SECONDE PARTIE.

§ VI.

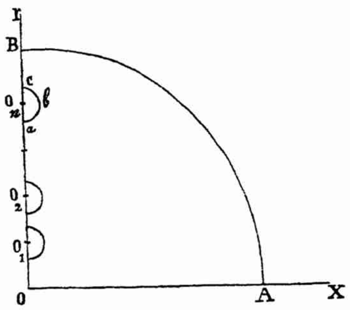
TRANSFORMATION DE LA FONCTION $\varpi(\mu)$.

17. Nous nous proposons, actuellement, de transformer l'intégrale définie qui représente la fonction $\varpi(\mu)$ en une autre, renfermant, sous le signe d'intégration, non plus des exponentielles, mais des fonctions trigonométriques.

Pour cela, considérons une variable imaginaire z, et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\int\left(\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu z}}{z}\,dz$$

étendue au contour fermé OABO, composé d'une portion $OA = R$ de l'axe des x positifs, de l'arc de cercle AB décrit du centre O avec un rayon R, et enfin de la portion BO de l'axe des y. La fonction sous le signe $\int$ a une valeur finie pour $z = 0$, c'est-à-dire au point O, comme on s'en assure sans peine; mais elle devient infinie aux divers points $O_1, O_2, .. O_n, ..$ de l'axe des y qui répondent aux valeurs de z comprises dans la formule



$$z = 2n\pi\sqrt{-1},$$

n étant un nombre entier quelconque. Nous éviterons donc chacun de ces points *critiques* en décrivant de ce point comme centre un demi-cercle de rayon infiniment petit ρ, suivant la méthode connue. De cette manière, la fonction restant synectique dans l'intérieur du contour fermé, l'intégrale étendue à ce contour tout entier sera nulle; et si nous désignons par I(OB) la valeur *principale* de l'intégrale prise le long de la droite OB, de O vers B; par I_n l'intégrale étendue au contour élémentaire *abc* autour du point O_n, nous aurons, comme on sait,

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad I(OA) + I(AB) = I(OB) + \sum_{n=1}^{n=n_1} I_n,$$

n_1 désignant la plus grande valeur que comporte n dans l'intérieur du cercle de rayon R.

Évaluons séparément chaque intégrale. Sur l'axe OX, on a $z=x$, d'où

$$I(OA) = \int_0^R \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}dx.$$

Sur l'arc AB, en désignant par θ l'*argument* de z, on a $z = Re^{\theta\sqrt{-1}}$; et, par suite,

$$I(AB) = \sqrt{-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{e^{R(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}} - \frac{1}{Re^{\theta\sqrt{-1}}} + \frac{1}{2}\right]e^{-\mu(R\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}d\theta.$$

Sur l'axe des y, où l'on a $z = y\sqrt{-1}$, l'élément de l'intégrale correspondant à un chemin rectiligne sur cet axe est

$$\left(\frac{1}{e^{y\sqrt{-1}}-1} - \frac{1}{y\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu y\sqrt{-1}}}{y}dy = \left(\frac{e^{-\frac{y}{2}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}} + \frac{\sqrt{-1}}{y} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu y\sqrt{-1}}}{y}dy.$$

Enfin, sur le petit cercle *abc* l'on a, θ étant l'argument,

$$z = 2n\pi\sqrt{-1} + \rho e^{\theta\sqrt{-1}}, \quad dz = \sqrt{-1}\,\rho e^{\theta\sqrt{-1}}d\theta,$$

et comme $e^{2n\pi\sqrt{-1}}$ se réduit à l'unité, il vient évidemment

$$\mathrm{I}_n = \sqrt{-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{e^{\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}-1}-\frac{1}{2n\pi\sqrt{-1}+\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}+\frac{1}{2}\right]\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}\,e^{-\mu\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}\rho e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta}{2n\pi\sqrt{-1}+\rho e^{\theta\sqrt{-1}}},$$

d'où, faisant converger ρ vers zéro et observant que

$$lim\,\frac{\rho e^{\theta\sqrt{-1}}}{e^{\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)}-1}=1,$$

on trouvera

$$\mathrm{I}_n=\sqrt{-1}\,\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}}{2n\pi\sqrt{-1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}}{2n}.$$

Substituons dans l'équation (α) les résultats que nous venons d'obtenir, et, le rayon R étant arbitraire, concevons qu'il croisse indéfiniment. On verra alors que I(AB) tend vers zéro, μ étant positif; que n_1 croît indéfiniment; que I(OA) a pour limite $\varpi(\mu)$, d'après l'équation (2) du § I; et l'on obtiendra l'équation

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\frac{y}{2}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\sin\frac{y}{2}}+\frac{\sqrt{-1}}{y}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu y\sqrt{-1}}}{y}\,dy+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-2n\mu\pi\sqrt{-1}}}{n}.$$

Décomposons cette équation imaginaire en deux équations réelles : nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}\varpi(\mu)&=\int_0^\infty\left[-\frac{\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\sin\mu y}{y}+\frac{1}{2}\cos\mu y\right]\frac{dy}{y}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n};\\ 0&=\int_0^\infty\left[-\frac{\cos\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\mu y}{y}-\frac{1}{2}\sin\mu y\right]\frac{dy}{y}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.\end{aligned}\right.$$

Observons encore que l'on a

$$-\frac{\sin\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\sin\mu y}{y}+\frac{1}{2}\cos\mu y=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\cot\frac{y}{2}\right)\sin\mu y,$$

$$-\frac{\cos\left(\mu+\frac{1}{2}\right)y}{2\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\mu y}{y}-\frac{1}{2}\sin\mu y=\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{2}\cot\frac{y}{2}\right)\cos\mu y;$$

remplaçons y par $2x$ sous le signe d'intégration. Les équations ci-dessus deviendront

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \varpi(\mu)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}dx;$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\cos 2\mu x}{x}dx=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

Il résulte d'ailleurs de la démonstration que les intégrales sont réduites à leurs valeurs principales.

18. Avant de développer les conséquences de cette transformation qu'a subie la fonction $\varpi(\mu)$, arrêtons-nous quelques instants sur la formule (2), qui s'est offerte d'elle-même dans cette recherche.

D'après une remarque déjà faite au n° 7, la quantité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}$$

est une fonction périodique de μ, dont la période est égale à l'unité, et dont la valeur est $\pi\left(\frac{1}{2}-\mu\right)$ lorsque μ est compris entre zéro et l'unité. Si donc μ a une valeur comprise entre deux nombres entiers consécutifs p et $p+1$, il viendra

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}=\pi\left(p+\frac{1}{2}-\mu\right).$$

Si, au contraire, μ est entier, la série aura pour somme zéro.

D'après cela, la formule (2) nous donne

$$(3)\quad \ldots \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx = \begin{cases} \pi \left(p + \dfrac{1}{2} - \mu\right), & \text{si } \mu = \mathrm{M}\,(p, p+1); \\ 0, & \text{si } \mu \text{ est entier.} \end{cases}$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} \cos 2\mu x\, dx = \begin{cases} \pi \left(p + \dfrac{1}{2} - \mu\right); \\ 0. \end{cases}$$

Si l'on pose, en particulier, $\mu = \frac{1}{2}$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \cot x\, dx = 0.$$

19. Admettons que μ soit compris entre zéro et 1. L'équation

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \sin x} \cos 2\mu x\, dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \mu\right),$$

si l'on multiplie ses deux membres par $d\mu$ et si l'on intègre entre les limites 0 et μ, donnera

$$(4)\quad \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \sin x} \sin 2\mu x\, dx = \pi\mu\,(1 - \mu).$$

Le second membre de cette égalité ne change pas lorsque l'on change μ en $1 - \mu$; il en est donc de même du premier. Donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3 \sin x} \sin 2\,(1 - \mu)\, x\, dx = \pi\mu\,(1 - \mu).$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, et observant que

$$\sin 2\mu x - \sin 2\,(1 - \mu)\, x = 2 \sin (2^\mu - 1)\, x \cos x,$$

on trouvera

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \sin(2\mu - 1)\, x \cot x \, dx = 0, \ (\mu < 1).$$

Si, au contraire, on ajoute membre à membre les mêmes équations, on aura semblablement

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cos(2\mu - 1)\, x \, dx = \pi\mu(1 - \mu).$$

Pour $\mu = \frac{1}{2}$, les formules (4) et (6) deviennent

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx = \frac{\pi}{4};$$

la valeur de cette intégrale définie avait déjà été donnée par Bidone (*Mémoires de Turin*, 1812).

20. Reprenons l'équation (3), et remplaçons, dans la fonction sous le signe $\int$, le premier facteur par sa valeur

$$\frac{1}{x} - \cot x = 2x \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

Nous aurons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x} dx = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x}{n^2\pi^2 - x^2} dx.$$

Si l'on remplace l'intégrale définie qui figure sous le signe Σ par sa valeur connue, on retombera sur une formule identique à l'équation (2); mais, si l'on pose dans cette intégrale $x = n\pi z$, il viendra

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\cos 2n\mu\pi z}{1 - z^2} dz = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{1 - z^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi z}{n}.$$

Or, on sait que, pour toute valeur de u, on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos nu}{n} = -\mathrm{l}.\overline{2 \sin \frac{u}{2}},$$

la barre placée au-dessus du sinus indiquant que celui-ci doit être pris en valeur absolue. Nous aurons donc

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi z}{n} = -\,\mathrm{l}.\,2\,\overline{\sin \mu\pi z},$$

et comme d'ailleurs

$$\mathrm{l}.\,2 \times \int_0^\infty \frac{dz}{1-z^2} = 0 \text{ (valeur principale)},$$

l'équation ci-dessus se réduira à celle-ci :

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x}{x}\, dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{l}.\,\overline{\sin \mu\pi z}}{1-z^2}\, dz.$$

Il viendra donc, en vertu de la formule (3),

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{l}.\,\overline{\sin \mu\pi z}}{1-z^2}\, dz = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{2}\left(\mu - p - \dfrac{1}{2}\right), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1); \\ 0, \text{ si } \mu \text{ est entier.} \end{cases}$$

21. Revenons encore à l'équation (2), et désignant par a une quantité positive quelconque, nous trouverons de même

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2ax}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2na\pi}{n}.$$

Soustrayant cette équation de l'équation (2), nous aurons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x}\, dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\mu\pi - \sin 2na\pi}{n}.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x^2}\, dx = \pi(a - \mu)\ (*),$$

(*) On obtient immédiatement cette formule bien connue en observant que

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x}{x^2}\, dx = \frac{\cos 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} - 2\mu \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin 2\mu x}{x}\, dx,$$

transformant de même $\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2ax}{x^2}\, dx$, retranchant, faisant tendre ε vers zéro, et remarquant que la limite de $\frac{\cos 2\mu\varepsilon - \cos 2a\varepsilon}{\varepsilon}$ est zéro.

ce qui réduit l'équation précédente à la forme

$$(8) \quad . \quad . \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x} \cot x\, dx = \pi(a - \mu) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2na\pi - \sin 2n\mu\pi}{n}.$$

Or, d'après ce qui a été remarqué au n° 18, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin 2n\mu\pi}{n} = \pi\left(p + \frac{1}{2} - \mu\right) \text{ ou zéro,}$$

suivant que μ est compris entre deux nombres entiers consécutifs p et $p + 1$, ou est un nombre entier. De même,

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin 2na\pi}{n} = \begin{cases} \pi\left(q + \frac{1}{2} - a\right), \text{ si } a = \mathrm{M}(q, q+1), \\ 0, \text{ si } a \text{ est entier.} \end{cases}$$

L'équation (8) donnera donc lieu à quatre cas distincts, compris dans la formule

$$(9) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x} \cot x\, dx = \begin{cases} \pi(q - p), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1),\ a = \mathrm{M}(q, q+1); \\ \pi(a - \mu), \text{ si } \mu, a, \text{ sont entiers;} \\ \pi\left(a - p - \frac{1}{2}\right), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p,\ p+1),\ a \text{ entier;} \\ \pi\left(q + \frac{1}{2} - \mu\right), \text{ si } \mu \text{ entier, } a = \mathrm{M}(q, q+1). \end{cases}$$

L'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x} \cot x\, dx$$

présente donc un exemple bien remarquable de discontinuité, lorsqu'on la considère comme fonction des paramètres μ et a. Sa valeur est zéro, lorsque μ et a sont compris entre deux mêmes nombres entiers consécutifs. Si, a étant constant, on suppose que μ varie et croisse constamment, l'intégrale ne change pas de valeur aussi longtemps que μ reste compris entre deux nombres entiers consécutifs donnés; elle diminue brusquement de la quantité $\frac{\pi}{2}$ lorsque μ atteint une valeur entière, puis encore brusquement de la même quantité $\frac{\pi}{2}$ lorsque μ dépasse cette valeur entière.

On peut donner une autre forme à l'intégrale que nous venons de déterminer, en observant que

$$\cos 2\mu x - \cos 2ax = 2 \sin (a-\mu) x \quad \sin (a+\mu) x.$$

Changeant les signes et ayant égard à l'équation (9), on trouvera donc

$$(10) \int_0^\infty \frac{\sin(\mu+a)x \sin(\mu-a)x}{x} \cot x \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(p-q), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1), a = \mathrm{M}(q, q+1); \\ \frac{\pi}{2}(\mu - a), \text{ si } \mu, a \text{ sont entiers}; \\ \frac{\pi}{2}\left(\mu - q - \frac{1}{2}\right), \text{ si } \mu \text{ est entier}, a = \mathrm{M}(q, q+1); \\ \frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{2} - a\right), \text{ si } \mu = \mathrm{M}(p, p+1), a \text{ entier}. \end{cases}$$

---

§ VII.

CONSÉQUENCES DE LA TRANSFORMATION DE $\varpi(\mu)$.

22. Nous reprenons la formule (1) du paragraphe précédent, et en vertu de la relation déjà rappelée :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\mu\pi}{n} = -\,\mathrm{l}.\,\overline{2 \sin \mu\pi},$$

nous lui donnons la forme

$$(1) \quad \ldots \quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2 \sin \mu\pi} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\sin 2\mu x}{x} dx,$$

de laquelle nous allons déduire de nombreuses conséquences.

Nous remarquons, en premier lieu, que, suivant une observation déjà faite par Cauchy, en vertu de l'équation (1) du § I, toute propriété de la fonction $\Gamma(\mu)$ donne lieu à une propriété correspondante de la fonction $\varpi(\mu)$, et, par suite, de l'intégrale définie qui figure dans l'équation ci-dessus. Nous avons donc là un principe qui nous conduira, très-simplement, à la détermination de plusieurs intégrales définies.

Ainsi, l'on sait que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, et l'équation rappelée plus haut conduit alors à celle-ci :

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{l}.2).$$

Donc, faisant $\mu=\frac{1}{2}$ dans l'équation (1), et observant que le premier terme du second membre se réduit ici à $-\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2$, on trouvera

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,dx=1,$$

intégrale définie déjà signalée par Bidone (*Mémoires de Turin,* 1812).

De même, l'équation obtenue dans le § I,

$$\varpi(\mu)-\varpi(\mu+1)=\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right)-1,$$

lorsqu'on y remplace $\varpi(\mu)$, $\varpi(\mu+1)$ par leurs valeurs tirées de l'équation (1), en observant que l'on a

$$\overline{\sin(\mu+1)\pi}=\overline{\sin\mu\pi},\quad \sin 2\mu x-\sin 2(\mu+1)x=-2\sin x\cos(2\mu+1)x,$$

cette équation devient

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\cos(2\mu+1)x\sin x\frac{dx}{x}=1-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

ou mieux

$$(3). \quad \ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\cos(2\mu+1)x\,dx=1-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu}\right).$$

Cette formule est, pensons-nous, nouvelle.

De même, la relation connue

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu)+\mathrm{l.}\,\Gamma(1-\mu)=\mathrm{l.}\frac{\pi}{\sin\mu\pi},\ (\mu<1),$$

conduit facilement à la suivante :

$$\varpi(\mu)+\varpi(1-\mu)=1+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)-\mathrm{l.}\,2\sin\mu\pi\,.$$

D'autre part, en vertu de la formule (1), on a

$$\varpi(\mu)+\varpi(1-\mu)=-\mathrm{l.}\,2\sin\mu\pi+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\sin 2\mu x+\sin 2(1-\mu)x}{x}\,dx\,;$$

donc, si l'on a égard à la relation

$$\sin 2\mu x+\sin 2(1-\mu)x=2\sin x\cos(2\mu-1)x,$$

on trouvera, μ étant plus petit que 1,

$$(4).\quad\ldots\quad \int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\cos(2\mu-1)x\,dx=1+\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(\frac{1}{\mu}-1\right).$$

Rapprochant cette équation (4) de l'équation (3), on en conclura que celle-ci subsiste encore pour des valeurs de μ comprises entre zéro et -1, à condition que l'on change le signe de la quantité sous le signe l., sans quoi ce logarithme serait imaginaire.

23. Reprenons l'équation

$$\varpi(\mu+1)-\varpi(\mu)=1-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

et faisons

$$\mu=n-\frac{1}{2},$$

n désignant un nombre entier positif. Il viendra

$$\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)-\varpi\left(n-\frac{1}{2}\right)=1-n\,\mathrm{l.}\frac{2n+1}{2n-1}\,.$$

Posons successivement $n = 1, 2, 3, \ldots, n$, dans cette équation, et ajoutons les résultats membre à membre. Nous trouverons, comme on le voit sans peine,

$$\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)-\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=n-\left[\mathrm{l}.\,3+2\,\mathrm{l}.\frac{5}{3}+3\,\mathrm{l}.\frac{7}{5}+\cdots+n\,\mathrm{l}.\frac{2n+1}{2n-1}\right],$$
$$=n+\mathrm{l}.\,3+\mathrm{l}.\,5+\mathrm{l}.\,7+\cdots+\mathrm{l}.\,(2n-1)-n\,\mathrm{l}.\,(2n+1);$$

ou encore, en remplaçant $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$ par sa valeur,

$$\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(1-\mathrm{l}.\,2)+n+\mathrm{l}.\left[1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)\right]-n\,\mathrm{l}.\,(2n+1).$$

La formule (1) donne une expression de $\varpi\left(n+\frac{1}{2}\right)$ qui, égalée à la précédente, conduit à l'équation

$$(5)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx=(2n+1)+2\,\mathrm{l}.\left[1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)\right]-2n\,\mathrm{l}.\,(2n+1).$$

Cette équation subsiste pour toute valeur entière et positive de n.

Comme d'ailleurs on sait exprimer $\sin(2n+1)x$ en fonction des puissances impaires de $\sin x$, on déduira facilement de l'équation (5) d'autres intégrales définies nouvelles.

Supposons, en premier lieu, $n = 1$: il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx = 3 - 2\,\mathrm{l}.\,3.$$

Mais on a

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x;$$

d'où, substituant et ayant égard à la relation (2),

$$(6)\quad \ldots\ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,3.$$

De même, pour $n = 2$, l'équation (5) devient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin 5x}{\sin x}\,dx = 5 + 2\,\mathrm{l}.\,3 - 4\,\mathrm{l}.\,5.$$

Or, on sait que

$$\sin 5x = 5 \sin x - 2^2 . 5 \sin^3 x + 2^4 \sin^5 x,$$

et par suite, si l'on tient compte des formules (2) et (6), on aura

$$5 - 2^2 . 5 \frac{\mathrm{l}. 3}{3} + 2^4 \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sin^4 x \, dx = 5 + 2 \,\mathrm{l}. 3 - 4 \,\mathrm{l}. 5,$$

ou, réductions faites,

$$(7) \quad \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sin^4 x \, dx = \frac{1}{4}(5 \,\mathrm{l}. 3 - \mathrm{l}. 5).$$

On trouverait de la même manière, en faisant dans l'équation (5) $n = 3$, substituant

$$\sin 7x = 7 \sin x - 7 . 2^3 \sin 3x + 7 . 2^4 \sin^5 x - 2^6 \sin^7 x,$$

et réduisant au moyen des formules (2), (6) et (7),

$$(8) \quad \ldots\ldots \int_0^\infty \frac{\sin x - x \cos x}{x^2} \sin^6 x \, dx = \frac{5}{32}(9 \,\mathrm{l}. 3 - 5 \,\mathrm{l}. 5 + \mathrm{l}. 7);$$

et ainsi de suite. Il serait assez curieux de trouver la loi générale.

24. Considérons actuellement l'équation d'Euler :

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}, \quad (n \text{ entier}),$$

ou

$$\mathrm{l}.\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{l}.\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \mathrm{l}.\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{2}\,\mathrm{l}. 2\pi - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}. n.$$

Exprimant $\mathrm{l}.\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$, $\mathrm{l}.\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$, ... par la formule (1) du § I, en fonction de $\varpi\left(\frac{1}{n}\right)$, $\varpi\left(\frac{2}{n}\right)$, ..., on trouvera, après quelques réductions faciles à apercevoir,

$$\varpi\left(\frac{1}{n}\right) + \varpi\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + \varpi\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.[1.2.3\ldots(n-1)] - \frac{1}{n}\,\mathrm{l}.[1^1 2^2 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}] - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}. n.$$

Or, si l'on remplace les termes du premier membre par leurs valeurs fournies par l'équation (1), on aura visiblement

$$\varpi\left(\frac{1}{n}\right)+\varpi\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\varpi\left(\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\left(2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\left(\sin\frac{2x}{n}+\sin\frac{4x}{n}+\cdots+\sin\frac{2n-2}{n}x\right)\frac{dx}{x}.$$

Mais des relations bien connues nous donnent

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{n-1}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}};$$

$$\sin\frac{2x}{n}+\sin\frac{4x}{n}+\cdots+\sin\frac{2n-2}{n}x=\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\sin x;$$

il viendra donc, substitutions faites,

$$\varpi\left(\frac{1}{n}\right)+\varpi\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\varpi\left(\frac{n-1}{n}\right)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,n+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\,dx,$$

et par suite, si l'on compare ce résultat à celui que nous avons trouvé plus haut,

$$(9)\quad\int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\,dx=(n-1)+\mathrm{l.}\left[1.2.3\ldots(n-1)\right]-\frac{2}{n}\mathrm{l.}\left[1^1 2^2 3^3\ldots(n-1)^{n-1}\right],$$

n ayant une valeur entière quelconque. Ce résultat nouveau paraît assez remarquable.

Pour $n=2$, l'équation (9) nous ramène au résultat déjà trouvé :

$$\int_0^\infty\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}\,dx=1.$$

Pour $n=3$, elle donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{2}{3}x}{\sin\frac{x}{3}}\,dx = 2 + \mathrm{l}.\,2 - \frac{2}{3}\,\mathrm{l}.\,4,$$

ou, simplifications faites,

$$(10)\quad\ldots\ldots\quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\cos\frac{x}{3}\,dx = 1 - \frac{1}{6}\,\mathrm{l}.\,2.$$

Ce résultat est compris dans une formule donnée plus haut.

Soit enfin $n=4$. L'équation (9) devient

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{3}{4}x}{\sin\frac{x}{4}}\,dx = 3 + \mathrm{l}.\,(2\,.\,3) - \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,(2^2\,.\,3^3).$$

Développons la valeur de $\sin\frac{3x}{4}$ en fonction de $\sin\frac{x}{4}$, et appliquons la relation (2); nous aurons

$$(11)\quad\ldots\ldots\quad \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\sin^2\frac{x}{4}\,dx = \frac{1}{8}\,\mathrm{l}.\,3.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ce genre d'applications de l'équation (1).

25. La transformation de la fonction $\varpi(\mu)$, opérée par l'équation (1), conduit à un développement de cette fonction en série périodique, développement remarquable en ce que ses coefficients dépendent de transcendantes bien connues. Posons

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right)\frac{\sin 2\mu\pi x}{x}\,dx = \varphi(2\mu).$$

D'après une des formules de Fourier, nous aurons pour toute valeur de μ comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$, l'équation

$$(12)\quad\ldots\ldots\quad \varphi(2\mu) = 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin 2n\mu\pi \int_0^1 \varphi(t)\sin n\pi t\,dt.$$

Or, nous avons ici

$$\int_0^1 \varphi(t)\sin n\pi t\, dt = \int_0^1 \sin n\pi t\, dt \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right)\frac{\sin t\pi x}{x}\, dx$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right)\frac{dx}{x}\int_0^1 \sin n\pi t \sin \pi x t\, dt.$$

Mais, n étant entier, on a

$$\int_0^1 \sin n\pi t \sin x\pi t\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin (n-x)\pi}{n-x} - \frac{\sin (n+x)\pi}{n+x}\right] = \frac{n}{\pi}\frac{\cos n\pi \sin \pi x}{n^2 - x^2},$$

donc

$$\int_0^1 \varphi(t)\sin n\pi t\, dt = -\frac{n}{\pi}\cos n\pi \int_0^\infty \left(\frac{1}{\pi x} - \cot \pi x\right)\frac{\sin \pi x}{n^2 - x^2}\cdot\frac{dx}{x}$$
$$= -\frac{n}{\pi^2}\cos n\pi \int_0^\infty \frac{\sin \pi x - \pi x \cos \pi x}{x^2(n^2 - x^2)}\, dx = -n\pi \cos n\pi \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2(n^2\pi^2 - x^2)}\, dx$$
$$= -\frac{\cos n\pi}{n\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{n^2\pi^2 - x^2}\, dx\right].$$

La première de ces deux intégrales a pour valeur l'unité [formule (2)]. Quant à la seconde, nous ne pouvons que la réduire aux transcendantes nommées, par les géomètres allemands, le *sinus intégral* et le *cosinus intégral;* transcendantes définies par les équations

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad C(\alpha) = \int_\infty^\alpha \frac{\cos x}{x}\, dx.$$

En effet, nous avons, en vertu des relations établies par M. Schlömilch (*),

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\, dx}{n^2\pi^2 - x^2} = \frac{1}{n\pi}\left[\sin n\pi\, C(n\pi) - \cos n\pi\, S(n\pi)\right] = -\frac{S(n\pi)\cos n\pi}{n\pi};$$

$$\int_0^\infty \frac{x\cos x\, dx}{n^2\pi^2 - x^2} = \cos n\pi\, C(n\pi) + \sin n\pi\, S(n\pi) = C(n\pi)\cos n\pi,$$

(*) *Analytische Studien*, t. II, p. 155.

et enfin

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{n^2\pi^2 - x^2}\,dx = -\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\cos n\pi.$$

D'après cela, l'équation obtenue plus haut prend la forme

$$\int_0^1 \varphi(t)\sin n\pi t\,dt = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{S(n\pi)}{n^2\pi^2} + \frac{C(n\pi)}{n\pi},$$

et la formule (12) devient, conséquemment,

$$\varphi(2\mu) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi\cos n\pi}{n} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

La première série du second membre est facile à sommer. On sait, en effet, que pour toute valeur de u comprise entre zéro et π, l'on a

$$\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1} - \frac{\sin 2u}{2} + \frac{\sin 3u}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin nu\cos n\pi}{n};$$

donc, pour toute valeur de μ comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$, $2\mu\pi$ sera compris entre zéro et π, et l'on aura

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi\cos n\pi}{n} = 2\mu.$$

La valeur de $\varphi(\mu)$ deviendra donc

$$\varphi(\mu) = 2\mu + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\frac{\sin 2n\mu\pi}{n},$$

et, en revenant à l'équation (1), on trouvera facilement

$$(13)\quad \ldots\quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2\sin\mu\pi + \mu + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{S(n\pi)}{n\pi} + C(n\pi)\right]\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

L'équation (13) donnera donc le développement de $\varpi(\mu)$ en série procédant suivant les sinus des multiples de $2\mu\pi$, pour toute valeur de μ comprise entre zéro et $\frac{1}{2}$. Ce n'est pas, évidemment, au point de vue des calculs pratiques que cette équation offre de l'intérêt; mais, à cause de la relation qu'elle établit entre la fonction $\varpi(\mu)$ et les transcendantes $S(\alpha)$ et $C(\alpha)$, qui en avaient paru jusqu'ici assez éloignées, elle me paraît curieuse.

26. Une transformation qui se présente assez naturellement, l'équation (1) étant donnée, est celle qui consiste à remplacer, sous le signe $\int$, la fonction $\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$ par son développement en série, savoir

$$\frac{1}{x} - \cot x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

Cette substitution conduit immédiatement à l'équation

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\infty \frac{\sin 2\mu x}{n^2\pi^2 - x^2}\,dx,$$

ou, par la transformation $\mu x = n\pi z$, à celle-ci :

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \frac{\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu^2 - z^2}\,dz.$$

En opérant de la même manière qu'au n° 7, on réduira facilement cette équation à la forme

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \mu\sum_{k=0}^{k=\infty} \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu^2 - (k+x)^2},$$

et, en observant que l'on a

$$\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu^2 - (k+x)^2} = \frac{1}{2\mu}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu + k + x} + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right)dx}{\mu + k + x}$$

$$= \frac{1}{2\mu}\left[\left(\mu + k + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1 + \frac{1}{\mu + k}\right) + \left(\mu - k - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\overline{\left(1 + \frac{1}{k - \mu}\right)}\right],$$

on mettra la fonction $\varpi(\mu)$ sous la forme

$$(14)\quad \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\mathrm{l}.2\sin\mu\pi + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[\left(\mu+k+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\left(1+\frac{1}{\mu+k}\right) + \left(\mu-k-\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\overline{\left(1+\frac{1}{k-\mu}\right)}\right].$$

Cette série convergente pour représenter la fonction $\varpi(\mu)$ a de l'analogie avec la série de Gudermann, mais elle présente divers inconvénients que n'a pas cette dernière, et paraît, en somme, moins commode. Nous ne nous y arrêterons donc pas davantage.

---

§ VIII.

TRANSFORMATION DE LA FONCTION $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$.

27. La formule (1) du paragraphe précédent conduit à une nouvelle expression du logarithme de la fonction $\Gamma(\mu)$, sous forme d'intégrale définie, renfermant aussi des fonctions trigonométriques au lieu des exponentielles que l'on y rencontre habituellement.

Reprenons la formule

$$(1)\quad \ldots\ldots\ \varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\overline{2\sin\mu\pi} + \frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}\,dx.$$

En désignant par ε une quantité infiniment petite, on a

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}\,dx = \int_\varepsilon^\infty\frac{\sin 2\mu x}{x^2}\,dx - \int_\varepsilon^\infty\frac{\sin 2\mu x\cos x}{\sin x}\frac{dx}{x}.$$

Or, on voit sans peine que

$$\int_\varepsilon^\infty\frac{\sin 2\mu x}{x^2}\,dx = \frac{\sin 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} + 2\mu\int_\varepsilon^\infty\frac{\cos 2\mu x}{x}\,dx;$$

et, à cause de

$$\sin 2\mu x \cos x = \sin(2\mu - 1)x + \cos 2\mu x \sin x,$$

il viendra

$$\int_\varepsilon^\infty \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) \frac{\sin 2\mu x}{x} dx = \frac{\sin 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} + (2\mu - 1)\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x}{x} dx - \int_\varepsilon^\infty \frac{\sin(2\mu - 1)x}{\sin x} dx$$

$$= \frac{\sin 2\mu\varepsilon}{\varepsilon} + (2\mu - 1)\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2x}{x} dx + \int_\varepsilon^\infty \left[(2\mu - 1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu - 1)x}{\sin x}\right] dx.$$

Faisons tendre ε vers zéro : le premier terme du second membre a pour limite 2μ ; le second $(2\mu - 1)\,\mathrm{l}.\,\frac{1}{\mu}$, et il vient

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\mathrm{l}.\,2\overline{\sin\mu\pi} + \mu - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu - 1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu - 1)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Portons cette valeur de $\varpi(\mu)$ dans l'équation

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\,\mu - \mu + \varpi(\mu);$$

nous aurons définitivement

$$(2) \quad . \quad . \quad \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\frac{\pi}{\overline{\sin\mu\pi}} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu - 1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu - 1)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}.$$

Telle est la forme nouvelle donnée à $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$, et que nous voulions obtenir. L'intégrale qui y figure est toujours supposée réduite à sa valeur principale (*).

28. Cette expression de $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$ ne semble pas au premier abord se prêter facilement à l'étude des propriétés de la fonction $\Gamma(\mu)$; elle présente même

(*) Il est bon d'observer que l'on arrive directement à la formule (2) en appliquant à l'équation connue

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\,\pi + \int_0^\infty \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\right)e^{-x} + \frac{e^{-\mu x} - e^{-\frac{x}{2}}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}$$

la transformation par variable imaginaire que nous avons employée au n° 17.

l'inconvénient de se composer de deux termes qui, pour des valeurs entières de μ, sont tous deux infinis. Néanmoins, il est très-curieux que cette équation conduise, de la manière la plus simple et la plus naturelle, aux propriétés caractéristiques de la fonction Γ.

Ainsi d'abord, si μ est < 1, et si l'on change μ en $1 - \mu$ dans l'équation (2), on voit immédiatement que $\sin \mu\pi$ ne change pas, et que l'intégrale définie change de signe sans changer de valeur. On a donc

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) + \mathrm{l}.\,\Gamma(1-\mu) = \mathrm{l}.\left(\frac{\pi}{\sin \mu\pi}\right),$$

d'où la relation connue

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi}.$$

En second lieu, remplaçons dans l'équation (2) μ par $\mu + 1$, et observons que l'on a

$$\overline{\sin(\mu+1)\pi} = \overline{\sin \mu\pi},$$

$$\sin(2\mu+1)x = \sin(2\mu-1)x + 2\sin x \cos 2\mu x.$$

Nous trouverons évidemment

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu+1) = \frac{1}{2}\mathrm{l}.\frac{\pi}{\overline{\sin \mu\pi}} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu-1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x} + 2\cos 2x - 2\cos 2\mu x\right]\frac{dx}{x},$$

ou, en vertu de la formule

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2x - \cos 2\mu x}{x}\,dx = \mathrm{l}.\,\mu,$$

et de l'expression de $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$ donnée par la formule (2),

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu+1) = \mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) + \mathrm{l}.\,\mu;$$

d'où enfin

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\,\Gamma(\mu),$$

autre propriété fondamentale de la fonction Γ.

29. Passons au théorème de Gauss. La formule (2) y conduit par les simples propriétés des sinus. Remplaçons successivement, dans cette formule, μ par

$$\mu,\ \mu+\frac{1}{n},\ \mu+\frac{2}{n},\dots,\ \mu+\frac{n-1}{n},$$

et ajoutons membre à membre toutes les équations obtenues. Il vient

$$(3)\left\{\begin{aligned}&\mathrm{l.}\left[\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{\pi^n}{\sin\mu\pi\,\sin\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\pi\dots\sin\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\pi}\\&+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[(2n\mu-1)\cos 2x-\frac{\sin(2\mu-1)x+\sin\left(2\mu-1+\frac{2}{n}\right)x+\dots+\sin\left(2\mu-1+\frac{2n-2}{n}\right)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}.\end{aligned}\right.$$

Or, deux formules bien connues, dues à Euler (*), nous donnent

$$\sin\mu\pi\,.\,\sin\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\pi\dots\sin\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\pi=\frac{\sin n\mu\pi}{2^{n-1}};$$

$$\sin(2\mu-1)x+\sin\left(2\mu-1+\frac{2}{n}\right)x+\dots+\sin\left(2\mu-1+\frac{2n-2}{n}\right)x$$

$$=\sin\left(2\mu-\frac{1}{n}\right)x\,\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{n}}=\frac{\sin(2n\mu-1)\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\sin x.$$

Donc, substitution faite, il vient

$$\mathrm{l.}\left[\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}\,\mathrm{l.}\,\frac{2^{n-1}\pi^n}{\sin n\mu\pi}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[(2n\mu-1)\cos 2x-\frac{\sin(2n\mu-1)\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\right]\frac{dx}{x}.$$

(*) *Introductio in analysin infinitorum*, t. I, pp. 200 et 218 (Lugduni, 1797).

Supposons d'abord l'intégrale prise à partir d'une limite infiniment petite ε, et observons que

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(2n\mu-1)\frac{x}{n}\,dx}{\sin\frac{x}{n}\cdot x} = \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\infty} \frac{\sin(2n\mu-1)x\,dx}{\sin x \cdot x} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin(2n\mu-1)x\,dx}{\sin x \cdot x} + \int_{\frac{\varepsilon}{n}}^{\varepsilon} \frac{\sin(2n\mu-1)x\,dx}{\sin x \cdot x}.$$

La dernière intégrale est une intégrale *singulière* dont la valeur, qui se trouve immédiatement, est $(2n\mu - 1)\,\mathrm{l}.\,n$. Donc, si l'on substitue dans l'équation ci-dessus et que l'on fasse $\varepsilon = 0$, on trouvera

$$\mathrm{l}.\left[\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,\frac{\pi}{\sin n\mu\pi}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[(2n\mu-1)\cos 2x - \frac{\sin(2n\mu-1)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,(2\pi)^{n-1} - \frac{2n\mu-1}{2}\,\mathrm{l}.\,n.$$

La somme des deux premiers termes du second membre est égale, d'après (2), à $\mathrm{l}.\,\Gamma(n\mu)$; donc, passant des logarithmes aux nombres, on aura

$$\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\mu+\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{n\mu-\frac{1}{2}}}\,\Gamma(n\mu),$$

équation qui constitue le beau théorème de Gauss.

Ces démonstrations paraissent être en défaut lorsque l'un des arguments de la fonction Γ est entier, ce qui rend illusoire la formule (2); mais il suffit d'altérer infiniment peu cet argument pour que l'équation (2), et par suite la démonstration, subsiste; et comme la fonction $\Gamma(\mu)$ est continue, il est clair que la propriété à démontrer subsistera même pour ces valeurs exceptionnelles de l'argument.

30. On prévoit que l'expression de $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$, donnée par l'équation (2), doit conduire fort facilement à la série de M. Kummer [formule (11) du § V]. Nous nous bornerons à esquisser rapidement cette démonstration, tout à fait analogue à celle de M. Schlömilch.

L'argument μ étant compris entre zéro et l'unité, deux formules connues, qui résultent de la série de Fourier, donnent

$$\mu - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}, \qquad \frac{\sin(2\mu-1)x}{2\sin x} = \pi\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n\sin 2n\mu\pi}{n^2\pi^2 - x^2}.$$

De là on tire sans peine

$$(4)\int_0^\infty \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{2\sin x}\right]\frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}\int_0^\infty\left(-\cos 2x + \frac{n^2\pi^2 - x^2}{n^2\pi^2}\right)\frac{dx}{x}\right\}.$$

La valeur *principale* de l'intégrale sous le signe Σ s'obtient en remplaçant d'abord la limite inférieure zéro par un infiniment petit ε. On a

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx = -(C + \mathrm{l}.\,2\varepsilon); \quad \int_\varepsilon^\infty \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}\frac{dx}{x} = \int_\varepsilon^\infty\left(\frac{dx}{x} + \frac{x\,dx}{n^2\pi^2 - x^2}\right) = -\mathrm{l}.\,\varepsilon + \mathrm{l}.\,n\pi,$$

d'où, en faisant tendre ε vers zéro,

$$\int_0^\infty\left(-\cos 2x + \frac{n^2\pi^2}{n^2\pi^2 - x^2}\right)\frac{dx}{x} = C + \mathrm{l}.\,2n\pi.$$

Substituant dans l'équation (4), et portant la valeur de l'intégrale qui figure au premier membre de (4) dans l'équation (2), on obtient

$$\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\frac{\pi}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{C + \mathrm{l}.\,2n\pi}{n}\sin 2n\mu\pi,$$

ce qui est la série de M. Kummer.

31. Nous terminerons ce travail, consacré aux transformations de la fonction $\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)$, en faisant connaître une nouvelle expression de la dérivée de cette fonction.

Considérons la formule de Dirichlet :

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty\left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}}\right)dx,$$

et posons, dans cette formule, $\mu = 1$, nous rappelant que le premier membre est égal alors à $-$C. Nous aurons

$$-\mathrm{C} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right) dx,$$

et, en soustrayant membre à membre,

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-\mu x}}{1 - e^{-x}} dx = \int_0^\infty \frac{e^{(\mu-1)\frac{x}{2}} - e^{-(\mu-1)\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} e^{-\mu\frac{x}{2}} dx,$$

ou

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = 2\int_0^\infty \frac{e^{(\mu-1)x} - e^{-(\mu-1)x}}{e^{x} - e^{-x}} e^{-\mu x} dx.$$

Or, d'après une formule bien connue (*), qui se déduit fort facilement des séries de Fourier, on a pour toute valeur de μ comprise entre zéro et 1, et pour des valeurs quelconques de x,

$$\frac{e^{(\mu-1)x} - e^{-(\mu-1)x}}{e^{x} - e^{-x}} = -2\mu\left(\frac{\sin\mu\pi}{\pi^2 + x^2} + \frac{2\sin 2\mu\pi}{2^2\pi^2 + x^2} + \frac{3\sin 3\mu\pi}{3^2\pi^2 + x^2} + \ldots\right) = -2\pi\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n\sin n\mu\pi}{n^2\pi^2 + x^2}.$$

Substituant dans l'intégrale ci-dessus, nous obtiendrons

$$(5)\quad \frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\pi\int_0^\infty e^{-\mu x}dx\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n\sin n\mu\pi}{n^2\pi^2 + x^2} = -4\pi\sum_{n=1}^{n=\infty} n\sin n\mu\pi\int_0^\infty\frac{e^{-\mu x}dx}{n^2\pi^2 + x^2}.$$

Cette formule, où l'on voit reparaître dans le développement de $\frac{d.\mathrm{l}.\Gamma(\mu)}{d\mu}$ une transcendante déjà rencontrée dans le développement de la fonction $\varpi(\mu)$, peut conduire à des relations assez curieuses. Nous nous bornerons à signaler la suivante.

Posons, dans l'intégrale, $x = n\pi z$; il viendra

$$\frac{d\,.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin n\mu\pi\int_0^\infty\frac{e^{-n\pi\mu z}dz}{1 + z^2},$$

(*) Voy., par exemple, Catalan, *Traité élémentaire des séries*, p. 112.

ou encore

$$(6) \quad \ldots\ldots \frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\mu\pi z}\sin n\mu\pi.$$

La série qui figure sous le signe d'intégration est facile à sommer. Il suffit de poser

$$\zeta = e^{-\mu\pi(z-\sqrt{-1})},$$

et d'observer que l'on a

$$\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{\zeta}{1-\zeta} = \frac{e^{-\mu\pi(z-\sqrt{-1})}}{1 - e^{-\mu\pi(z-\sqrt{-1})}} = \frac{1}{e^{\mu\pi(z-\sqrt{-1})} - 1}.$$

Multiplions haut et bas cette dernière expression par $e^{\mu\pi(z+\sqrt{-1})}$ pour rendre réel le dénominateur. Nous aurons

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\mu\pi z}\, e^{n\mu\pi\sqrt{-1}} = \frac{e^{\mu\pi z}\, e^{\mu\pi\sqrt{-1}}}{1 - 2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}},$$

et, en égalant les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-n\mu\pi z}\sin n\mu\pi = \frac{e^{\mu\pi z}\sin\mu\pi}{1 - 2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}.$$

Par cette substitution, l'équation (6) devient

$$\frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = -4\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{e^{\mu\pi z}}{1 - 2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2},$$

et, par suite,

$$(7) \quad \ldots \int_0^\infty \frac{e^{\mu\pi x}}{1 - 2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4\sin\mu\pi}\left[\frac{d.\,\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C}\right].$$

Cette intégrale est donc ramenée à une transcendante bien connue, pourvu que la valeur de μ soit moindre que l'unité. Par exemple, si l'on transforme le second membre au moyen d'une relation donnée par Gauss, on aura

$$(8) \quad \ldots \int_0^\infty \frac{e^{\mu\pi z}}{1 - 2e^{\mu\pi z}\cos\mu\pi + e^{2\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4\sin\mu\pi}\int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx.$$

Comme l'intégrale du second membre s'obtient sous forme finie, toutes les fois que μ est rationnel, il en sera de même du premier membre. Ainsi, pour $\mu = \frac{1}{2}$, on a

$$\int_0^1 \frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\,dx = 2\int_0^1 \frac{z-1}{1-z^2}\,dz = -2\int_0^1 \frac{dz}{1+z} = -2\,\mathrm{l}.\,2,$$

donc, par la relation (8),

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}z} + e^{-\frac{\pi}{2}z}}\,\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.\,2,$$

résultat déjà trouvé par Legendre (*).

De même, si dans l'équation (8) on pose $\mu = \frac{1}{4}$, on trouvera d'abord

$$\int_0^1 \frac{1-x^{-\frac{3}{4}}}{1-x}\,dx = 4\int_0^1 \frac{z^3-1}{1-z^4}\,dz = -\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{l}.\,8\right).$$

Substituant dans l'équation (8) et observant que

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

on aura

$$\int_0^\infty \frac{e^{\frac{\pi z}{4}}}{1-\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi z}{4}} + e^{\frac{\pi z}{2}}}\,\frac{dz}{1+z^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{l}.\,8\right),$$

égalité qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1-\sqrt{2}\,e^x + e^{2x}}\,\frac{dx}{\pi^2 + 16x^2} = \frac{\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{l}.\,8}{\pi}\right).$$

(*) *Exercices de calcul intégral*, t. II, p. 50.