrale ci-dessus dans la formule (4) du § III, et groupons ensemble tous les termes qui ont pour coefficient une même intégrale indépendante de k. Il viendra

$$\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)}\right]\int_0^1(\beta-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\\&+\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)(\mu+\beta+k+2p)}\right]\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)\ldots(\mu+\beta+k+np)}\right]\\&\times\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+\overline{n-1}\,p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\mathrm{R}_n,\end{aligned}$$

équation où l'on a posé

$$(4)\ldots\left\{\begin{aligned}\mathrm{R}_n=&\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)\ldots(\mu+\beta+k+np)}\\&\times\int_0^1\frac{(\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+np-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x}.\end{aligned}\right.$$

Les séries qui figurent dans le développement de $\varpi(\mu)$ sont faciles à sommer. On voit sans peine, en effet, que si θ désigne une quantité arbitraire, on a

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)}=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{1}{\theta+k}-\frac{1}{\theta+k+p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{\theta+k};$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)(\theta+k+2p)}&=\frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)}-\frac{1}{(\theta+k+p)(\theta+k+2p)}\right]\\&=\frac{1}{2p^2}\sum_{k=0}^{k=p-1}\left(\frac{1}{\theta+k}-\frac{1}{\theta+k+p}\right)=\frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)},\end{aligned}$$

et, en général,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)\ldots(\theta+k+np)}=\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)\ldots(\theta+k+\overline{n-1}\,p)}.$$

Il suffit de poser, dans ces formules, $\theta = \mu + \beta$, pour donner à l'expression de $\varpi(\mu)$, trouvée plus haut, la forme suivante :

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(\mu) = {} & \frac{1}{p}\left[\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{\mu+\beta+k}\right]\int_0^1 (\beta - x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx \\ & + \frac{1}{2p}\left[\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)}\right]\int_0^1 (\beta-x)(\beta+p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{np}\left[\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)\ldots(\mu+\beta+k+\overline{n-1}\,p)}\right] \\ & \times\int_0^1 (\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+\overline{n-1}\,p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx + R_n. \end{aligned}\right.$$

Un raisonnement semblable à celui que nous avons fait plus haut, appliqué à l'expression (4) de R_n, montrerait que ce reste converge vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et que, par conséquent, la série (5) est convergente.

Si, dans l'équation (5), on pose $\beta=0, p=1$, on retrouve la série de Binet.

Si l'on pose $\beta = 1$, $p = 1$, on a

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\mu+1}\int_0^1 (1-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}\int_0^1 (1-x)(2-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx + \cdots,$$

ou, en remplaçant x par $1-z$ dans les intégrales,

$$(6)\ .\quad \left\{\begin{aligned} \varpi(\mu) = {} & \frac{1}{\mu+1}\int_0^1 z\left(z-\frac{1}{2}\right)dz + \frac{1}{2(\mu+1)(\mu+2)}\int_0^1 z(1+z)\left(z-\frac{1}{2}\right)dz \\ & + \frac{1}{3(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\int_0^1 z(1+z)(2+z)\left(z-\frac{1}{2}\right)dz + \cdots; \end{aligned}\right.$$

série analogue à celle de Binet, et que l'on pourrait aussi obtenir par d'autres procédés.

Posons encore, dans l'équation (5), $\beta = \frac{1}{2}$, $p = 1$. Il viendra

$$\begin{aligned} \varpi(\mu) = {} & \frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x\right)^2 dx + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\left(\frac{3}{2}-x\right)dx \\ & + \frac{1}{3\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\left(\mu+\frac{5}{2}\right)}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x\right)^2\left(\frac{3}{2}-x\right)\left(\frac{5}{2}-x\right)dx + \cdots; \end{aligned}$$

ou, si l'on pose $x = \frac{1}{2} - z$,

$$(7) \ldots \left\{ \begin{aligned} \varpi(\mu) &= \frac{1}{\mu + \frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} z^2 dz + \frac{1}{2\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{3}{2}\right)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} z^2 (1 - z)\, dz \\ &+ \frac{1}{3\left(\mu + \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{3}{2}\right)\left(\mu + \frac{5}{2}\right)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} z^2 (1 - z)(2 - z)\, dz + \cdots \end{aligned} \right.$$

En général, si l'on fait $p = 1$ sans déterminer β, la formule (3) donne

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\mu + \beta} \int_0^1 (\beta - x)\left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \frac{1}{2(\mu + \beta)(\mu + \beta + 1)} \int_0^1 (\beta - x)(\beta + 1 - x)\left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \cdots$$

Soit encore, dans cette même formule (3), $\beta = 0$, $p = 2$; elle deviendra

$$(8) \left\{ \begin{aligned} \varpi(\mu) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu + 1}\right) \int_0^1 x\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\mu(\mu + 2)} + \frac{1}{(\mu + 1)(\mu + 3)}\right] \int_0^1 x(2 - x)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &+ \frac{1}{6}\left[\frac{1}{\mu(\mu + 2)(\mu + 4)} + \frac{1}{(\mu + 1)(\mu + 3)(\mu + 5)}\right] \int_0^1 x(2 - x)(4 - x)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \cdots \end{aligned} \right.$$

Le choix à faire entre ces diverses séries, pour une valeur de μ comprise entre des limites données, exigerait une discussion de l'expression du reste, qui permît de reconnaître les valeurs de β et de p qui, pour une valeur donnée de n, conduisent à la plus petite erreur. Nous n'avons pas fait cet examen.

§ V.

DÉVELOPPEMENTS DE $\varpi(\mu)$ (*suite*).

14. Reprenons la formule (2) du § III, savoir

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\, dz,$$

et montrons comment, par de simples intégrations par partie, on en déduit la série de Stirling, avec deux expressions différentes pour le *reste*.

On a évidemment

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^p}\, dz = \frac{1}{2n\pi\mu^p} - \frac{p}{2n\pi} \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(\mu + z)^{p+1}}\, dz,$$

et aussi

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(\mu + z)^{p+1}}\, dz = \frac{p+1}{2n\pi} \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{p+2}}\, dz;$$

par conséquent

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^p}\, dz = \frac{1}{2n\pi\mu^p} - \frac{p(p+1)}{(2n\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{p+2}}\, dz.$$

Faisant successivement $p = 1, 3, 5, \ldots, 2p - 1$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\, dz = \frac{1}{2n\pi\mu} - \frac{1 \cdot 2}{(2n\pi\mu)^3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(2n\pi\mu)^5} - \ldots + (-1)^{p-1} \frac{1 \cdot 2 \ldots (2p-2)}{(2n\pi\mu)^{2p-1}} + s_p,$$

s_p désignant l'une quelconque des deux expressions

$$(-1)^p \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{(2n\pi)^{2p-1}} \int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p}}, \quad (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2p}{(2n\pi)^{2p}} \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}}\, dz.$$

Substituons dans l'équation (1), et groupons les termes affectés d'une même puissance de $\frac{1}{\mu}$. Nous aurons immédiatement

$$\varpi(\mu)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi\mu}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1.2}{(2\pi\mu)^3}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{1.2.3.4}{(2\pi\mu)^5}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^6}-\cdots\right.$$
$$\left.+(-1)^{p-1}\frac{1.2\ldots(2p-2)}{(2\pi\mu)^{2p-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_p}{n}\right],$$

ou, en ayant égard à la formule déjà rappelée au n° 9,

$$(4)\ldots\quad \varpi(\mu)=\frac{B_1}{1.2\mu}-\frac{B_2}{3.4\mu^3}+\frac{B_3}{5.6\mu^5}-\cdots+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)\,2p.\mu^{2p-1}}+R_p,$$

B_1, B_2, ... étant les nombres de Bernoulli, et R_p étant donné par la formule

$$(5)\ldots\ldots\quad R_p=(-1)^p\frac{1.2.3\ldots(2p-1)}{2^{2p-1}\,\pi^{2p}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}\int_0^\infty\frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p}}dz,$$

ou par celle-ci :

$$(6)\ldots\ldots\quad R_p=(-1)^p\frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p}\,\pi^{2p+1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\int_0^\infty\frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p+1}}dz.$$

La formule (4) coïncide avec la série de Stirling. Les formules (5) et (6) donnent deux expressions nouvelles du reste qui complète la série, arrêtée au $p_{ième}$ terme. On déduit facilement de ces expressions, grâce à la périodicité des fonctions cos $2n\pi z$, sin $2n\pi z$, diverses limites de l'erreur commise.

15. Ainsi, d'abord, il est clair que l'on a, *en valeur absolue*,

$$\int_0^\infty\frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p}}dz<\int_0^\infty\frac{dz}{(\mu+z)^{2p}}=\frac{1}{(2p-1)\,\mu^{2p-1}},$$

et par suite, la formule (5) donne, R_p étant réduit à sa valeur absolue,

$$R_p<\frac{1.2.3\ldots(2p-2)}{2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,\mu^{2p-1}}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2p}}=\frac{B_p}{(2p-1)\,2p.\mu^{2p-1}},$$

c'est-à-dire que l'erreur commise sera moindre que le dernier terme conservé de la série.

De même, si l'on observe que la fonction périodique sin $2n\pi z$ est alternativement positive et négative lorsque la variable z parcourt les intervalles successifs

$$\left(0, \frac{1}{2n}\right), \quad \left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}\right), \text{ etc.} \ldots;$$

qu'en outre la valeur absolue du facteur $(\mu + z)^{-p}$ est constamment et indéfiniment décroissante, on reconnaîtra sans peine que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^p} dz$$

est toujours positive, quel que soit p. D'autre part, l'équation (3), si l'on tient compte de cette même observation, prouve évidemment que cette intégrale a une valeur inférieure à $\frac{1}{2n\pi\mu^p}$. On aura donc, d'après cela,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}} < \frac{1}{2n\pi\mu^{2p+1}},$$

et la formule (6) donnera, en valeur absolue,

$$R_p < \frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p+1}\pi^{2p+2}\mu^{2p+1}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+2}},$$

ou bien,

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_p < \frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)\mu^{2p+1}}.$$

De plus, cette même équation (3) fait voir que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}} = \frac{1}{2n\pi\mu^{2p+1}} - \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2n\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+3}} dz,$$

d'où, en remplaçant cette dernière intégrale par sa limite supérieure,

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}} dz > \frac{1}{2n\pi\mu^{2p+1}}\left[1 - \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2n\pi)^2\mu^2}\right].$$

Aussi longtemps que $(2p+1)(2p+2)$ est inférieur à $(2\pi\mu)^2$, la limite inférieure qui précède reste positive pour les diverses valeurs de n; elle peut donc être avantageusement substituée à zéro, et l'on trouve, en opérant comme plus haut,

$$R_p > \frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p+1}\pi^{2p+2}\mu^{2p+1}}\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+2}} - \frac{1.2.3\ldots(2p+2)}{2^{2p+3}\pi^{2p+4}\mu^{2p+3}}\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+4}},$$

ou, plus simplement,

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad R_p > \frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)\mu^{2p+1}} - \frac{B_{p+2}}{(2p+3)(2p+4)\mu^{2p+3}}.$$

Il résulte des inégalités (7) et (8) que le reste R_p, en valeur absolue, est toujours moindre que le premier terme négligé de la série, et toujours plus grand que la différence entre ce terme et le suivant, du moins aussi longtemps que l'on a

$$(2p+1)(2p+2) < (2\pi\mu)^2.$$

D'où il suit que si l'on prend pour R_p la valeur suivante :

$$R_p = (-1)^p\left[\frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)\mu^{2p+1}} - \frac{1}{2}\frac{B_{p+2}}{2(2p+3)(2p+4)\mu^{2p+3}}\right],$$

la valeur de $\varpi(\mu)$ fournie alors par l'équation (4), ne différera de la valeur exacte que d'une quantité moindre que la moitié du $\overline{p+2}^{\text{ème}}$ terme, savoir

$$\frac{1}{2}\frac{B_{p+2}}{(2p+3)(2p+4)\mu^{2p+3}}.$$

Il serait facile d'assigner encore d'autres limites pour R_p, mais nous ne nous y arrêterons pas, notre but étant simplement de faire remarquer les formules (5) et (6).

16. Il nous reste à montrer comment la relation fondamentale (1) conduit, fort simplement, à l'élégant développement de l. $\Gamma(\mu)$ en série périodique pour le cas de $\mu < 1$, développement que M. Kummer a donné dans le *Journal de Crelle* (*).

Posons, dans l'équation (1), $\mu + z = y$, d'où

$$(9)\quad \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\,dz = \int_\mu^\infty \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy = \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy - \int_\varepsilon^\mu \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy,$$

ε désignant une quantité positive aussi petite qu'on le veut. Or, on a

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy = \cos 2n\mu\pi \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2n\pi y}{y}\,dy - \sin 2n\mu\pi \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2n\pi y}{y}\,dy,$$

et, tandis que la première intégrale du second membre tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque ε tend vers zéro, il résulte de la formule (3) du § II que la seconde diffère infiniment peu de $-(C + \mathrm{l}.\, 2n\pi\varepsilon)$.

D'autre part, l'intégration par partie donne

$$\int_\varepsilon^\mu \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy = \sin 2n\pi(\mu-\varepsilon)\,\mathrm{l}.\,\varepsilon - 2n\pi \int_\varepsilon^\mu \mathrm{l}.\,y \cos 2n\pi(y-\mu)\,dy.$$

Substituons ces résultats dans l'équation (9), et faisons tendre ε vers zéro, en observant que le terme affecté de $\mathrm{l}.\,\varepsilon$, savoir

$$[\sin 2n\mu\pi - \sin 2n\pi(\mu-\varepsilon)]\,\mathrm{l}.\,\varepsilon$$

tend vers zéro en même temps que ε; nous aurons cette équation remarquable :

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\,dz = \frac{\pi}{2}\cos 2n\mu\pi + (C + \mathrm{l}.\,2n\pi)\sin 2n\mu\pi + 2n\pi \int_0^\mu \mathrm{l}.\,y \cos 2n\pi(\mu - y)\,dy.$$

(*) *Beitrag zur Theorie der Function* Γ; JOURNAL DE CRELLE, t. XXXV, p. 1. — M. Schlömilch a démontré la même formule par une voie différente et très-simple (*Compend. der höh. Anal.* t. II, p. 255.

L'équation (1) deviendra donc

$$(10)\quad \varpi(\mu)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C+\mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\cos 2n\pi(\mu-y)\,dy.$$

Mais il résulte de l'une des formes sous lesquelles on peut présenter la série de Fourier (*) que, si μ est compris entre zéro et l'unité, on a, pour une valeur quelconque de x entre zéro et μ,

$$\varphi(x)=\int_0^{\mu}\varphi(y)\,dy+2\sum_1^{\infty}\int_0^{\mu}\varphi(y)\cos 2n\pi(x-y)\,dy,$$

le premier membre devant être réduit à la moitié lorsque $x=\mu$.

Donc, si nous prenons $\varphi(x)=\mathrm{l}.\,x$, et si nous posons $x=\mu$, il viendra

$$\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\mu=\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\,dy+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\cos 2n\pi(\mu-y)\,dy.$$

Remplaçons, dans l'équation (10), le dernier terme par sa valeur tirée de l'équation précédente; observons aussi que l'on a

$$\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\,dy=\mu\,\mathrm{l}.\,\mu-\mu,\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n}=-\mathrm{l}.\,2\sin\mu\pi,$$

et cette équation (10) prendra la forme

$$\varpi(\mu)=-\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,2\sin\mu\pi-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu+\mu+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C+\mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi.$$

Enfin, substituons cette valeur de $\varpi(\mu)$ dans la formule (1) du § I, nous aurons

$$(11)\quad \ldots\quad \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\frac{\pi}{\sin\mu\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C+\mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi,\quad (\mu<1).$$

Telle est la série de M. Kummer. Il n'est pas sans intérêt d'observer qu'elle

(*) Voy., par exemple, Duhamel, *Cours d'Analyse* (1847), t. II, p. 166.

donne immédiatement la valeur d'intégrales définies assez remarquables. Il suffit, en effet, de remplacer le premier terme du second membre par sa valeur

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\pi - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi}{n},$$

de multiplier les deux membres par l'un des facteurs

$$d\mu, \qquad \cos 2k\mu\pi d\mu, \qquad \sin 2k\mu\pi d\mu,$$

k étant entier, puis d'intégrer entre les limites 0 et 1, comme on le fait pour la détermination des coefficients de la série de Fourier. On trouvera

$$\int_0^1 \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)\,d\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\pi, \qquad \int_0^1 \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)\cos 2k\mu\pi\,d\mu = \frac{1}{4k},$$

$$\int_0^1 \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)\sin 2k\mu\pi\,d\mu = \frac{C + \mathrm{l}.\,2k\pi}{2k\pi}.$$

La première de ces formules a été donnée depuis longtemps par Raabe.

Nous retrouverons plus loin, sous une autre forme et par une autre méthode, le développement de $\varpi(\mu)$ en série procédant suivant les sinus des multiples de $2\mu\pi$.

SECONDE PARTIE.

§ VI.

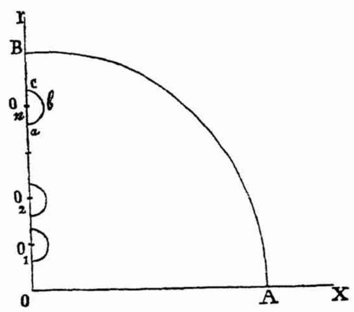
TRANSFORMATION DE LA FONCTION $\varpi(\mu)$.

17. Nous nous proposons, actuellement, de transformer l'intégrale définie qui représente la fonction $\varpi(\mu)$ en une autre, renfermant, sous le signe d'intégration, non plus des exponentielles, mais des fonctions trigonométriques.

Pour cela, considérons une variable imaginaire z, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\int \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-\mu z}}{z} dz$$

étendue au contour fermé OABO, composé d'une portion $OA = R$ de l'axe des x positifs, de l'arc de cercle AB décrit du centre O avec un rayon R, et enfin de la portion BO de l'axe des y. La fonction sous le signe $\int$ a une valeur finie pour $z = 0$, c'est-à-dire au point O, comme on s'en assure sans peine; mais elle devient infinie aux divers points $O_1, O_2, .. O_n, ..$ de l'axe des y qui répondent aux valeurs de z comprises dans la formule



$$z = 2n\pi\sqrt{-1},$$

n étant un nombre entier quelconque. Nous éviterons donc chacun de ces points *critiques* en décrivant de ce point comme centre un demi-cercle de rayon infiniment petit ρ, suivant la méthode connue. De cette manière, la fonction restant synectique dans l'intérieur du contour fermé, l'intégrale étendue à ce contour tout entier sera nulle; et si nous désignons par I (OB) la valeur *principale* de l'intégrale prise le long de la droite OB, de O vers B; par I_n l'intégrale étendue au contour élémentaire *abc* autour du point O_n, nous aurons, comme on sait,

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad I(OA) + I(AB) = I(OB) + \sum_{n=1}^{n=n_1} I_n,$$

n_1 désignant la plus grande valeur que comporte n dans l'intérieur du cercle de rayon R.

Évaluons séparément chaque intégrale. Sur l'axe OX, on a $z = x$, d'où

$$I(OA) = \int_0^R \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-\mu x}}{x} dx.$$

Sur l'arc AB, en désignant par θ l'*argument* de z, on a $z = Re^{\theta\sqrt{-1}}$; et, par suite,

$$I(AB) = \sqrt{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{e^{R(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}} - \frac{1}{Re^{\theta\sqrt{-1}}} + \frac{1}{2}\right] e^{-\mu(R\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)} d\theta.$$

Sur l'axe des y, où l'on a $z = y\sqrt{-1}$, l'élément de l'intégrale correspondant à un chemin rectiligne sur cet axe est

$$\left(\frac{1}{e^{y\sqrt{-1}} - 1} - \frac{1}{y\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-\mu y\sqrt{-1}}}{y} dy = \left(\frac{e^{-\frac{y}{2}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}} + \frac{\sqrt{-1}}{y} + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-\mu y\sqrt{-1}}}{y} dy.$$

Enfin, sur le petit cercle *abc* l'on a, θ étant l'argument,

$$z = 2n\pi\sqrt{-1} + \rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\theta\sqrt{-1}} d\theta,$$

et comme $e^{2n\pi\sqrt{-1}}$ se réduit à l'unité, il vient évidemment

$$\mathrm{I}_n = \sqrt{-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{e^{\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}-1}-\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}+\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}\,e^{-\mu\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}\rho e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{2n\pi\sqrt{-1}+\rho e^{\theta\sqrt{-1}}},$$

d'où, faisant converger ρ vers zéro et observant que

$$lim\,\frac{\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}{e^{\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}-1}=1,$$

on trouvera

$$\mathrm{I}_n=\sqrt{-1}\,\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}}{2n\pi\sqrt{-1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}}{2n}.$$

Substituons dans l'équation (α) les résultats que nous venons d'obtenir, et, le rayon R étant arbitraire, concevons qu'il croisse indéfiniment. On verra alors que I(AB) tend vers zéro, μ étant positif; que n_1 croît indéfiniment; que I(OA) a pour limite $\varpi(\mu)$, d'après l'équation (2) du § I; et l'on obtiendra l'équation

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\frac{y}{2}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}}+\frac{\sqrt{-1}}{y}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu y\sqrt{-1}}}{y}\,dy+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}}{n}.$$

Décomposons cette équation imaginaire en deux équations réelles : nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)&=\int_0^\infty\left[-\frac{\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\sin\mu y}{y}+\frac{1}{2}\cos\mu y\right]\frac{dy}{y}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n};\\ 0&=\int_0^\infty\left[-\frac{\cos\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\mu y}{y}-\frac{1}{2}\sin\mu y\right]\frac{dy}{y}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.\end{aligned}\right.$$

Observons encore que l'on a

$$-\frac{\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\sin\mu y}{y}+\frac{1}{2}\cos\mu y=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\cot\frac{y}{2}\right)\sin\mu y,$$

$$-\frac{\cos\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\mu y}{y}-\frac{1}{2}\sin\mu y=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\cot\frac{y}{2}\right)\cos\mu y;$$

remplaçons y par $2x$ sous le signe d'intégration. Les équations ci-dessus deviendront

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \varpi(\mu)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}dx;$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\cos 2\mu x}{x}dx=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

Il résulte d'ailleurs de la démonstration que les intégrales sont réduites à leurs valeurs principales.

18. Avant de développer les conséquences de cette transformation qu'a subie la fonction $\varpi(\mu)$, arrêtons-nous quelques instants sur la formule (2), qui s'est offerte d'elle-même dans cette recherche.

D'après une remarque déjà faite au n° 7, la quantité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}$$

est une fonction périodique de μ, dont la période est égale à l'unité, et dont la valeur est $\pi\left(\frac{1}{2}-\mu\right)$ lorsque μ est compris entre zéro et l'unité. Si donc μ a une valeur comprise entre deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$, il viendra

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}=\pi\left(p+\frac{1}{2}-\mu\right).$$

Si, au contraire, μ est entier, la série aura pour somme zéro.

D'après cela, la formule (2) nous donne

$$(3) \quad . \quad . \quad \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx = \begin{cases} \pi\left(p + \dfrac{1}{2} - \mu\right), & \text{si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1); \\ 0, & \text{si } \mu \text{ est entier.} \end{cases}$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \cos 2\mu x\, dx = \begin{cases} \pi\left(p + \dfrac{1}{2} - \mu\right); \\ 0. \end{cases}$$

Si l'on pose, en particulier, $\mu = \frac{1}{2}$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \cot x\, dx = 0.$$

19. Admettons que μ soit compris entre zéro et 1. L'équation

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \cos 2\mu x\, dx = \pi\left(\frac{1}{2} - \mu\right),$$

si l'on multiplie ses deux membres par $d\mu$ et si l'on intègre entre les limites 0 et μ, donnera

$$(4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^3 \sin x} \sin 2\mu x\, dx = \pi\mu(1 - \mu).$$

Le second membre de cette égalité ne change pas lorsque l'on change μ en $1 - \mu$; il en est donc de même du premier. Donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^3 \sin x} \sin 2(1 - \mu) x\, dx = \pi\mu(1 - \mu).$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, et observant que

$$\sin 2\mu x - \sin 2(1 - \mu) x = 2 \sin (2^{\mu} - 1) x \cos x,$$

on trouvera

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \sin(2\mu - 1)\, x \cot x\, dx = 0, \quad (\mu < 1).$$

Si, au contraire, on ajoute membre à membre les mêmes équations, on aura semblablement

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cos(2\mu - 1)\, x\, dx = \pi\mu\,(1 - \mu).$$

Pour $\mu = \frac{1}{2}$, les formules (4) et (6) deviennent

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\, dx = \frac{\pi}{4};$$

la valeur de cette intégrale définie avait déjà été donnée par Bidone (*Mémoires de Turin*, 1812).

20. Reprenons l'équation (3), et remplaçons, dans la fonction sous le signe $\int$, le premier facteur par sa valeur

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2x \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

Nous aurons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x}{n^2\pi^2 - x^2}\, dx.$$

Si l'on remplace l'intégrale définie qui figure sous le signe Σ par sa valeur connue, on retombera sur une formule identique à l'équation (2); mais, si l'on pose dans cette intégrale $x = n\pi z$, il viendra

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\cos 2n\mu\pi z}{1 - z^2}\, dz = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{1 - z^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi z}{n}.$$

Or, on sait que, pour toute valeur de u, on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nu}{n} = -\overline{1.2\sin\frac{u}{2}},$$

la barre placée au-dessus du sinus indiquant que celui-ci doit être pris en valeur absolue. Nous aurons donc

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi z}{n} = -\,1.2\,\overline{\sin \mu\pi z},$$

et comme d'ailleurs

$$1.2 \times \int_0^\infty \frac{dz}{1-z^2} = 0 \text{ (valeur principale)},$$

l'équation ci-dessus se réduira à celle-ci :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1.\,\overline{\sin \mu\pi z}}{1-z^2}\, dz.$$

Il viendra donc, en vertu de la formule (3),

$$(7) \quad \ldots \quad \int_0^\infty \frac{1.\,\overline{\sin \mu\pi z}}{1-z^2}\, dz = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2}\left(\mu - p - \dfrac{1}{2}\right), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1); \\ 0, \text{ si } \mu \text{ est entier.} \end{cases}$$

21. Revenons encore à l'équation (2), et désignant par a une quantité positive quelconque, nous trouverons de même

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2ax}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2na\pi}{n}.$$

Soustrayant cette équation de l'équation (2), nous aurons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\mu\pi - \sin 2na\pi}{n}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x^2}\, dx = \pi(a - \mu) \text{ (*)},$$

(*) On obtient immédiatement cette formule bien connue en observant que

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x}{x^2}\, dx = \frac{\cos 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} - 2\mu \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2\mu x}{x}\, dx,$$

transformant de même $\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2ax}{x^2}\, dx$, retranchant, faisant tendre ε vers zéro, et remarquant que la limite de $\frac{\cos 2\mu\varepsilon - \cos 2a\varepsilon}{\varepsilon}$ est zéro.

ce qui réduit l'équation précédente à la forme

$$(8) \quad . \ . \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x} \cot x \, dx = \pi(a - \mu) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2na\pi - \sin 2n\mu\pi}{n}.$$

Or, d'après ce qui a été remarqué au n° 18, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\mu\pi}{n} = \pi\left(p + \frac{1}{2} - \mu\right) \text{ ou zéro,}$$

suivant que μ est compris entre deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$, ou est un nombre entier. De même,

$$\sum_1^\infty \frac{\sin 2na\pi}{n} = \begin{cases} \pi\left(q + \frac{1}{2} - a\right), \text{ si } a = \mathrm{M}(q, q+1), \\ 0, \text{ si } a \text{ est entier.} \end{cases}$$

L'équation (8) donnera donc lieu à quatre cas distincts, compris dans la formule

$$(9) \quad \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x} \cot x \, dx = \begin{cases} \pi(q-p), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1), a = \mathrm{M}(q, q+1); \\ \pi(a - \mu), \text{ si } \mu, a, \text{ sont entiers;} \\ \pi\left(a - p - \frac{1}{2}\right), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p,\ p+1), a \text{ entier;} \\ \pi\left(q + \frac{1}{2} - \mu\right), \text{ si } \mu \text{ entier}, a = \mathrm{M}(q, q+1). \end{cases}$$

L'intégrale définie

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x} \cot x \, dx$$

présente donc un exemple bien remarquable de discontinuité, lorsqu'on la considère comme fonction des paramètres μ et a. Sa valeur est zéro, lorsque μ et a sont compris entre deux mêmes nombres entiers consécutifs. Si, a étant constant, on suppose que μ varie et croisse constamment, l'intégrale ne change pas de valeur aussi longtemps que μ reste compris entre deux nombres entiers consécutifs donnés; elle diminue brusquement de la quantité $\frac{\pi}{2}$ lorsque μ atteint une valeur entière, puis encore brusquement de la même quantité $\frac{\pi}{2}$ lorsque μ dépasse cette valeur entière.

On peut donner une autre forme à l'intégrale que nous venons de déterminer, en observant que

$$\cos 2\mu x - \cos 2ax = 2 \sin (a-\mu) x \quad \sin (a+\mu) x.$$

Changeant les signes et ayant égard à l'équation (9), on trouvera donc

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{\sin(\mu+a)x \sin(\mu-a)x}{x} \cot x\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(p-q), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1), a = \mathrm{M}(q, q+1); \\ \frac{\pi}{2}(\mu - a), \text{ si } \mu, a \text{ sont entiers}; \\ \frac{\pi}{2}\left(\mu - q - \frac{1}{2}\right), \text{ si } \mu \text{ est entier}, a = \mathrm{M}(q, q+1); \\ \frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{2} - a\right), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1), a \text{ entier}. \end{cases}$$

---

§ VII.

CONSÉQUENCES DE LA TRANSFORMATION DE $\varpi(\mu)$.

22. Nous reprenons la formule (1) du paragraphe précédent, et en vertu de la relation déjà rappelée :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi}{n} = -\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi},$$

nous lui donnons la forme

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\sin 2\mu x}{x}\, dx,$$

de laquelle nous allons déduire de nombreuses conséquences.

Nous remarquons, en premier lieu, que, suivant une observation déjà faite par Cauchy, en vertu de l'équation (1) du § I, toute propriété de la fonction $\Gamma(\mu)$ donne lieu à une propriété correspondante de la fonction $\varpi(\mu)$, et, par suite, de l'intégrale définie qui figure dans l'équation ci-dessus. Nous avons donc là un principe qui nous conduira, très-simplement, à la détermination de plusieurs intégrales définies.

Ainsi, l'on sait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, et l'équation rappelée plus haut conduit alors à celle-ci :

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{l}.2).$$

Donc, faisant $\mu=\frac{1}{2}$ dans l'équation (1), et observant que le premier terme du second membre se réduit ici à $-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2$, on trouvera

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx=1,$$

intégrale définie déjà signalée par Bidone (*Mémoires de Turin,* 1812).

De même, l'équation obtenue dans le § I,

$$\varpi(\mu)-\varpi(\mu+1)=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right)-1,$$

lorsqu'on y remplace $\varpi(\mu)$, $\varpi(\mu+1)$ par leurs valeurs tirées de l'équation (1), en observant que l'on a

$$\overline{\sin(\mu+1)\pi}=\overline{\sin\mu\pi},\quad \sin 2\mu x-\sin 2(\mu+1)x=-2\sin x\cos(2\mu+1)x,$$

cette équation devient

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\cos(2\mu+1)x\sin x\frac{dx}{x}=1-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

ou mieux

$$(3).\ \ldots\ \int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\cos(2\mu+1)x\,dx=1-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Cette formule est, pensons-nous, nouvelle.

De même, la relation connue

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu) + \mathrm{l.}\,\Gamma(1-\mu) = \mathrm{l.}\frac{\pi}{\sin\mu\pi}, (\mu < 1),$$

conduit facilement à la suivante :

$$\varpi(\mu) + \varpi(1-\mu) = 1 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right) - \mathrm{l.}\,2\sin\mu\pi.$$

D'autre part, en vertu de la formule (1), on a

$$\varpi(\mu) + \varpi(1-\mu) = -\mathrm{l.}\,2\sin\mu\pi + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\frac{\sin 2\mu x + \sin 2(1-\mu)x}{x}dx;$$

donc, si l'on a égard à la relation

$$\sin 2\mu x + \sin 2(1-\mu)x = 2\sin x\cos(2\mu-1)x,$$

on trouvera, μ étant plus petit que 1,

$$(4). \quad . \quad . \quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\cos(2\mu-1)x\,dx = 1 + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right).$$

Rapprochant cette équation (4) de l'équation (3), on en conclura que celle-ci subsiste encore pour des valeurs de μ comprises entre zéro et -1, à condition que l'on change le signe de la quantité sous le signe l., sans quoi ce logarithme serait imaginaire.

23. Reprenons l'équation

$$\varpi(\mu+1) - \varpi(\mu) = 1 - \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right),$$

et faisons

$$\mu = n - \frac{1}{2},$$

n désignant un nombre entier positif. Il viendra

$$\varpi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \varpi\left(n - \frac{1}{2}\right) = 1 - n\,\mathrm{l.}\frac{2n+1}{2n-1}.$$

Posons successivement $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, dans cette équation, et ajoutons les résultats membre à membre. Nous trouverons, comme on le voit sans peine,

$$\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)-\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=n-\left[\mathrm{l}.\,3+2\,\mathrm{l}.\frac{5}{3}+3\,\mathrm{l}.\frac{7}{5}+\cdots+n\,\mathrm{l}.\frac{2n+1}{2n-1}\right],$$
$$=n+\mathrm{l}.\,3+\mathrm{l}.\,5+\mathrm{l}.\,7+\cdots+\mathrm{l}.\,(2n-1)-n\,\mathrm{l}.\,(2n+1);$$

ou encore, en remplaçant $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur,

$$\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{l}.\,2)+n+\mathrm{l}.\left[1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)\right]-n\,\mathrm{l}.\,(2n+1).$$

La formule (1) donne une expression de $\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ qui, égalée à la précédente, conduit à l'équation

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx=(2n+1)+2\,\mathrm{l}.\left[1.3.5\ldots(2n-1)\right]-2n\,\mathrm{l}.(2n+1).$$

Cette équation subsiste pour toute valeur entière et positive de n.

Comme d'ailleurs on sait exprimer $\sin(2n+1)x$ en fonction des puissances impaires de $\sin x$, on déduira facilement de l'équation (5) d'autres intégrales définies nouvelles.

Supposons, en premier lieu, $n = 1$: il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx = 3 - 2\,\mathrm{l}.\,3.$$

Mais on a

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$

d'où, substituant et ayant égard à la relation (2),

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,3.$$

De même, pour $n = 2$, l'équation (5) devient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin 5x}{\sin x}\,dx = 5 + 2\,\mathrm{l}.\,3 - 4\,\mathrm{l}.\,5.$$

Or, on sait que

$$\sin 5x = 5 \sin x - 2^2 . 5 \sin^3 x + 2^4 \sin^5 x,$$

et par suite, si l'on tient compte des formules (2) et (6), on aura

$$5 - 2^2 . 5 \frac{1. 3}{3} + 2^4 \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sin^4 x \, dx = 5 + 2 \, 1. 3 - 4 \, 1. 5,$$

ou, réductions faites,

$$(7) \quad \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sin^4 x \, dx = \frac{1}{4}(5 \, 1. 3 - 1. 5).$$

On trouverait de la même manière, en faisant dans l'équation (5) $n = 3$, substituant

$$\sin 7x = 7 \sin x - 7 . 2^3 \sin^3 x + 7 . 2^4 \sin^5 x - 2^6 \sin^7 x,$$

et réduisant au moyen des formules (2), (6) et (7),

$$(8) \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sin^6 x \, dx = \frac{3}{32}(9 \, 1. 3 - 5 \, 1. 5 + 1. 7);$$

et ainsi de suite. Il serait assez curieux de trouver la loi générale.

24. Considérons actuellement l'équation d'Euler :

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}, \quad (n \text{ entier}),$$

ou

$$1. \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) + 1. \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 1. \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{2} 1. 2\pi - \frac{1}{2} 1. n.$$

Exprimant $1. \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $1. \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, ... par la formule (1) du § I, en fonction de $\varpi\left(\frac{1}{n}\right)$, $\varpi\left(\frac{2}{n}\right)$, ..., on trouvera, après quelques réductions faciles à apercevoir,

$$\varpi\left(\frac{1}{n}\right) + \varpi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \varpi\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} 1. [1.2.3\ldots(n-1)] - \frac{1}{n} 1. [1^1 2^2 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}] - \frac{1}{2} 1. n.$$

Or, si l'on remplace les termes du premier membre par leurs valeurs fournies par l'équation (1), on aura visiblement

$$\varpi\left(\frac{1}{n}\right)+\varpi\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\varpi\left(\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{l.}\left(2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\left(\sin\frac{2x}{n}+\sin\frac{4x}{n}+\cdots+\sin\frac{2n-2}{n}x\right)\frac{dx}{x}.$$

Mais des relations bien connues nous donnent

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}};$$

$$\sin\frac{2x}{n}+\sin\frac{4x}{n}+\cdots+\sin\frac{2n-2}{n}x=\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\sin x;$$

il viendra donc, substitutions faites,

$$\varpi\left(\frac{1}{n}\right)+\varpi\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\varpi\left(\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{l.}n+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\,dx,$$

et par suite, si l'on compare ce résultat à celui que nous avons trouvé plus haut,

$$(9)\quad\int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\,dx=(n-1)+\mathrm{l.}\left[1.2.3\ldots(n-1)\right]-\frac{2}{n}\mathrm{l.}\left[1^1 2^2 3^3\ldots(n-1)^{n-1}\right],$$

n ayant une valeur entière quelconque. Ce résultat nouveau paraît assez remarquable.

Pour $n=2$, l'équation (9) nous ramène au résultat déjà trouvé :

$$\int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\,dx=1.$$

Pour $n=3$, elle donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \frac{\sin \frac{2}{3}x}{\sin \frac{x}{3}} dx = 2 + \mathrm{l}.\,2 - \frac{2}{3}\mathrm{l}.\,4,$$

ou, simplifications faites,

$$(10) \quad \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \cos\frac{x}{3}\, dx = 1 - \frac{1}{6}\mathrm{l}.\,2.$$

Ce résultat est compris dans une formule donnée plus haut.

Soit enfin $n=4$. L'équation (9) devient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \frac{\sin \frac{3}{4}x}{\sin \frac{x}{4}} dx = 3 + \mathrm{l}.\,(2\,.\,3) - \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,(2^2\,.\,3^3).$$

Développons la valeur de $\sin\frac{3x}{4}$ en fonction de $\sin\frac{x}{4}$, et appliquons la relation (2); nous aurons

$$(11) \quad \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \sin^2\frac{x}{4}\, dx = \frac{1}{8}\mathrm{l}.\,3.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ce genre d'applications de l'équation (1).

25. La transformation de la fonction $\varpi(\mu)$, opérée par l'équation (1), conduit à un développement de cette fonction en série périodique, développement remarquable en ce que ses coefficients dépendent de transcendantes bien connues. Posons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right) \frac{\sin 2\mu\pi x}{x} dx = \varphi(2\mu).$$

D'après une des formules de Fourier, nous aurons pour toute valeur de μ comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$, l'équation

$$(12) \quad \ldots\ldots \varphi(2\mu) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin 2n\mu\pi \int_0^1 \varphi(t) \sin n\pi t\, dt.$$

Or, nous avons ici

$$\int_0^1 \varphi(t) \sin n\pi t \, dt = \int_0^1 \sin n\pi t \, dt \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right) \frac{\sin t\pi x}{x} dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right) \frac{dx}{x} \int_0^1 \sin n\pi t \sin \pi x t \, dt.$$

Mais, n étant entier, on a

$$\int_0^1 \sin n\pi t \sin x\pi t \, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-x)\pi}{n-x} - \frac{\sin(n+x)\pi}{n+x}\right] = \frac{n}{\pi}\frac{\cos n\pi \sin \pi x}{n^2 - x^2},$$

donc

$$\int_0^1 \varphi(t) \sin n\pi t \, dt = -\frac{n}{\pi} \cos n\pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right) \frac{\sin \pi x}{n^2 - x^2} \cdot \frac{dx}{x}$$
$$= -\frac{n}{\pi^2} \cos n\pi \int_0^\infty \frac{\sin \pi x - \pi x \cos \pi x}{x^2 (n^2 - x^2)} dx = -n\pi \cos n\pi \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 (n^2 \pi^2 - x^2)} dx$$
$$= -\frac{\cos n\pi}{n\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} dx + \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{n^2\pi^2 - x^2} dx\right].$$

La première de ces deux intégrales a pour valeur l'unité [formule (2)]. Quant à la seconde, nous ne pouvons que la réduire aux transcendantes nommées, par les géomètres allemands, le *sinus intégral* et le *cosinus intégral;* transcendantes définies par les équations

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\sin x}{x} dx, \quad C(\alpha) = \int_\infty^\alpha \frac{\cos x}{x} dx.$$

En effet, nous avons, en vertu des relations établies par M. Schlömilch (*),

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{n\pi}\left[\sin n\pi \, C(n\pi) - \cos n\pi \, S(n\pi)\right] = -\frac{S(n\pi)\cos n\pi}{n\pi};$$

$$\int_0^\infty \frac{x \cos x \, dx}{n^2\pi^2 - x^2} = \cos n\pi \, C(n\pi) + \sin n\pi \, S(n\pi) = C(n\pi) \cos n\pi,$$

(*) *Analytische Studien*, t. II, p. 155.

et enfin

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{n^2\pi^2 - x^2}\,dx = -\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\cos n\pi.$$

D'après cela, l'équation obtenue plus haut prend la forme

$$\int_0^1 \varphi(t)\sin n\pi t\,dt = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{S(n\pi)}{n^2\pi^2} + \frac{C(n\pi)}{n\pi},$$

et la formule (12) devient, conséquemment,

$$\varphi(2\mu) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\mu\pi\cos n\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

La première série du second membre est facile à sommer. On sait, en effet, que pour toute valeur de u comprise entre zéro et π, l'on a

$$\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1} - \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu\cos n\pi}{n};$$

donc, pour toute valeur de μ comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$, $2\mu\pi$ sera compris entre zéro et π, et l'on aura

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi\cos n\pi}{n} = 2\mu.$$

La valeur de $\varphi(\mu)$ deviendra donc

$$\varphi(\mu) = 2\mu + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\frac{\sin 2n\mu\pi}{n},$$

et, en revenant à l'équation (1), on trouvera facilement

$$(13)\quad \dots \quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\sin\mu\pi + \mu + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

L'équation (13) donnera donc le développement de $\varpi(\mu)$ en série procédant suivant les sinus des multiples de $2\mu\pi$, pour toute valeur de μ comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$. Ce n'est pas, évidemment, au point de vue des calculs pratiques que cette équation offre de l'intérêt; mais, à cause de la relation qu'elle établit entre la fonction $\varpi(\mu)$ et les transcendantes $S(\alpha)$ et $C(\alpha)$, qui en avaient paru jusqu'ici assez éloignées, elle me paraît curieuse.

26. Une transformation qui se présente assez naturellement, l'équation (1) étant donnée, est celle qui consiste à remplacer, sous le signe $\int$, la fonction $\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$ par son développement en série, savoir

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

Cette substitution conduit immédiatement à l'équation

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\infty \frac{\sin 2\mu x}{n^2\pi^2 - x^2}\,dx,$$

ou, par la transformation $\mu x = n\pi z$, à celle-ci :

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu^2 - z^2}\,dz.$$

En opérant de la même manière qu'au n° 7, on réduira facilement cette équation à la forme

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \mu\sum_{k=0}^{k=\infty} \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu^2 - (k+x)^2},$$

et, en observant que l'on a

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu^2 - (k+x)^2} = \frac{1}{2\mu}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu + k + x} + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu + k + x}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left[\left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1 + \frac{1}{\mu + k}\right) + \left(\mu - k - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(\overline{1 + \frac{1}{k - \mu}}\right)\right],$$

on mettra la fonction $\varpi(\mu)$ sous la forme

$$(14)\quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.2\sin\mu\pi + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right)+\left(\mu-k-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\overline{\left(1+\frac{1}{k-\mu}\right)}\right].$$

Cette série convergente pour représenter la fonction $\varpi(\mu)$ a de l'analogie avec la série de Gudermann, mais elle présente divers inconvénients que n'a pas cette dernière, et paraît, en somme, moins commode. Nous ne nous y arrêterons donc pas davantage.

---

§ VIII.

TRANSFORMATION DE LA FONCTION $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$.

27. La formule (1) du paragraphe précédent conduit à une nouvelle expression du logarithme de la fonction $\Gamma(\mu)$, sous forme d'intégrale définie, renfermant aussi des fonctions trigonométriques au lieu des exponentielles que l'on y rencontre habituellement.

Reprenons la formule

$$(1)\quad \ldots\ldots\ \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\,\overline{\sin\mu\pi} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}\,dx.$$

En désignant par ε une quantité infiniment petite, on a

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}\,dx = \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2\mu x}{x^2}\,dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2\mu x \cos x}{\sin x}\frac{dx}{x}.$$

Or, on voit sans peine que

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2\mu x}{x^2}\,dx = \frac{\sin 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} + 2\mu\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x}{x}\,dx;$$

et, à cause de

$$\sin 2\mu x \cos x = \sin(2\mu - 1)x + \cos 2\mu x \sin x,$$

il viendra

$$\int_\varepsilon^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\sin 2\mu x}{x}\, dx = \frac{\sin 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} + (2\mu - 1)\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x}\, dx$$

$$= \frac{\sin 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} + (2\mu - 1)\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2x}{x}\, dx + \int_\varepsilon^\infty \left[(2\mu - 1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x}\right] dx.$$

Faisons tendre ε vers zéro : le premier terme du second membre a pour limite 2μ ; le second $(2\mu - 1)\,\mathrm{l}.\frac{1}{\mu}$, et il vient

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \mu - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu - 1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Portons cette valeur de $\varpi(\mu)$ dans l'équation

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu - \mu + \varpi(\mu);$$

nous aurons définitivement

$$(2) \quad . \quad . \quad \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\frac{\pi}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu - 1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Telle est la forme nouvelle donnée à $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$, et que nous voulions obtenir. L'intégrale qui y figure est toujours supposée réduite à sa valeur principale (*).

28. Cette expression de $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$ ne semble pas au premier abord se prêter facilement à l'étude des propriétés de la fonction $\Gamma(\mu)$; elle présente même

(*) Il est bon d'observer que l'on arrive directement à la formule (2) en appliquant à l'équation connue

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\pi + \int_0^\infty \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \frac{e^{-\mu x} - e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}$$

la transformation par variable imaginaire que nous avons employée au n° 17.

l'inconvénient de se composer de deux termes qui, pour des valeurs entières de μ, sont tous deux infinis. Néanmoins, il est très-curieux que cette équation conduise, de la manière la plus simple et la plus naturelle, aux propriétés caractéristiques de la fonction Γ.

Ainsi d'abord, si μ est < 1, et si l'on change μ en $1 - \mu$ dans l'équation (2), on voit immédiatement que $\sin \mu\pi$ ne change pas, et que l'intégrale définie change de signe sans changer de valeur. On a donc

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu) + \mathrm{l.}\,\Gamma(1-\mu) = \mathrm{l.}\left(\frac{\pi}{\sin \mu\pi}\right),$$

d'où la relation connue

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

En second lieu, remplaçons dans l'équation (2) μ par $\mu + 1$, et observons que l'on a

$$\overline{\sin(\mu+1)\pi} = \overline{\sin \mu\pi},$$

$$\sin(2\mu+1)x = \sin(2\mu-1)x + 2\sin x \cos 2\mu x.$$

Nous trouverons évidemment

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu+1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\frac{\pi}{\overline{\sin \mu\pi}} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu-1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x} + 2\cos 2x - 2\cos 2\mu x\right]\frac{dx}{x},$$

ou, en vertu de la formule

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x - \cos 2\mu x}{x}\,dx = \mathrm{l.}\,\mu,$$

et de l'expression de $\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu)$ donnée par la formule (2),

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu+1) = \mathrm{l.}\,\Gamma(\mu) + \mathrm{l.}\,\mu;$$

d'où enfin

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\,\Gamma(\mu),$$

autre propriété fondamentale de la fonction Γ.

29. Passons au théorème de Gauss. La formule (2) y conduit par les simples propriétés des sinus. Remplaçons successivement, dans cette formule, μ par

$$\mu, \mu+\frac{1}{n}, \mu+\frac{2}{n}, \ldots, \mu+\frac{n-1}{n},$$

et ajoutons membre à membre toutes les équations obtenues. Il vient

$$(3)\left\{\begin{aligned} &\mathrm{l.}\left[\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{\pi^n}{\sin\mu\pi\,\sin\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\pi\ldots\sin\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\pi}\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[(2n\mu-1)\cos 2x-\frac{\sin(2\mu-1)x+\sin\left(2\mu-1+\frac{2}{n}\right)x+\cdots+\sin\left(2\mu-1+\frac{2n-2}{n}\right)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}.\end{aligned}\right.$$

Or, deux formules bien connues, dues à Euler (*), nous donnent

$$\sin\mu\pi\,.\,\sin\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\pi\ldots\sin\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\pi=\frac{\sin n\mu\pi}{2^{n-1}};$$

$$\sin(2\mu-1)x+\sin\left(2\mu-1+\frac{2}{n}\right)x+\cdots+\sin\left(2\mu-1+\frac{2n-2}{n}\right)x$$

$$=\sin\left(2\mu-\frac{1}{n}\right)x\,\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{n}}=\frac{\sin(2n\mu-1)\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\sin x.$$

Donc, substitution faite, il vient

$$\begin{aligned}&\mathrm{l.}\left[\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{2^{n-1}\pi^n}{\sin n\mu\pi}\\ &+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[(2n\mu-1)\cos 2x-\frac{\sin(2n\mu-1)\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right]\frac{dx}{x}.\end{aligned}$$

(*) *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, pp. 200 et 218 (Lugduni, 1797).

Supposons d'abord l'intégrale prise à partir d'une limite infiniment petite ε, et observons que

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(2n\mu-1)\frac{x}{n}\,dx}{\sin\frac{x}{n}\quad x} = \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\infty} \frac{\sin(2n\mu-1)x\,dx}{\sin x \quad x} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(2n\mu-1)x\,dx}{\sin x \quad x} + \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\varepsilon} \frac{\sin(2n\mu-1)x\,dx}{\sin x \quad x}.$$

La dernière intégrale est une intégrale *singulière* dont la valeur, qui se trouve immédiatement, est $(2n\mu-1)\,\mathrm{l}.\,n$. Donc, si l'on substitue dans l'équation ci-dessus et que l'on fasse $\varepsilon=0$, on trouvera

$$\mathrm{l}.\left[\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\mathrm{l}.\frac{\pi}{\sin n\mu\pi}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\left[(2n\mu-1)\cos 2x-\frac{\sin(2n\mu-1)\,x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,(2\pi)^{n-1}-\frac{2n\mu-1}{2}\mathrm{l}.\,n.$$

La somme des deux premiers termes du second membre est égale, d'après (2), à $\mathrm{l}.\,\Gamma(n\mu)$; donc, passant des logarithmes aux nombres, on aura

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{n\mu-\frac{1}{2}}}\Gamma(n\mu),$$

équation qui constitue le beau théorème de Gauss.

Ces démonstrations paraissent être en défaut lorsque l'un des arguments de la fonction Γ est entier, ce qui rend illusoire la formule (2); mais il suffit d'altérer infiniment peu cet argument pour que l'équation (2), et par suite la démonstration, subsiste; et comme la fonction $\Gamma(\mu)$ est continue, il est clair que la propriété à démontrer subsistera même pour ces valeurs exceptionnelles de l'argument.

30. On prévoit que l'expression de $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$, donnée par l'équation (2), doit conduire fort facilement à la série de M. Kummer [formule (11) du § V]. Nous nous bornerons à esquisser rapidement cette démonstration, tout à fait analogue à celle de M. Schlömilch.

L'argument μ étant compris entre zéro et l'unité, deux formules connues, qui résultent de la série de Fourier, donnent

$$\mu - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\mu\pi}{n}, \qquad -\frac{\sin(2\mu-1)x}{2\sin x} = \pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n \sin 2n\mu\pi}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

De là on tire sans peine

$$(4) \int_0^\infty \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{2\sin x}\right]\frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}\int_0^\infty\left(-\cos 2x + \frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2}\right)\frac{dx}{x}.\right.$$

La valeur *principale* de l'intégrale sous le signe Σ s'obtient en remplaçant d'abord la limite inférieure zéro par un infiniment petit ε. On a

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx = -(C + \text{l}.\,2\varepsilon); \quad \int_\varepsilon^\infty \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}\frac{dx}{x} = \int_\varepsilon^\infty\left(\frac{dx}{x} + \frac{x\,dx}{n^2\pi^2 - x^2}\right) = -\text{l}.\,\varepsilon + \text{l}.\,n\pi,$$

d'où, en faisant tendre ε vers zéro,

$$\int_0^\infty\left(-\cos 2x + \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}\right)\frac{dx}{x} = C + \text{l}.\,2n\pi.$$

Substituant dans l'équation (4), et portant la valeur de l'intégrale qui figure au premier membre de (4) dans l'équation (2), on obtient

$$\text{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,\text{l}.\,\frac{\pi}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C + \text{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi,$$

ce qui est la série de M. Kummer.

31. Nous terminerons ce travail, consacré aux transformations de la fonction l. $\Gamma(\mu)$, en faisant connaître une nouvelle expression de la dérivée de cette fonction.

Considérons la formule de Dirichlet :

$$\frac{d\,.\,\text{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}}\right)dx,$$

et posons, dans cette formule, $\mu = 1$, nous rappelant que le premier membre est égal alors à $-$C. Nous aurons

$$-\mathrm{C} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right) dx,$$

et, en soustrayant membre à membre,

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{e^{(\mu-1)\frac{x}{2}} - e^{-(\mu-1)\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} e^{-\mu\frac{x}{2}} dx,$$

ou

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = 2\int_0^\infty \frac{e^{(\mu-1)x} - e^{-(\mu-1)x}}{e^x - e^{-x}} e^{-\mu x} dx.$$

Or, d'après une formule bien connue (*), qui se déduit fort facilement des séries de Fourier, on a pour toute valeur de μ comprise entre zéro et 1, et pour des valeurs quelconques de x,

$$\frac{e^{(\mu-1)x} - e^{-(\mu-1)x}}{e^x - e^{-x}} = -2\mu\left(\frac{\sin\mu\pi}{\pi^2 + x^2} + \frac{2\sin 2\mu\pi}{2^2\pi^2 + x^2} + \frac{3\sin 3\mu\pi}{3^2\pi^2 + x^2} + \cdots\right) = -2\pi\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\sin n\mu\pi}{n^2\pi^2 + x^2}.$$

Substituant dans l'intégrale ci-dessus, nous obtiendrons

$$(5)\quad \frac{d\,.\,\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\pi\int_0^\infty e^{-\mu x} dx \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n\sin n\mu\pi}{n^2\pi^2 + x^2} = -4\pi\sum_{n=1}^{n=\infty} n\sin n\mu\pi \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{n^2\pi^2 + x^2}.$$

Cette formule, où l'on voit reparaître dans le développement de $\frac{d.\mathrm{l.}\Gamma(\mu)}{d\mu}$ une transcendante déjà rencontrée dans le développement de la fonction $\varpi(\mu)$, peut conduire à des relations assez curieuses. Nous nous bornerons à signaler la suivante.

Posons, dans l'intégrale, $x = n\pi z$; il viendra

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin n\mu\pi \int_0^\infty \frac{e^{-n\pi\mu z}\,dz}{1 + z^2},$$

(*) Voy., par exemple, Catalan, *Traité élémentaire des séries*, p. 112.

ou encore

$$(6) \quad \ldots\ldots \frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\mu\pi z}\sin n\mu\pi.$$

La série qui figure sous le signe d'intégration est facile à sommer. Il suffit de poser

$$\zeta = e^{-\mu\pi(z-\sqrt{-1})},$$

et d'observer que l'on a

$$\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{\zeta}{1-\zeta} = \frac{e^{-\mu\pi(z-\sqrt{-1})}}{1-e^{-\mu\pi(z-\sqrt{-1})}} = \frac{1}{e^{\mu\pi(z-\sqrt{-1})}-1}.$$

Multiplions haut et bas cette dernière expression par $e^{\mu\pi(z+\sqrt{-1})}$ pour rendre réel le dénominateur. Nous aurons

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\mu\pi z}\, e^{n\mu\pi\sqrt{-1}} = \frac{e^{\mu\pi z}\, e^{\mu\pi\sqrt{-1}}}{1-2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}},$$

et, en égalant les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\mu\pi z}\sin n\mu\pi = \frac{e^{\mu\pi z}\sin\mu\pi}{1-2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}.$$

Par cette substitution, l'équation (6) devient

$$\frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{e^{\mu\pi z}}{1-2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2},$$

et, par suite,

$$(7) \quad \ldots \int_0^\infty \frac{e^{\mu\pi x}}{1-2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4\sin\mu\pi}\left[\frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C}\right].$$

Cette intégrale est donc ramenée à une transcendante bien connue, pourvu que la valeur de μ soit moindre que l'unité. Par exemple, si l'on transforme le second membre au moyen d'une relation donnée par Gauss, on aura

$$(8) \quad \ldots \int_0^\infty \frac{e^{\mu\pi z}}{1-2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4\sin\mu\pi}\int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx.$$

Comme l'intégrale du second membre s'obtient sous forme finie, toutes les fois que μ est rationnel, il en sera de même du premier membre. Ainsi, pour $\mu = \frac{1}{2}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1 - x^{-\frac{1}{2}}}{1 - x}\, dx = 2\int_0^1 \frac{z - 1}{1 - z^2}\, dz = -2\int_0^1 \frac{dz}{1 + z} = -2\,\mathrm{l}.\,2,$$

donc, par la relation (8),

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}z} + e^{-\frac{\pi}{2}z}}\,\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2,$$

résultat déjà trouvé par Legendre (*).

De même, si dans l'équation (8) on pose $\mu = \frac{1}{4}$, on trouvera d'abord

$$\int_0^1 \frac{1 - x^{-\frac{3}{4}}}{1 - x}\, dx = 4\int_0^1 \frac{z^3 - 1}{1 - z^4}\, dz = -\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{l}.\,8\right).$$

Substituant dans l'équation (8) et observant que

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi z}{4}}}{1 - \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi z}{4}} + e^{\frac{\pi z}{2}}}\,\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{l}.\,8\right),$$

égalité qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1 - \sqrt{2}\,e^x + e^{2x}}\,\frac{dx}{\pi^2 + 16x^2} = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{l}.\,8}{\pi}\right).$$

(*) *Exercices de calcul intégral*, t. II, p. 50.