PREMIÈRE PARTIE.

§ I.

SUR LA SÉRIE DE GUDERMANN.

1. Depuis que Binet (*) et Cauchy (**) ont mis le logarithme de la fonction $\Gamma(\mu)$ sous la forme suivante :

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{l.}\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\,\mu - \mu + \varpi(\mu),$$

dans laquelle l. désigne le logarithme népérien, et $\varpi(\mu)$ l'intégrale définie

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx,$$

la fonction $\varpi(\mu)$ a été développée de bien des manières en séries convergentes. Parmi les formules obtenues par les géomètres, l'une des plus célèbres est celle de Gudermann (***). Je me propose de montrer ici que la

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 27me cah., p. 243.
(**) *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, t. II, p. 386.
(***) *Journal de Crelle*, t. XXIX, p. 209.

propriété de la fonction $\varpi(\mu)$ de s'évanouir pour $\mu = \infty$, propriété qui se voit à la simple inspection de l'équation (2), étant combinée avec la relation fondamentale

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad \Gamma(\mu + 1) = \mu\Gamma(\mu),$$

suffit pour conduire très-simplement à la série de Gudermann avec l'expression du reste complémentaire.

On tire, en effet, de la relation précédente

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu + 1) = \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) + \mathrm{l}.\,\mu,$$

et, en remplaçant $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu+1)$, $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$ par leurs valeurs déduites de la formule (1),

$$\varpi(\mu) - \varpi(\mu + 1) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) - 1.$$

Changeons μ en $\mu + k$, k désignant un nombre entier quelconque; il vient

$$\varpi(\mu + k) - \varpi(\mu + k + 1) = \left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1 + \frac{1}{\mu + k}\right) - 1,$$

puis, si nous faisons successivement $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ et ajoutons membre à membre,

$$\varpi(\mu) = \sum_{k=0}^{k=n}\left[\left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1 + \frac{1}{\mu + k}\right) - 1\right] + \varpi(\mu + n + 1).$$

Lorsque n croît indéfiniment, $\varpi(\mu + n + 1)$ a pour limite zéro, d'après l'observation faite ci-dessus; *donc la série est convergente* et l'on a

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad \varpi(\mu) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1 + \frac{1}{\mu + k}\right) - 1\right],$$

ce qui est la formule de Gudermann (*).

Il suit de la démonstration précédente que le *reste*, après le n^{me} terme, est

$$\varpi(\mu + n) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-(\mu+n)x}}{x}\,dx.$$

(*) On peut consulter, sur la série de Gudermann, deux notes de MM. Serret et O. Bonnet, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. L, pp. 662 et 862.

2. La série de Gudermann conduit à une expression de la fonction $\Gamma(\mu)$ sous forme d'un produit infini, expression de laquelle il est facile de tirer celle que Gauss avait adoptée comme définition de cette fonction.

On reconnaît d'abord sans peine que

$$\sum_{k=0}^{k=n}\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)[\mathrm{l}.(\mu+k+1)-\mathrm{l}.(\mu+k)]=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)[\mathrm{l}.(\mu+n+1)-\mathrm{l}.\mu]$$
$$+n\,\mathrm{l}.(\mu+n+1)-\sum_{k=1}^{k=n}\mathrm{l}.(\mu+k),$$

d'où

$$\varpi(\mu)=-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\mu+lim.\left[\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.(\mu+n+1)-(n+1)-\sum_{k=1}^{k=n}\mathrm{l}.(\mu+k)\right],$$

la limite se rapportant à n indéfiniment croissant.

Mais comme l'on a

$$\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.(\mu+n+1)=\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.n+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right)+n\,\mathrm{l}.\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right),$$

et que, dans le second membre de cette équation, le deuxième terme et le troisième ont respectivement pour limites zéro et $\mu+1$, la valeur de $\varpi(\mu)$ se transforme comme il suit :

$$\varpi(\mu)=-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\mu+\mu+lim.\left[\left(\mu+n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.n-n-\sum_{k=1}^{k=n}\mathrm{l}.(\mu+k)\right],$$

et la formule (1) devient

$$\mathrm{l}.\Gamma(\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{l}.2\pi-\mathrm{l}.\mu+lim.\,\mathrm{l}.\left[\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots.(\mu+n)}\right].$$

Passant des logarithmes aux nombres, on a enfin

$$(4)\quad .\ .\ .\ .\ .\ \Gamma(\mu)=\sqrt{2\pi}\,lim.\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\mu(\mu+1)\ldots..(\mu+n)},\quad (lim.\,n=\infty).$$

3. L'équation (4) est bien facile à établir, la formule de Stirling étant admise. En effet, d'après une relation connue qui se déduit immédiatement de la relation (α), on a, pour un entier n aussi grand qu'on le veut,

$$\Gamma(\mu) = \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)}.$$

La formule de Stirling donne d'ailleurs

$$\Gamma(\mu+n+1) = \sqrt{2\pi}(\mu+n+1)^{\mu+n+\frac{1}{2}} e^{-(\mu+n+1)}(1+\varepsilon),$$

ε tendant vers zéro quand n devient infini; d'où encore, à cause de

$$(\mu+n+1)^{\mu+n+\frac{1}{2}} = n^{\mu+n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right)^{n},$$

et des égalités

$$\lim\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right)^{\mu+\frac{1}{2}} = 1, \quad \lim\left(1+\frac{\mu+1}{n}\right)^{n} = e^{\mu+1}, \quad \text{pour } n=\infty,$$

on a

$$\Gamma(\mu+n+1) = \sqrt{2\pi}\, n^{\mu+n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+\varepsilon'),$$

ε' convergeant vers zéro. La valeur de $\Gamma(\mu)$ peut donc s'écrire, si l'on fait croître n indéfiniment,

$$\Gamma(\mu) = \sqrt{2\pi}\lim\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)},$$

ce qui nous ramène à la formule (4).

4. La formule de Stirling donne encore, ε'' étant infiniment petit,

$$1.2.3\dots n = \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1+\varepsilon''),$$

d'où la relation (4) prend la forme

$$\Gamma(\mu) = \lim\frac{1.2.3\dots n}{\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)} n^{\mu}, \quad (\lim n = \infty),$$

et nous retrouvons ici l'expression de $\Gamma(\mu)$ sous forme de produit infini dont Gauss a fait un usage si remarquable.

Je ne pense pas que ces relations si simples, entre l'équation $\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu)$, la série de Gudermann, la formule de Stirling et celle de Gauss, aient été signalées jusqu'ici, non plus que la remarque suivante :

D'après l'équation (4), on a, pour de très-grandes valeurs de n, quel que soit μ,

$$\mu(\mu+1)\dots(\mu+n)=\sqrt{2\pi}\,\frac{n^{\mu+n+\frac{1}{2}}e^{-n}}{\Gamma(\mu)}\cdot$$

Cette relation, plus générale que celle de Stirling, permettra donc d'évaluer par approximation le produit $\mu(\mu+1)\dots.(\mu+n)$, au moyen de la transcendante $\Gamma(\mu)$, dont on a des tables. Ainsi, pour $\mu=\frac{1}{2}$, on aura $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, et l'égalité précédente nous donnera, réductions faites,

$$1.3.5\dots(2n+1)=\sqrt{2}\,(2n)^{n+1}e^{-n},$$

n étant un nombre entier très-grand.

---

§ II.

SUR LA CONSTANTE D'EULER.

5. Des formules

$$\Gamma(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx,\qquad \Gamma'(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\,\mathrm{l}.\,xdx,$$

on déduit, en posant $\mu=1$,

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}=\left[\frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu}\right]_{\mu=1}=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{l}.\,xdx;$$

ou, C désignant la constante d'Euler,

$$-\mathrm{C}=\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{l}.\,xdx.$$

Mais on a

$$\int e^{-x}\,\mathrm{l}.\,x dx = -e^{-x}\,\mathrm{l}.\,x + \int \frac{e^{-x}dx}{x},$$

et par suite, ε désignant toujours une quantité positive et infiniment petite,

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\,\mathrm{l}.\,x dx = e^{-\varepsilon}\,\mathrm{l}.\,\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}.$$

Comme d'ailleurs $(e^{-\varepsilon} - 1)\,\mathrm{l}.\,\varepsilon$ a pour limite zéro, on peut remplacer $e^{-\varepsilon}\,\mathrm{l}.\,\varepsilon$ par $\mathrm{l}.\,\varepsilon$, et écrire

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad -\mathrm{C} = lim.\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} + \mathrm{l}.\,\varepsilon\right), \quad (lim.\,\varepsilon = 0).$$

Cette formule, qui justifie celle que Bidone a donnée dans les *Mémoires de Turin* pour 1812, se tire aussi très-facilement de l'expression de $\frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu}$ trouvée par Dirichlet.

Si, a étant une constante positive, l'on remplace dans l'équation (1) ε par $a\varepsilon$, et si l'on observe que

$$\int_{a\varepsilon}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} = \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax}dx}{x},$$

on aura cette autre égalité :

$$-\mathrm{C} = lim.\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax}}{x}dx + \mathrm{l}.\,a\varepsilon\right).$$

Enfin, l'on peut encore combiner avec cette équation la suivante, qui est connue (*) :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - \cos ax}{x}dx = 0,$$

et l'on aura la formule souvent utile

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -\mathrm{C} = lim.\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos ax}{x}dx + \mathrm{l}.\,a\varepsilon\right).$$

(*) On y parvient très-simplement en intégrant la fonction $\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{z}dz$ le long d'un contour fermé composé 1° de l'axe des x positifs; 2° d'un quart de circonférence de rayon indéfiniment croissant; 3° de l'axe des y positifs; 4° d'un quart de circonférence de rayon infiniment petit autour de l'origine.

D'où

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\cos ax}{x}\, dx = -(\mathrm{C} + \mathrm{l}.\, a\varepsilon),$$

en négligeant une quantité qui tend vers zéro en même temps que ε.

L'équation (3) revient aussi à une formule de Bidone.

---

§ III.

TRANSFORMATION ET DÉVELOPPEMENT DE $\varpi(\mu)$.

6. Cauchy a fait voir qu'en remplaçant, dans l'équation (2) du § Ier, la fonction

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

par son développement en série convergente, savoir

$$\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{4n^2\pi^2 + x^2},$$

on obtient la série convergente

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \varpi(\mu) = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu x}\, dx}{4n^2\pi^2 + x^2} \ (*).$$

D'autre part, de l'égalité

$$\int_0^{\infty} e^{-xz} \sin az\, dz = \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad (x > 0),$$

(*) Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. II, p. 393. — Voy. Limbourg, *Théorie de la fonction Gamma*, p. 46.

on déduit sans peine celle-ci :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\mu x}dx \int_0^\infty e^{-xz}\sin azdz = \frac{1}{a}\int_0^\infty \sin azdz \int_0^\infty e^{(\mu+z)x}dx,$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\sin azdz}{\mu+z} \ (*).$$

Si donc nous remplaçons a par $2n\pi$, et si nous substituons dans l'expression de $\varpi(\mu)$, celle-ci deviendra

(2) . . . . $$\varpi(\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu+z}dz.$$

C'est de cette forme nouvelle, donnée à la transcendante $\varpi(\mu)$, que nous allons maintenant déduire diverses conséquences remarquables.

7. Observons d'abord que l'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dz}{\mu+z}\left(\sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{n}\right).$$

Or, la série qui figure sous le signe $\int$ est facile à sommer. On sait, en effet, que pour toute valeur de u comprise entre zéro et 2π, l'on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{2},$$

(*) Voy. Meyer, *Intégrales définies*, p. 365. Cette formule, à laquelle M. Schlömilch est parvenu un peu moins simplement (*Analytische Studien*, t. II, p. 146), s'obtient encore comme il suit : Si, dans la dernière équation de la page 45 de mon *Mémoire sur la diffraction*, on pose $\lambda=1$, on trouve

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}\cos a\alpha + \int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{a^2-y^2}dy.$$

Mais on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{a^2-y^2}dy = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{a+y}dy + \frac{1}{a}\int_0^\infty y\frac{\sin \alpha y}{a^2-y^2}dy,$$

et, en remplaçant cette dernière intégrale par sa valeur connue $-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha$, on retombera sur la formule du texte.

et comme le premier membre est une fonction périodique de u, à période 2π, on aura, pour toute valeur de u comprise entre $2k\pi$ et $2(k+1)\pi$, k désignant un nombre entier quelconque,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nu}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{u - 2k\pi}{2} = \frac{2k+1}{2}\pi - \frac{u}{2}.$$

Donc aussi, pour toute valeur de z comprise entre k et $k+1$,

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\pi z}{n} = \frac{\pi}{2}(2k+1-2z).$$

Décomposons l'intégrale ci-dessus en une infinité d'autres, ayant respectivement pour limites 0 et 1, 1 et 2, 2 et 3, etc., puisque l'on a

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \ldots,$$

et remplaçons, dans chacune de ces intégrales, la fonction $\Sigma \frac{\sin 2n\pi z}{n}$ par la valeur correspondante fournie par l'équation (3). Nous aurons évidemment

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-2z)}{\mu+z}dz + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(3-2z)}{\mu+z}dz + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{(5-2z)\,dz}{\mu+z} + \ldots,$$

ou bien

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_k^{k+1} \frac{(2k+1-2z)\,dz}{\mu+z},$$

ou enfin, en remplaçant z par $k+x$ sous le signe d'intégration, afin d'avoir pour limites zéro et l'unité,

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x}.$$

La transformation précédente présente ceci de remarquable, que la fonction $\varpi(\mu)$, qui, dans les équations (1) et (2), était exprimée par une série composée d'intégrales transcendantes, se trouve, dans l'équation (4), représentée par une série composée d'intégrales définies à différentielles rationnelles. La convergence de cette série résulte de la démonstration même.

8. La formule (4) donne immédiatement la série de Gudermann. En effet,

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\mu+k+x}dx=\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\int_0^1\frac{dx}{\mu+k+x}-\int_0^1 dx=\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(\frac{\mu+k+1}{\mu+k}\right)-1,$$

d'où

$$(5)\ \ldots\ldots\quad \varpi(\mu)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right)-1\right],$$

ce qui est la série de Gudermann.

De même, si dans l'intégrale qui précède on développe la fonction

$$\frac{1}{\mu+k+x}$$

suivant les puissances ascendantes de x, on obtient la série donnée par Cauchy (*), ce qui n'offre ici que peu d'intérêt, puisque cette série n'est qu'une simple transformation de la série de Gudermann (**).

Mais, ce qui est plus curieux, l'équation (4) conduit aussi immédiatement à la série double de Binet (***). En effet, posant

$$x=1-z,\quad dx=-dz,$$

on trouve

$$\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x}=\int_0^1\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{(\mu+k+1)-z},$$

et comme z est égal ou inférieur à l'unité, on a en série convergente

$$\frac{1}{(\mu+k+1)-z}=\frac{1}{\mu+k+1}\left[1+\frac{z}{\mu+k+1}+\frac{z^2}{(\mu+k+1)^2}+\cdots\right];$$

(*) *Exercices d'Analyse*, t. II, p. 388, équation (6). Dans un rapport sur un travail de M. De Tilly, j'ai attribué cette série à Féaux, d'après Gudermann (*Journal de Crelle*, t. XXIX, p. 209), mais le mémoire de Cauchy est antérieur.

(**) Limbourg, *Théorie de la fonction Gamma*, p. 62.

(***) *Journal de l'École polytechnique*, 27^{me} Cahier, p. 226. — Voy. aussi Cauchy, *Mém. cité*, p. 388.

d'où, substituant et observant que

$$\int_0^1 \left(z-\frac{1}{2}\right) z^n dz = \frac{n}{2(n+1)(n+2)},$$

on obtient

$$\int_0^1 \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{(\mu+k+1)-z} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}\frac{1}{(\mu+k+1)^2} + \frac{2}{3.4}\frac{1}{(\mu+k+1)^3} + \frac{3}{4.5}\frac{1}{(\mu+k+1)^4} + \cdots\right].$$

Transportant cette valeur de l'intégrale dans l'équation (4), et groupant ensemble les termes affectés des mêmes facteurs numériques, ce qui n'offre aucune difficulté puisque tous les termes sont positifs, nous obtiendrons la série de Binet :

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k+1)^2} + \frac{2}{3.4}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k+1)^3} + \cdots\right].$$

9. L'équation (4) conduit facilement à des séries nouvelles, notablement plus convergentes que les précédentes. Posons, dans l'intégrale qui figure sous le signe sommatoire,

$$\frac{1}{2} - x = z,$$

d'où

$$dx = -dz.$$

Nous aurons

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\mu+k+x}dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{zdz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{zdz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z} - \int_0^{-\frac{1}{2}} \frac{zdz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z},$$

ou, en changeant z en $-z$ dans cette dernière intégrale,

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x} = \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)-z} - \frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)+z}\right]zdz = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2 - z^2}.$$

Mais, z étant compris entre zéro et $\frac{1}{2}$, on a, en série toujours convergente,

$$\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2}=\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}\left[1+\frac{z^2}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{z^4}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^4}+\cdots\right];$$

et, par suite,

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2}=\frac{2}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}\left[\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{7.2^7}\frac{1}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^4}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{(2\mu+2k+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2\mu+2k+1)^4}+\frac{1}{7}\frac{1}{(2\mu+2k+1)^6}+\cdots$$

Substituant dans la valeur de $\varpi(\mu)$ et groupant les termes différemment, nous aurons

$$(7).\quad \varpi(\mu)=\frac{1}{3}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^2}+\frac{1}{5}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^4}+\frac{1}{7}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^6}+\cdots,$$

série assez convergente lorsque μ est un peu considérable.

La relation (7) renferme diverses conséquences curieuses. Par exemple, posons $\mu=\frac{1}{2}$; nous trouverons

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3.2^2}\sum_0^\infty\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{5.2^4}\sum_0^\infty\frac{1}{(k+1)^4}+\cdots,$$

ou, plus simplement,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3.2^2}\sum_1^\infty\frac{1}{k^2}+\frac{1}{5.2^4}\sum_1^\infty\frac{1}{k^4}+\cdots.$$

Mais on sait que

$$\sum_1^\infty\frac{1}{k^{2n}}=\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}B_n}{1.2.3\ldots 2n},$$

$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ désignant les nombres de Bernoulli. Substituant dans l'équation ci-dessus, remplaçant $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur connue, qui est $\frac{1}{2}(1-\mathrm{l}.2)$, nous trouverons cette formule curieuse :

$$1-\mathrm{l}.2=\frac{\pi^2}{1.2.3}B_1+\frac{\pi^4}{1.2.3.4.5}B_2+\frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6.7}B_3+\cdots,$$

qui associe les nombres bernoulliens, le nombre π et le logarithme népérien de 2 dans une même équation.

Si l'on remplaçait, dans cette égalité, les nombres B_n par leurs expressions sous forme d'intégrales définies, données par Plana, on retomberait, après quelques transformations, sur une identité.

10. L'intégration par partie, appliquée à la formule (4), conduit à d'autres séries convergentes pour le développement de $\varpi(\mu)$. On a, en effet,

$$\int_0^z \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} = \frac{1}{3}\frac{z^3}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} - \frac{2}{3}\int_0^z \frac{z^4dz}{\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{z^3}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} - \frac{2}{3.5}\frac{z^5}{\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\right]^2} + \frac{2.4}{3.5}\int_0^z \frac{z^6dz}{\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2\right]^3},$$

et ainsi de suite. Le dernier terme tend vers zéro quand l'opération se prolonge indéfiniment, parce que z reste inférieur à $\frac{1}{2}$.

On a donc, en série convergente,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2} = \frac{1}{3.2^3}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)} - \frac{1}{3.5.2^4}\frac{1}{(\mu+k)^2(\mu+k+1)^2}$$
$$+ \frac{1.2}{3.5.7.2^6}\frac{1}{(\mu+k)^3(\mu+k+1)^3} - \ldots$$

Substituons cette valeur de l'intégrale dans la formule

$$\varpi(\mu) = 2\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z^2dz}{\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)^2-z^2},$$

et observons que, la série qui représente l'intégrale définie restant convergente lorsqu'on réduit ses différents termes à leurs valeurs absolues, il est permis de grouper ensemble les termes de même rang.

Nous aurons

$$(8)\left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{3.2^2}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}-\frac{1}{3.5.2^3}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^2(\mu+k+1)^2}\\&+\frac{1.2}{3.5.7.2^4}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^3(\mu+k+1)^3}-\frac{1.2.3}{3.5.7.9.2^5}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^4(\mu+k+1)^4}+\ldots(*).\end{aligned}\right.$$

Les termes étant alternativement positifs et négatifs, et toujours décroissants, l'erreur commise lorsqu'on arrête la série en un point quelconque est toujours moindre que le premier terme négligé.

Cette série, comme toutes les précédentes, converge d'autant plus rapidement que μ a une valeur plus grande.

---

§ IV.

DÉVELOPPEMENT DE $\varpi(\mu)$ (*suite*).

11. On doit à Binet une série remarquable pour représenter la fonction $\varpi(\mu)$, série que Cauchy a retrouvée par une analyse savante, mais assez pénible (**). Notre formule (4) du § III conduit avec une extrême facilité à la série de Binet, ainsi qu'à l'expression du reste de cette série, ce qui n'avait été obtenu jusqu'ici que pour des valeurs entières de μ.

On démontre sans peine l'identité suivante, due à Stirling (***) :

$$\frac{1}{u+\alpha}=\frac{1}{u}-\frac{\alpha}{u(u+1)}-\frac{\alpha(1-\alpha)}{u(u+1)(u+2)}-\ldots-\frac{\alpha(1-\alpha)\ldots(n-1-\alpha)}{u(u+1)\ldots(u+n)}-\frac{\alpha(1-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{u(u+1)\ldots(u+n)(u+\alpha)}.$$

(*) D'après une formule que nous aurons l'occasion de citer plus loin, le premier terme de cette suite se réduit à $\frac{1}{12\mu}$.

(**) Binet, *Journal de l'École polytechnique*, 27[me] cahier, p. 226. — Cauchy, *Mém. cité*, p. 389. — Voy. encore, sur cette série de Binet : Limbourg, p. 65. — Genocchi, *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, t. XXII, 2[me] partie, p. 392. — De Tilly, *même collection*, t. XXXV, 2[me] série, p. 30.

(***) Voy., par exemple, la note de M. Genocchi, citée plus haut.

Si l'on y fait $u = \mu + k$, $\alpha = x$, elle devient

$$\frac{1}{\mu+k+x} = \frac{1}{\mu+k} - \frac{x}{(\mu+k)(\mu+k+1)} - \frac{x(1-x)}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)} - \cdots$$
$$- \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-1-x)}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)} - \frac{x(1-x)\ldots(n-x)}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)(\mu+k+x)}.$$

De là nous tirons

$$\int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\mu+k+x} = \frac{1}{\mu+k}\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx - \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$-\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)}\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx - \cdots$$
$$-\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}\int_0^1 x(1-x)\ldots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$
$$-\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}\int_0^1 \frac{x(1-x)\ldots(n-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\mu+k+x}dx.$$

Le premier terme du second membre disparaît, car l'on a

$$\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx = 0.$$

Substituons dans l'équation

$$\varpi(\mu) = -\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\mu+k+x},$$

et observons que les intégrales relatives à x sont, sauf la dernière, indépendantes de k. Nous aurons évidemment

$$\left\{\begin{aligned}
\varpi(\mu) &= \left[\sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}\right]\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx \\
&+ \left[\sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)}\right]\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + \cdots \\
&+ \left[\sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}\right]\int_0^1 x(1-x)\ldots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx \\
&+ \sum_0^\infty \frac{1}{(\mu+k)\ldots(\mu+k+n)}\int_0^1 \frac{x(1-x)\ldots(n-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\mu+k+x}dx.
\end{aligned}\right.$$

Mais on sait, d'autre part, par des relations dues à Stirling, que l'on a

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}=\frac{1}{\mu},\quad \sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)(\mu+k+2)}=\frac{1}{2\mu(\mu+1)},\ldots$$
$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}=\frac{1}{n\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}\ (^*).$$

Il viendra donc

$$(1).\ .\ \left\{\begin{aligned}&\varpi(\mu)=\frac{1}{\mu}\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{1}{2\mu(\mu+1)}\int_0^1 x(1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\cdots\\&+\frac{1}{n\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}\int_0^1 x(1-x)\ldots(n-1-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\mathrm{R}_n,\end{aligned}\right.$$

équation dans laquelle on a posé

$$(2).\ .\ \mathrm{R}_n=\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)}\int_0^1\frac{x(1-x)\ldots(n-x)}{\mu+k+x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx.$$

La formule (1) est la série de Binet. L'équation (2) donne l'expression du reste de la série après le n^{me} terme. Sa limite supérieure, que nous allons déterminer, fournira à la fois la preuve de la convergence de la série et la limite de l'erreur commise lorsqu'on néglige le reste.

12. Observons que, dans l'intégrale qui figure sous le signe Σ, le facteur $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ est négatif depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$, positif depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, les autres facteurs étant toujours positifs. Si donc nous partageons l'intégrale en deux autres, ayant respectivement pour limites 0 et $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ et 1, la première aura une valeur négative $-\mathrm{A}$, la seconde une valeur positive $+\mathrm{B}$, et la valeur absolue de l'intégrale entière sera $<\mathrm{A}+\mathrm{B}$. Or, nous avons

$$\mathrm{A}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{\mu+k+x}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx<\frac{1.2.3\ldots n}{\mu}\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{2}-x\right)dx,$$

(*) Bertrand, *Traité de calcul différentiel*, p. 226.

$$B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x(1-x)(2-x)\ldots(n-x)}{\mu+k+x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx < \frac{1.2.3\ldots n}{\mu}\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx,$$

d'où, remplaçant ces deux intégrales par leurs valeurs numériques,

$$A + B < \frac{1.2.3\ldots n}{8\mu}.$$

Nous aurons donc, R_n étant réduit à sa valeur absolue,

$$R_n < \frac{1.2.3\ldots n}{8\mu}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)\ldots(\mu+k+n)},$$

ou, d'après les formules de Stirling rappelées ci-dessus,

$$R_n < \frac{1}{8\mu}\frac{1.2.3\ldots n}{n\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)} = \frac{1}{8\mu^2}\frac{1.2.3\ldots(n-1)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}$$
$$= \frac{1}{8\mu^2}\frac{1}{(1+\mu)\left(1+\frac{\mu}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{\mu}{n-1}\right)},$$

d'où, encore,

$$R_n < \frac{1}{8\mu^2}\frac{1}{1+\mu\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)},$$

Mais on sait que, si l'on désigne par C la constante d'Euler dont la valeur est

$$C = 0{,}57721566\ldots\ldots,$$

on a, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n,

$$lim.\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} - \mathrm{l.}(n-1)\right] = C,$$

et l'on reconnaît sans peine que le premier membre décroît constamment à partir de $n = 2$, en sorte que l'on a

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} > C + \mathrm{l.}(n-1).$$

Donc

$$(5) \quad \dots\dots\dots\dots \quad R_n < \frac{1}{8\mu^2}\frac{1}{1+\mu C+\mu\, \mathrm{l}.(n-1)}.$$

Or, lorsque n croît indéfiniment, l. $(n-1)$ tend vers l'infini, donc R_n tend vers zéro; la série est donc convergente pour toute valeur positive de μ. L'inégalité précédente fournit d'ailleurs une limite supérieure, facile à calculer, de l'erreur que l'on commet en bornant la série de Binet à ses n premiers termes. Il ne serait pas difficile d'obtenir des limites plus resserrées, mais d'un calcul moins simple. On peut aussi mettre R_n sous la forme d'une intégrale définie double.

Nous ferons encore deux remarques au sujet de la série de Binet. Lorsque μ est un nombre entier, la formule (2) coïncide, comme on le voit sans peine, avec celle que M. De Tilly a trouvée pour exprimer le reste R_n dans ce cas particulier (*).

En second lieu, la source d'où nous avons tiré la série de Binet, savoir la formule (4) du paragraphe précédent, met en évidence la relation intime qui existe entre cette série et celle de Gudermann. La première résulte, en effet, tout simplement, du développement en série d'une intégrale définie dont la seconde utilise l'expression sous forme finie, savoir

$$\int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\mu+k+x}.$$

Il s'ensuit que si, dans l'expression du reste R_n, on effectue l'intégration indiquée, on ne fera que reproduire avec des signes contraires les termes déjà développés de la série, et revenir à l'intégrale primitive qui, étant remplacée par sa valeur sous forme finie, ramènera à la série de Gudermann. Ceci s'accorde avec une observation faite par M. De Tilly (**).

13. La série de Binet n'est qu'un cas particulier d'une formule beaucoup

(*) *Bulletins de l'Acad.*, loc. cit., p. 58.
(**) Page 59 du travail cité plus haut.

plus générale, qui fournit une infinité de développements convergents pour la fonction $\varpi(\mu)$: sa démonstration, semblable à celle que nous avons donnée plus haut, s'appuie sur quelques transformations assez curieuses.

Désignons par β une quantité quelconque, par p un nombre entier arbitraire. La suite d'identités

$$\frac{1}{u+\alpha}=\frac{1}{u+\beta}+\frac{\beta-\alpha}{(u+\beta)(u+\alpha)}=\frac{1}{u+\beta}+\frac{\beta-\alpha}{(u+\beta)(u+\beta+p)}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)(u+\alpha)},\text{ etc.},$$

conduit évidemment à la formule suivante, plus générale que celle de Stirling :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u+\alpha}=&\frac{1}{u+\beta}+\frac{\beta-\alpha}{(u+\beta)(u+\beta+p)}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)(u+\beta+2p)}+\ldots\\&+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)\ldots(\beta+\overline{n-1}\,p-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)\ldots(u+\beta+np)}+\frac{(\beta-\alpha)(\beta+p-\alpha)\ldots(\beta+np-\alpha)}{(u+\beta)(u+\beta+p)\ldots(u+\beta+np)(u+\alpha)}.\end{aligned}$$

Remplaçons, dans cette égalité, u par $\mu+k$, α par x; nous aurons le développement de $\frac{1}{\mu+k+x}$, et par suite, l'équation

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\left(\frac{1}{2}-x\right)dx}{\mu+k+x}=&\frac{1}{\mu+k+\beta}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)}\int_0^1(\beta-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)(\mu+k+\beta+2p)}\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\cdots\\&+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)\ldots(\mu+k+\beta+np)}\\&\times\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+\overline{n-1}\,p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\frac{1}{(\mu+k+\beta)(\mu+k+\beta+p)\ldots(\mu+k+\beta+np)}\\&\times\int_0^1\frac{(\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+np-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)}{\mu+k+x}dx.\end{aligned}$$

Observons que, ici encore,

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)dx=0,$$

substituons la valeur de l'intégrale ci-dessus dans la formule (4) du § III, et groupons ensemble tous les termes qui ont pour coefficient une même intégrale indépendante de k. Il viendra

$$\begin{aligned}
\varpi(\mu) = & \left[\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)}\right] \int_0^1 (\beta-x)\left(x-\frac{1}{2}\right) dx \\
& + \left[\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)(\mu+\beta+k+2p)}\right] \int_0^1 (\beta-x)(\beta+p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right) dx \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + \left[\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)\ldots(\mu+\beta+k+np)}\right] \\
& \times \int_0^1 (\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+\overline{n-1}\,p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right) dx + \mathrm{R}_n,
\end{aligned}$$

équation où l'on a posé

$$(4)\ldots\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{R}_n = & \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)\ldots(\mu+\beta+k+np)} \\
& \times \int_0^1 \frac{(\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+np-x)\left(\frac{1}{2}-x\right) dx}{\mu+k+x}.
\end{aligned}\right.$$

Les séries qui figurent dans le développement de $\varpi(\mu)$ sont faciles à sommer. On voit sans peine, en effet, que si θ désigne une quantité arbitraire, on a

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{1}{\theta+k} - \frac{1}{\theta+k+p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{\theta+k};$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)(\theta+k+2p)} & = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)} - \frac{1}{(\theta+k+p)(\theta+k+2p)}\right] \\
& = \frac{1}{2p^2}\sum_{k=0}^{k=p-1}\left(\frac{1}{\theta+k} - \frac{1}{\theta+k+p}\right) = \frac{1}{2p}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)},
\end{aligned}$$

et, en général,

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)\ldots(\theta+k+np)} = \frac{1}{np}\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\theta+k)(\theta+k+p)\ldots(\theta+k+\overline{n-1}\,p)}.$$

Il suffit de poser, dans ces formules, $\theta=\mu+\beta$, pour donner à l'expression de $\varpi(\mu)$, trouvée plus haut, la forme suivante :

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{p}\left[\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{\mu+\beta+k}\right]\int_0^1(\beta-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\frac{1}{2p}\left[\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)}\right]\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{1}{np}\left[\sum_{k=0}^{k=p-1}\frac{1}{(\mu+\beta+k)(\mu+\beta+k+p)\ldots(\mu+\beta+k+\overline{n-1}\,p)}\right]\\&\times\int_0^1(\beta-x)(\beta+p-x)\ldots(\beta+\overline{n-1}\,p-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\mathrm{R}_n.\end{aligned}\right.$$

Un raisonnement semblable à celui que nous avons fait plus haut, appliqué à l'expression (4) de R_n, montrerait que ce reste converge vers zéro lorsque n croît indéfiniment, et que, par conséquent, la série (5) est convergente.

Si, dans l'équation (5), on pose $\beta=0$, $p=1$, on retrouve la série de Binet.

Si l'on pose $\beta=1$, $p=1$, on a

$$\varpi(\mu)=\frac{1}{\mu+1}\int_0^1(1-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)}\int_0^1(1-x)(2-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\cdots,$$

ou, en remplaçant x par $1-z$ dans les intégrales,

$$(6)\ .\ \left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{\mu+1}\int_0^1 z\left(z-\frac{1}{2}\right)dz+\frac{1}{2(\mu+1)(\mu+2)}\int_0^1 z(1+z)\left(z-\frac{1}{2}\right)dz\\&+\frac{1}{3(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\int_0^1 z(1+z)(2+z)\left(z-\frac{1}{2}\right)dz+\cdots;\end{aligned}\right.$$

série analogue à celle de Binet, et que l'on pourrait aussi obtenir par d'autres procédés.

Posons encore, dans l'équation (5), $\beta=\frac{1}{2}$, $p=1$. Il viendra

$$\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)^2dx+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\left(\frac{3}{2}-x\right)dx\\&+\frac{1}{3\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\left(\mu+\frac{5}{2}\right)}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\left(\frac{3}{2}-x\right)\left(\frac{5}{2}-x\right)dx+\cdots;\end{aligned}$$

ou, si l'on pose $x=\frac{1}{2}-z$,

$$(7)\ \ldots \left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}z^2dz+\frac{1}{2\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}z^2(1-z)\,dz\\&+\frac{1}{3\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\left(\mu+\frac{3}{2}\right)\left(\mu+\frac{5}{2}\right)}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}z^2(1-z)(2-z)\,dz+\cdots\end{aligned}\right.$$

En général, si l'on fait $p=1$ sans déterminer β, la formule (5) donne

$$\varpi(\mu)=\frac{1}{\mu+\beta}\int_0^1(\beta-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\frac{1}{2(\mu+\beta)(\mu+\beta+1)}\int_0^1(\beta-x)(\beta+1-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\cdots$$

Soit encore, dans cette même formule (5), $\beta=0$, $p=2$; elle deviendra

$$(8)\left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu+1}\right)\int_0^1x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\mu(\mu+2)}+\frac{1}{(\mu+1)(\mu+3)}\right]\int_0^1x(2-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx\\&+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{\mu(\mu+2)(\mu+4)}+\frac{1}{(\mu+1)(\mu+3)(\mu+5)}\right]\int_0^1x(2-x)(4-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\cdots\end{aligned}\right.$$

Le choix à faire entre ces diverses séries, pour une valeur de μ comprise entre des limites données, exigerait une discussion de l'expression du reste, qui permît de reconnaître les valeurs de β et de p qui, pour une valeur donnée de n, conduisent à la plus petite erreur. Nous n'avons pas fait cet examen.

§ V.

DÉVELOPPEMENTS DE $\varpi(\mu)$ (*suite*).

14. Reprenons la formule (2) du § III, savoir

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varpi(\mu) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\,dz,$$

et montrons comment, par de simples intégrations par partie, on en déduit la série de Stirling, avec deux expressions différentes pour le *reste.*

On a évidemment

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^p}\,dz = \frac{1}{2n\pi\mu^p} - \frac{p}{2n\pi}\int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{p+1}}\,dz,$$

et aussi

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{p+1}}\,dz = \frac{p+1}{2n\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^{p+2}}\,dz;$$

par conséquent

$$(3) \ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^p}\,dz = \frac{1}{2n\pi\mu^p} - \frac{p(p+1)}{(2n\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^{p+2}}\,dz.$$

Faisant successivement $p = 1, 3, 5, \ldots, 2p-1$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu+z}\,dz = \frac{1}{2n\pi\mu} - \frac{1.2}{(2n\pi\mu)^3} + \frac{1.2.3.4}{(2n\pi\mu)^5} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1.2\ldots(2p-2)}{(2n\pi\mu)^{2p-1}} + s_p,$$

s_p désignant l'une quelconque des deux expressions

$$(-1)^p\frac{1.2.3\ldots(2p-1)}{(2n\pi)^{2p-1}}\int_0^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p}}, \quad (-1)^p\frac{1.2.3\ldots 2p}{(2n\pi)^{2p}}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p+1}}\,dz.$$

Substituons dans l'équation (1), et groupons les termes affectés d'une même puissance de $\frac{1}{\mu}$. Nous aurons immédiatement

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi\mu}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1.2}{(2\pi\mu)^3}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^4} + \frac{1.2.3.4}{(2\pi\mu)^5}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^6} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{p-1}\frac{1.2\ldots(2p-2)}{(2\pi\mu)^{2p-1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{s_p}{n}\right],$$

ou, en ayant égard à la formule déjà rappelée au n° 9,

$$(4)\ldots\quad \varpi(\mu) = \frac{B_1}{1.2\mu} - \frac{B_2}{3.4\mu^3} + \frac{B_3}{5.6\mu^5} - \cdots + (-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)\,2p.\mu^{2p-1}} + R_p,$$

B_1, B_2, ... étant les nombres de Bernoulli, et R_p étant donné par la formule

$$(5)\ldots\ldots\quad R_p = (-1)^p\frac{1.2.3\ldots(2p-1)}{2^{2p-1}\,\pi^{2p}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p}}\int_0^\infty\frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p}}\,dz,$$

ou par celle-ci :

$$(6)\ldots\ldots\quad R_p = (-1)^p\frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p}\,\pi^{2p+1}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^{2p+1}}\int_0^\infty\frac{\sin 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p+1}}\,dz.$$

La formule (4) coïncide avec la série de Stirling. Les formules (5) et (6) donnent deux expressions nouvelles du reste qui complète la série, arrêtée au $p_{\text{ième}}$ terme. On déduit facilement de ces expressions, grâce à la périodicité des fonctions cos $2n\pi z$, sin $2n\pi z$, diverses limites de l'erreur commise.

15. Ainsi, d'abord, il est clair que l'on a, *en valeur absolue*,

$$\int_0^\infty\frac{\cos 2n\pi z}{(\mu+z)^{2p}}\,dz < \int_0^\infty\frac{dz}{(\mu+z)^{2p}} = \frac{1}{(2p-1)\,\mu^{2p-1}},$$

et par suite, la formule (5) donne, R_p étant réduit à sa valeur absolue,

$$R_p < \frac{1.2.3\ldots(2p-2)}{2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,\mu^{2p-1}}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2p}} = \frac{B_p}{(2p-1)\,2p.\mu^{2p-1}},$$

c'est-à-dire que l'erreur commise sera moindre que le dernier terme conservé de la série.

De même, si l'on observe que la fonction périodique sin $2n\pi z$ est alternativement positive et négative lorsque la variable z parcourt les intervalles successifs

$$\left(0, \frac{1}{2n}\right), \quad \left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}\right), \text{ etc. } \ldots;$$

qu'en outre la valeur absolue du facteur $(\mu + z)^{-p}$ est constamment et indéfiniment décroissante, on reconnaîtra sans peine que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^p} dz$$

est toujours positive, quel que soit p. D'autre part, l'équation (3), si l'on tient compte de cette même observation, prouve évidemment que cette intégrale a une valeur inférieure à $\frac{1}{2n\pi\mu^p}$. On aura donc, d'après cela,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}} < \frac{1}{2n\pi\mu^{2p+1}},$$

et la formule (6) donnera, en valeur absolue,

$$R_p < \frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p+1}\pi^{2p+2}\mu^{2p+1}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+2}},$$

ou bien,

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R_p < \frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)\mu^{2p+1}}.$$

De plus, cette même équation (3) fait voir que l'on a

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}} = \frac{1}{2n\pi\mu^{2p+1}} - \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2n\pi)^2} \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+3}} dz,$$

d'où, en remplaçant cette dernière intégrale par sa limite supérieure,

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(\mu + z)^{2p+1}} dz > \frac{1}{2n\pi\mu^{2p+1}} \left[1 - \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2n\pi)^2\mu^2}\right].$$

Aussi longtemps que $(2p+1)(2p+2)$ est inférieur à $(2\pi\mu)^2$, la limite inférieure qui précède reste positive pour les diverses valeurs de n; elle peut donc être avantageusement substituée à zéro, et l'on trouve, en opérant comme plus haut,

$$R_p > \frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p+1}\,\pi^{2p+2}\,\mu^{2p+1}}\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+2}} - \frac{1.2.3\ldots(2p+2)}{2^{2p+3}\,\pi^{2p+4}\,\mu^{2p+3}}\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2p+4}},$$

ou, plus simplement,

$$(8) \quad \ldots\ldots R_p > \frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)\,\mu^{2p+1}} - \frac{B_{p+2}}{(2p+3)(2p+4)\,\mu^{2p+3}}.$$

Il résulte des inégalités (7) et (8) que le reste R_p, en valeur absolue, est toujours moindre que le premier terme négligé de la série, et toujours plus grand que la différence entre ce terme et le suivant, du moins aussi longtemps que l'on a

$$(2p+1)(2p+2) < (2\pi\mu)^2.$$

D'où il suit que si l'on prend pour R_p la valeur suivante :

$$R_p = (-1)^p\left[\frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)\,\mu^{2p+1}} - \frac{1}{2}\,\frac{B_{p+2}}{2(2p+3)(2p+4)\,\mu^{2p+3}}\right],$$

la valeur de $\varpi(\mu)$ fournie alors par l'équation (4), ne différera de la valeur exacte que d'une quantité moindre que la moitié du $\overline{p+2}^{\text{ème}}$ terme, savoir

$$\frac{1}{2}\,\frac{B_{p+2}}{2(2p+3)(2p+4)\,\mu^{2p+3}}.$$

Il serait facile d'assigner encore d'autres limites pour R_p, mais nous ne nous y arrêterons pas, notre but étant simplement de faire remarquer les formules (5) et (6).

16. Il nous reste à montrer comment la relation fondamentale (1) conduit, fort simplement, à l'élégant développement de l. $\Gamma(\mu)$ en série périodique pour le cas de $\mu < 1$, développement que M. Kummer a donné dans le *Journal de Crelle* (*).

Posons, dans l'équation (1), $\mu + z = y$, d'où

$$(9)\quad \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\,dz = \int_\mu^\infty \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy = \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy - \int_\varepsilon^\mu \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy,$$

ε désignant une quantité positive aussi petite qu'on le veut. Or, on a

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy = \cos 2n\mu\pi \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2n\pi y}{y}\,dy - \sin 2n\mu\pi \int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2n\pi y}{y}\,dy,$$

et, tandis que la première intégrale du second membre tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque ε tend vers zéro, il résulte de la formule (3) du § II que la seconde diffère infiniment peu de $-(\mathrm{C} + \mathrm{l}.\, 2n\pi\varepsilon)$.

D'autre part, l'intégration par partie donne

$$\int_\varepsilon^\mu \frac{\sin 2n\pi(y-\mu)}{y}\,dy = \sin 2n\pi(\mu - \varepsilon)\,\mathrm{l}.\,\varepsilon - 2n\pi \int_\varepsilon^\mu \mathrm{l}.\,y \cos 2n\pi(y-\mu)\,dy.$$

Substituons ces résultats dans l'équation (9), et faisons tendre ε vers zéro, en observant que le terme affecté de $\mathrm{l}.\,\varepsilon$, savoir

$$\left[\sin 2n\mu\pi - \sin 2n\pi(\mu-\varepsilon)\right]\mathrm{l}.\,\varepsilon$$

tend vers zéro en même temps que ε; nous aurons cette équation remarquable :

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\,dz = \frac{\pi}{2}\cos 2n\mu\pi + (\mathrm{C} + \mathrm{l}.\,2n\pi)\sin 2n\mu\pi + 2n\pi \int_0^\mu \mathrm{l}.\,y \cos 2n\pi(\mu - y)\,dy.$$

(*) *Beitrag zur Theorie der Function* Γ; Journal de Crelle, t. XXXV, p. 1. — M. Schlömilch a démontré la même formule par une voie différente et très-simple (*Compend. der höh. Anal.* t. II, p. 255.

L'équation (1) deviendra donc

$$(10)\quad \varpi(\mu)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C+\mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\cos 2n\pi(\mu-y)\,dy.$$

Mais il résulte de l'une des formes sous lesquelles on peut présenter la série de Fourier (*) que, si μ est compris entre zéro et l'unité, on a, pour une valeur quelconque de x entre zéro et μ,

$$\varphi(x)=\int_0^{\mu}\varphi(y)\,dy+2\sum_1^{\infty}\int_0^{\mu}\varphi(y)\cos 2n\pi(x-y)\,dy,$$

le premier membre devant être réduit à la moitié lorsque $x=\mu$.

Donc, si nous prenons $\varphi(x)=\mathrm{l}.\,x$, et si nous posons $x=\mu$, il viendra

$$\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\mu=\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\,dy+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\cos 2n\pi(\mu-y)\,dy.$$

Remplaçons, dans l'équation (10), le dernier terme par sa valeur tirée de l'équation précédente; observons aussi que l'on a

$$\int_0^{\mu}\mathrm{l}.\,y\,dy=\mu\,\mathrm{l}.\,\mu-\mu,\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n}=-\mathrm{l}.\,2\sin\mu\pi,$$

et cette équation (10) prendra la forme

$$\varpi(\mu)=-\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,2\sin\mu\pi-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu+\mu+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C+\mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi.$$

Enfin, substituons cette valeur de $\varpi(\mu)$ dans la formule (1) du § I, nous aurons

$$(11)\quad \ldots\quad \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\frac{\pi}{\sin\mu\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C+\mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi,\quad(\mu<1).$$

Telle est la série de M. Kummer. Il n'est pas sans intérêt d'observer qu'elle

(*) Voy., par exemple, Duhamel, *Cours d'Analyse* (1847), t. II, p. 166.

donne immédiatement la valeur d'intégrales définies assez remarquables. Il suffit, en effet, de remplacer le premier terme du second membre par sa valeur

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\pi - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi}{n},$$

de multiplier les deux membres par l'un des facteurs

$$d\mu, \qquad \cos 2k\mu\pi d\mu, \qquad \sin 2k\mu\pi d\mu,$$

k étant entier, puis d'intégrer entre les limites 0 et 1, comme on le fait pour la détermination des coefficients de la série de Fourier. On trouvera

$$\int_0^1 \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)\, d\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\pi, \qquad \int_0^1 \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) \cos 2k\mu\pi\, d\mu = \frac{1}{4k},$$

$$\int_0^1 \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) \sin 2k\mu\pi\, d\mu = \frac{C + \mathrm{l}.\,2k\pi}{2k\pi}.$$

La première de ces formules a été donnée depuis longtemps par Raabe.

Nous retrouverons plus loin, sous une autre forme et par une autre méthode, le développement de $\varpi(\mu)$ en série procédant suivant les sinus des multiples de $2\mu\pi$.