Ueber die Elementartheiler componirter Systeme.

(Nach einer brieflichen Mittheilung von Herrn *K. Hensel.*)

(Von Herrn *P. Muth* in Osthofen.)

Gelegentlich der Analyse des interessanten Beweises, den Herr *Hensel* in diesem Journale (1894) Bd. 114, S. 109ff. für den Fundamentalsatz über die Elementartheiler componirter Systeme aus ganzen Grössen gegeben hat, bemerkte ich, dass der Beweis insofern einer Ergänzung bedarf, als der Fall unberücksichtigt geblieben ist, wo $p = 0$ ist. Auf eine Anfrage bei Herrn *Hensel* hin hatte dieser die Güte, mir noch an demselben Tage den fehlenden Beweis zukommen zu lassen; denselben theile ich mit Zustimmung des Autors im Folgenden mit.

Der *Hensel*sche Beweis a. a. O. gilt mit einigen Modificationen auch dann, wenn das System B Vielfaches eines Systems A aus *ganzen oder gebrochenen* Grössen ist. Die nachstehende Ergänzung hingegen wird gleich für den Fall vorgenommen, dass A aus ganzen oder gebrochenen Elementen besteht. Um die Verständlichkeit zu erhöhen, werde ich mir erlauben, mitunter auf meine „Theorie und Anwendung der Elementartheiler"*) hinzuweisen.

Es handelt sich dabei um Folgendes: *Ist*

$$\mathfrak{R} = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Bmatrix}$$

ein System aus n^2 ganzen oder gebrochenen Grössen eines Körpers von Zahlen

---

*) Leipzig, Teubner, 1899. Kurz citirt mit ET.

oder Functionen, so soll gezeigt werden, dass der ϱ-te Elementartheiler des Systems

$$\mathfrak{R}' = \left\{\begin{matrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\}$$

Vielfaches des ϱ-ten Elementartheilers des Systems $\mathfrak{R}$ ist. (ET. S. 225.)

Beweis. Wir führen denselben zunächst für den Fall, dass die a_{ik} ganze oder gebrochene *rationale* Zahlen sind; unter p verstehen wir eine Primzahl, den Rang von $\mathfrak{R}'$ bezeichnen wir mit r. Es ist r höchstens gleich dem Range von $\mathfrak{R}$.*) Ist alsdann der 1-te, 2-te, ..., r-te Elementartheiler von $\mathfrak{R}'$ mod. p bezw. gleich

$$p^{\delta_1}, \quad p^{\delta_2}, \quad \dots, \quad p^{\delta_r},$$

so kann man durch alleinige Anwendung von Elementartransformationen in Bezug auf p $\mathfrak{R}'$ in das System

$$\mathfrak{R}_1' = \left\{\begin{matrix} 0 & p^{\delta_1} & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & 0 & p^{\delta_2} & 0 & \dots & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & & & p^{\delta_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & \dots & 0 \end{matrix}\right\}$$

überführen, wo $\delta_1, \dots, \delta_r$ positive oder negative ganze Zahlen bezw. Null sind, und $\delta_i \geqq \delta_{i-1}$ ist (ET. S. 226—227). Wendet man dieselben Transformationen auf das System $\mathfrak{R}$ an, so geht es in ein System von der Gestalt

$$\mathfrak{R}_1 = \left\{\begin{matrix} e_1 & p^{\delta_1} & 0 & 0 & \dots & & & 0 \\ e_2 & 0 & p^{\delta_2} & 0 & \dots & & & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_r & 0 & \dots & & p^{\delta_r} & & \dots & 0 \\ e_{r+1} & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_n & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \end{matrix}\right\}.$$

*) Man erkennt leicht, dass der Rang von $\mathfrak{R}$ entweder gleich r oder gleich $r+1$ ist.

über. Wir setzen jetzt $e_i = p^{\varepsilon_i} e'_i$, wo die Primzahl p weder im Nenner noch im Zähler von e'_i als Factor auftreten soll. Ferner bezeichnen wir die k-te Spalte (Zeile) eines beliebigen Systems kurz mit $V_k(H_k)$. Ist nun ε_1 nicht die kleinste der Zahlen ε_i, sondern z. B. $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, so addiren wir die H_2 zu H_1, multipliciren im neuen Systeme die V_2 mit $p^{\delta_2-\delta_1}$ und subtrahiren sie dann von der V_3 und erhalten durch diese Elementartransformationen in Bezug auf p ein System, in welchem die H_1 gleich

$$e_1+e_2, \quad p^{\delta_1}, \quad 0 \dots 0$$

ist; e_1+e_2 ist aber genau durch die ε_2-te Potenz von p theilbar. Das System hat wieder die Gestalt von $\mathfrak{R}_1$, aber jetzt ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. So fortfahrend, schaffen wir uns ein System von der Gestalt des Systems $\mathfrak{R}_1$, in welchem aber jetzt

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \dots \leqq \varepsilon_n$$

ist. Wenn in diesem Systeme $\mathfrak{R}_1$ $\varepsilon_1 > \delta_1$ ist, so addiren wir die V_2 zur V_1 und erhalten ein System, in welchen — bei unserer früheren Bezeichnung — $\varepsilon_1 = \delta_1$ ist. Analog verfahren wir mit ε_2 und δ_2, ε_3 und δ_3 u. s. w. Dieses führt zu einem Systeme $\mathfrak{R}_1$, in dem

$$(1.) \qquad \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \dots \leqq \varepsilon_n, \qquad \varepsilon_1 \leqq \delta_1, \qquad \varepsilon_2 \leqq \delta_2, \; \dots, \; \varepsilon_r \leqq \delta_r$$

ist.

Nun verlangen wir aber noch weiter, dass

$$(2.) \qquad \varepsilon_2-\varepsilon_1 \leqq \delta_2-\delta_1, \qquad \varepsilon_3-\varepsilon_2 \leqq \delta_3-\delta_2, \; \dots, \; \varepsilon_r-\varepsilon_{r-1} \leqq \delta_r-\delta_{r-1}$$

ist. Falls dieses nicht von vorn herein der Fall, sondern z. B.

$$(3.) \qquad \varepsilon_2 > \delta_2-\delta_1+\varepsilon_1$$

ist, so multipliciren wir die H_1 mit $p^{\delta_2-\delta_1}$ und addiren sie zur H_2; im neuen Systeme subtrahiren wir die V_3 von der V_2 und erhalten ein System $\mathfrak{R}_1$, in welchem das jetzige e_2 gleich

$$e_2+e_1 p^{\delta_2-\delta_1} = e'_2 p^{\varepsilon_2} + e'_1 p^{\delta_2-\delta_1+\varepsilon_1}$$

ist; dasselbe ist wegen (3.) genau durch $p^{\delta_2-\delta_1+\varepsilon_1}$ theilbar, und somit ist jetzt $\varepsilon_2-\varepsilon_1 = \delta_2-\delta_1$. So weitergehend erhalten wir ein zu $\mathfrak{R}$ mod. p äquivalentes System $\mathfrak{R}_1$ (ET. S. 226), welches die Eigenschaften (1.) und (2.) besitzt.

Wir bestimmen jetzt den ϱ-ten Elementartheiler $E_\varrho(\mathfrak{R}_1)$ von $\mathfrak{R}_1$. Eine Subdeterminante ϱ-ten Grades S_ϱ des Systems $\mathfrak{R}_1$ ($\varrho \leqq r$) ist entweder mod. p gleich

$$p^{\delta_{\varkappa_1}+\delta_{\varkappa_2}+\dots+\delta_{\varkappa_\varrho}}$$

oder gleich

$$P = p^{\delta_{\varkappa_1}+\delta_{\varkappa_2}+\cdots+\delta_{\varkappa_{\mu-1}}+\varepsilon_{\varkappa_\mu}+\delta_{\varkappa_{\mu+1}}+\cdots+\delta_{\varkappa_\varrho}},$$

wo $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ gewisse der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ — in dieser Reihenfolge — vorstellen. Wegen $\delta_\varrho \geqq \delta_{\varrho-1}$ ist von den zuerst stehenden Potenzen von p die Potenz $p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\varrho}$ die *niedrigste,* und ferner zeigt man leicht, dass von den Potenzen P wiederum die $(\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\varrho-1}+\varepsilon_\varrho)$-te diese Eigenschaft besitzt. Denn P wird verkleinert bezw. nicht vergrössert, wenn man für $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ bezw. $1, 2, \ldots, \varrho$ setzt, und von diesen kleinsten Exponenten

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\delta_\varrho &= d_1,\\
\delta_1+\varepsilon_2+\delta_3+\cdots+\delta_\varrho &= d_2,\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\varepsilon_\varrho &= d_\varrho
\end{aligned}$$

ist der letzte d_ϱ der niedrigste. Wegen (2.) ist nämlich für $i = 1, 2, \ldots, \varrho-1$

$$d_i - d_\varrho = (\varepsilon_i+\delta_\varrho)-(\delta_i+\varepsilon_\varrho) = (\delta_\varrho-\delta_i)-(\varepsilon_\varrho-\varepsilon_i) \geqq 0.$$

Endlich ist wegen (1.) $d_\varrho \leqq \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\varrho$. Bedeutet daher $D_\varrho(\mathfrak{R}_1)$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler der S_ϱ (ET. S. 224), so ist mod. p

$$\begin{aligned}
D_\varrho(\mathfrak{R}_1) &= p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\varrho-1}+\varepsilon_\varrho},\\
D_{\varrho-1}(\mathfrak{R}_1) &= p^{\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{\varrho-2}+\varepsilon_{\varrho-1}}
\end{aligned}$$

und somit mod. p

$$E_\varrho(\mathfrak{R}_1) = p^{\delta_{\varrho-1}+(\varepsilon_\varrho-\varepsilon_{\varrho-1})}.$$

Da aber die Systeme $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ mod. p äquivalent sind, so ist auch der ϱ-te Elementartheiler von $\mathfrak{R}$ mod. p gleich $p^{\delta_{\varrho-1}+\varepsilon_\varrho-\varepsilon_{\varrho-1}}$; der ϱ-te Elementartheiler $E_\varrho(\mathfrak{R}')$ von $\mathfrak{R}'$ ist aber mod. p gleich $p^{\delta_\varrho} = p^{\delta_{\varrho-1}+(\delta_\varrho-\delta_{\varrho-1})}$, ferner ist wegen (2.)

$$\delta_{\varrho-1}+(\delta_\varrho-\delta_{\varrho-1}) \geqq \delta_{\varrho-1}+(\varepsilon_\varrho-\varepsilon_{\varrho-1}),$$

und folglich muss

$$\frac{E_\varrho(\mathfrak{R}')}{E_\varrho(\mathfrak{R})}$$

eine mod. p ganze Zahl sein; p war aber eine beliebige Primzahl, weshalb $\frac{E_\varrho(\mathfrak{R}')}{E_\varrho(\mathfrak{R})}$ eine *absolut ganze Zahl* ist, was zu beweisen war.

Der Beweis bleibt Wort für Wort bestehen, wenn man unter den a_{ik} in $\mathfrak{R}$ ganze oder gebrochene Functionen einer oder mehrerer Variabeln oder ganze oder gebrochene Grössen eines Körpers von Zahlen oder Functionen und entsprechend unter p eine lineare bez. irreductibele Function oder einen wirklichen bez. idealen Primtheiler versteht.