Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée.

(Par M. *F. Gomes Teixeira* à Porto, Portugal.)

Les formules de *Lagrange* et de *Bürmann* et celle de *Laurent* sont des cas particuliers d'une formule qui donne le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives d'une autre fonction. Cette formule, qu'on obtient en généralisant la méthode au moyen de laquelle on trouve ces formules-là, est donnée dans les premiers n^{os}. de ce travail. Mais cette généralisation facile n'est pas le seul but que nous avons en vue; notre but principal est de présenter quelques conséquences de la formule considérée, qui nous paraissent offrir quelque intérêt.

La première application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$. Nous démontrons premièrement que, étant donnée une fonction holomorphe dans la couronne limitée par deux circonférences dont les centres ne coïncident pas, on peut déterminer a et b de manière qu'elle soit développable en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$ convergente dans la couronne considérée. Ensuite nous faisons voir qu'on peut développer, au moyen de séries de cette forme, les fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites, ou par des droites et par des arcs de circonférence, et nous arrivons à un théorème qui contient comme cas particulier un théorème donné par M. *Appell* dans les *Acta mathematica* (t. I, p. 111). Nous donnons enfin une méthode pour former des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites, qui ne peuvent pas être continuées à l'extérieur du contour de l'aire.

La deuxième application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de sin x. Nous avons considéré déjà ces développements dans un mémoire publié dans le tome 116 de ce journal, et nous allons faire voir maintenant que la méthode pour déterminer les coefficients du développement y donnée est applicable aux fonctions qui admettent des pôles.

La dernière application concerne les développements ordonnés suivant les puissances de $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$. A cet égard je donne une démonstration, que je crois nouvelle, de la formule de *Fourier* pour les cas des fonctions de variables complexes périodiques, et encore une extension de cette formule applicable dans le cas où la fonction considérée n'est pas périodique.

I.

Sur le développement de $f(x)$ en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$.

1. Supposons: 1°. que $f(z)$ soit une fonction holomorphe dans une couronne A, limitée extérieurement par une courbe S et intérieurement par une courbe s; 2°. que $\Theta(z)$ soit une fonction holomorphe dans l'aire limitée par S, possédant à l'intérieur de ce contour un seul zéro a; 3°. que x soit l'affixe d'un point de l'intérieur de la couronne considérée; 4°. qu'on ait, pour tous les points z du contour S,

$$|\Theta(x)| < |\Theta(z)|,$$

et, pour tous les points du contour s,

$$|\Theta(x)| > |\Theta(z)|.$$

L'équation

$$\Theta(z) - \Theta(x) = 0$$

a, dans ce cas, une seule racine $z = x$ à l'intérieur de S, comme on le voit au moyen de l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz + \Theta(x)\int_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta^2(z)}dz + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)},$$

dont le premier et le dernier membres représentent respectivement le nombre des racines de l'équation considérée et celui des racines de l'équation $\Theta(z) = 0$ qui existent à l'intérieur de S; et le théorème de *Cauchy* donne

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_S \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} - \int_s \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}\right].$$

Les intégrales, qui entrent dans cette formule, peuvent être développées suivant les puissances de $\Theta(x)$ au moyen des formules

$$\int\limits_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n(x) \int\limits_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)},$$

$$\int\limits_s \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Theta^n(x)} \int\limits_s f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz.$$

On a donc la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \Theta^n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Theta^n(x)},$$

où

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_s f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz,$$

laquelle donne le développement de $f(x)$ suivant les puissances positives et négatives de $\Theta(x)$.

2. Si la fonction $f(z)$ a un nombre fini de points singuliers dans l'aire limitée par la courbe s et ces points sont des pôles, les intégrales qui entrent dans la formule précédente peuvent être obtenues de la manière suivante.

Soient $b_1, b_2, \ldots, b_k$ ces points et soient $c_1, c_2, \ldots, c_k$, c des circonférences dont les centres sont les points d'affixes $b_1, b_2, \ldots, b_k$, a et dont les rayons sont assez petits pour qu'ils n'existent pas deux à l'intérieur d'une même circonférence. On a

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_S \frac{f(z)\Theta'(z)\,dz}{\Theta^{n+1}(z)} = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_S \frac{f'(z)\,dz}{n\,\Theta^n(z)}$$

$$= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2ni\pi} \int\limits_{c_m} \frac{f'(z)\,dz}{\Theta^n(z)} + \frac{1}{2ni\pi} \int\limits_c \frac{f'(z)\,dz}{\Theta^n(z)},$$

$$B_n = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_S f(z)\,\Theta^{n-1}(z)\,\Theta'(z)\,dz = -\frac{1}{2ni\pi} \int\limits_S f'(z)\,\Theta^n(z)\,dz$$

$$= -\frac{1}{2ni\pi} \sum_{m=1}^{k} \int\limits_{c_m} f'(z)\,\Theta^n(z)\,dz,$$

et par conséquent, α étant le degré de multiplicité du pôle b_m,

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha!\,n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(\frac{f'(x)\,(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)}\right)\right]_{x=b_m} + \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{f'(x)}{\theta^n(x)}\right)\right]_{x=a},$$

$$B_n = -\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(f'(x) \Theta^n(x) (x-b_m)^{\alpha+1} \right) \right]_{x=b_m},$$

où $\theta(x) = \frac{\Theta(x)}{x-a}$.

Il peut arriver que a soit aussi un pôle de $f(x)$. Il est facile de voir qu' alors on doit calculer A_n au moyen de la formule

$$A_n = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{f'(x)(x-b_m)^{\alpha+1}}{\Theta^n(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{(n+\beta)! n} \left[\frac{d^{\beta+n}}{dx^{\beta+n}} \left(\frac{f'(x)(x-a)^{\beta+1}}{\theta^n(x)} \right) \right]_{x=a},$$

β représentant le degré de multiplicité du pôle a, et que la formule qui donne B_n doit être remplacée par la suivante:

$$B_n = -\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{\alpha! n} \left[\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(f'(x) \Theta^n(x) (x-b_m)^{\alpha+1} \right) \right]_{x=b_m} - \frac{1}{(\beta-n)! n} \left[\frac{d^{\beta-n}}{dx^{\beta-n}} \left(f'(x) \theta^n(x) (x-a)^{\beta+1-n} \right) \right]_{x=a},$$

quand $n \overline{\gtrless} \beta$.

Les formules antérieures ne donnent pas les valeurs de A_0, mais on peut les trouver au moyen de la formule

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2i\pi} \int_{c_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)} + \frac{1}{2i\pi} \int_{c} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)},$$

qui donne

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\alpha}{\Theta(x)} \right) \right]_{x=b_m} + f(a),$$

quand a est un point ordinaire de $f(x)$, et

$$A_0 = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{(\alpha-1)!} \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-b_m)^\beta}{\Theta(x)} \right) \right]_{x=b_m} + \frac{1}{\beta!} \left[\frac{d^\beta}{dx^\beta} \left(\frac{f(x)\Theta'(x)(x-a)^\beta}{\theta(x)} \right) \right]_{x=a},$$

quand a est un pôle de $f(x)$.

3. Considérons l'équation

$$\Theta(x) = (x-a)\theta(x) = t,$$

où t représente un nombre donné tel qu'il soit, le long de S, $|\Theta(z)| > |t|$ et, le long de s, $|\Theta(z)| < |t|$. L'équation $\Theta(x) = t$ a alors une seule racine dans la couronne limitée par les courbes S et s; on voit, en effet, au moyen des égalités

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_S \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-t} = \frac{1}{2i\pi}\left[\int\limits_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}dz + t\int\limits_S \frac{\Theta'(z)}{\Theta^2(z)}dz + \cdots\right] = 1,$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_s \frac{\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-t} = -\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{1}{t}\int\limits_s \Theta'(z)dz + \frac{1}{t^2}\int\limits_s \Theta'(z)\Theta^2(z)dz + \cdots\right] = 0$$

que l'équation considérée a une racine à l'intérieur de S et qu'elle n'a aucune à l'intérieur de s.

Cela posé, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans la couronne limitée par S et s, la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{t^n},$$

où A_n et B_n représentent des coefficients qui sont donnés par les formules trouvées antérieurement, donne le développement de la fonction $f(x)$ de la racine considérée suivant les puissances de t.

Considérons, par exemple, l'équation de *Kepler*

$$x = a + e\sin x,$$

et soit $f(x) = \dfrac{1}{x-a}\cdot$

On a alors

$$A_0 = -\frac{\cos a}{\sin a},$$

$$A_n = -\frac{1}{(n+1)!\,n}\cdot\frac{d^{n+1}(\sin^n a)}{da^{n+1}}, \qquad n>0)$$

$$B_1 = \frac{1}{\sin a}, \quad B_2 = B_3 = \cdots = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{x-a} = -\frac{\cos a}{\sin a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!\,n}\cdot\frac{d^{n+1}(\sin^n a)}{da^{n+1}} + \frac{1}{e\sin a}\cdot$$

II.

Sur les séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x-a}{x-b}$.

4. Pour faire une première application de la doctrine antérieure, considérons les développements ordonnés suivant les puissances de $\dfrac{x-a}{x-b}$, a et b étant deux nombres donnés.

Pour étudier ces développements, il faut chercher deux courbes S et s telles que, pour tout point z de S et pour tout point x à l'intérieur de la couronne qu'elles limitent, on ait

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| < \left|\frac{z-a}{z-b}\right|,$$

et, pour tout point z de s et pour les mêmes valeurs de x, on ait

$$\left|\frac{x-a}{x-b}\right| > \left|\frac{z-a}{z-b}\right|.$$

On est ainsi conduit à considérer les courbes données par l'équation

$$\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = C,$$

C étant une constante, ou, en posant $z = X+iY$, $a = \alpha+i\beta$, $b = \alpha'+i\beta'$,

$$(1.)\qquad (X-x_1)^2+(Y-y_1)^2 = \frac{C^2[(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2]}{(1-C^2)^2},$$

où

$$(2.)\qquad x_1 = \frac{\alpha-\alpha' C^2}{1-C^2},\quad y_1 = \frac{\beta-\beta' C^2}{1-C^2}.$$

Cette équation représente des circonférences dont les centres (x_1, y_1) sont placés sur la droite qui passe par les points dont les affixes sont a et b.

Aux valeurs que prend C^2, quand il varie depuis 0 jusqu'à 1, il correspond un ensemble de circonférences dont les rayons varient depuis 0 jusqu'à l'infini et dont les centres varient depuis le point (α, β), qui représente a et qui correspond à $C = 0$, jusqu'à l'infini, en restant toujours du même côté du point (α, β). Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs inférieures à C^2, et le point dont l'affixe est a, est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

Aux valeurs de C^2 comprises entre ∞ et 1 correspond un autre ensemble de circonférences dont les rayons sont compris entre 0 et ∞ et dont les centres sont compris entre le point dont l'affixe est b, qui correspond à $C^2 = \infty$, et l'infini, en restant tous du côté opposé, par rapport à (α, β), de ceux des circonférences du premier ensemble. Chaque circonférence de cet ensemble contient à l'intérieur celles qui correspondent à des valeurs supérieures à C^2, et le point dont l'affixe est b est à l'intérieur de toutes ces circonférences.

En cherchant les points d'intersection de la droite dont l'équation est

$$\frac{Y-\beta}{y_1-\beta} = \frac{X-\alpha}{x_1-\alpha},$$

laquelle passe par les points a et b, avec les circonférences représentées par l'équation (1.), on trouve pour les valeurs des abscisses x' et x'' de ces points

$$x' = \frac{\alpha-C\alpha'}{1-C},\quad x'' = \frac{\alpha+C\alpha'}{1+C},$$

et on voit qu'elles tendent la première vers l'infini et la seconde vers $\frac{\alpha+\alpha'}{2}$, quand C^2 tend vers l'unité. Donc les deux ensembles de circonférences représentées par l'équation (1.) sont séparés par une droite K, perpendiculaire à la droite des centres, qui coupe cette droite dans un point équidistant de (α, β) et (α', β'), et les circonférences des deux ensembles tendent vers la droite K quand C^2 tend vers l'unité. On peut même voir que la droite K est le lieu des points où $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = 1$.

5. De ce qu'on vient de démontrer dans les n^{os}. précédents, on conclut que, si la fonction $f(x)$ est holomorphe dans une couronne limitée par deux des circonférences représentées par l'équation (1.), on a, pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'intérieur de cette couronne

$$(3.)\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{x-b}{x-a}\right)^n,$$

A_n et B_n étant des constantes qu'on détermine par la méthode donnée dans les n^{os}. 1 et 2.

Dans le cas particulier où la fonction $f(x)$ est holomorphe dans celle des moitiés, dans lesquelles la droite K divise le plan, qui contient le point a, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n.$$

C'est ce qu'il arrive dans le cas de la fonction $\log x$, dont le développement suivant les puissances de $\frac{x-a}{x+a}$, qui est bien connu, peut être obtenu de la manière suivante.

On a

$$A_n = \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{(z-b)^n}{z(z-a)^n}\,dz = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z^{-1}(z-b)^n\right)\right]_{z=a}.$$

Mais on trouve au moyen de la formule de *Leibnitz*

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = \frac{n!\,b^n}{x^{n+1}},$$

et par conséquent

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^n\right) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{-1}(x-b)^{n-1}(x-b)\right)$$
$$= \frac{(n-1)!}{x}\cdot\frac{b^{n-1}}{x^{n-1}}(x-b) + (n-1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(x^{-1}(x-b)^{n-1}\right).$$

Donc

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{-1}(x-b)^n) = (n-1)!\frac{x-b}{x}\left[\left(\frac{b}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{b}{x}\right)^{n-2}+\cdots+1\right] = \frac{(n-1)!}{x^n}(x^n-b^n).$$

On a donc

$$\log x = \log a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{a^n-b^n}{a^n}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n.$$

En posant $b=-a$ il vient la formule connue

$$\log x = \log a+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{2m+1},$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de celle des deux moitiés, dans lesquelles la perpendiculaire à la droite qui passe par les points d'affixes a et $-a$, divise le plan qui contient le point a.

6. Voici une question qui se présente maintenant. Étant données deux circonférences dans le plan de représentation des x, l'une placée à l'intérieur de l'autre, et une fonction $f(x)$ holomorphe dans la couronne limitée par ces circonférences, est-il toujours possible de former une série de la forme (3.) qui la représente dans la couronne considérée?

Supposons premièrement que le centre de la circonférence extérieure coïncide avec l'origine des coordonnées, et soient R_1 et R_2 les rayons des circonférences extérieure et intérieure, x' et y' les coordonnées du centre de celle-ci.

Pour résoudre la question considérée il faut voir si les deux circonférences données sont comprises entre celles que représente l'équation (1.), et, par conséquent, s'il existe un système de valeurs réelles de C_1^2, C_2^2, α, β, α', β' telles qu'il soit

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha = \alpha' C_1^2,\quad \beta = \beta' C_1^2,\\ &\alpha-\alpha' C_2^2 = (1-C_2^2)x',\quad \beta-\beta' C_2^2 = (1-C_2^2)y',\end{aligned}\right.$$

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{C_1^2[(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2]}{(1-C_1^2)^2},\\ R_2^2 &= \frac{C_2^2[(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2]}{(1-C_2^2)^2}.\end{aligned}\right.$$

Or les quatre premières équations donnent

$$\alpha' = \frac{1-C_2^2}{C_1^2-C_2^2}x',\quad \beta' = \frac{1-C_2^2}{C_1^2-C_2^2}y',$$

et les deux dernières donnent ensuite

$$R_1^2 = \frac{C_1^2(1-C_2^2)^2}{(C_1^2-C_2^2)^2}(x'^2+y'^2),\quad R_2^2 = \frac{C_2^2(1-C_1^2)^2}{(C_1^2-C_2^2)^2}(x'^2+y'^2),$$

et par conséquent, en posant $R_1 - R_2 = k$, $\frac{R_1}{R_2} = m$, $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \varrho$,

$$k = \frac{1 + C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varrho, \quad m = \frac{C_1(1 - C_2^2)}{C_2(1 - C_1^2)}.$$

En éliminant C_1^2 et C_2^2 entre ces équations, on trouve premièrement

$$C_1 = \frac{\varrho - C_2 k}{k - C_2 \varrho}, \tag{6.}$$

et ensuite

$$k\varrho(C_2^4 - 1) + [m(\varrho^2 - k^2) - k^2 - \varrho^2] C_2 (C_2^2 - 1) = 0,$$

ou

$$k\varrho(C_2^2 + 1) + C_2[m(\varrho^2 - k^2) - k^2 - \varrho^2] = 0.$$

Cette équation donne pour C_2 deux valeurs, qui sont réelles quand on a

$$(\varrho^2 - k^2)[\varrho^2(m-1)^2 - k^2(m+1)^2] > 0.$$

Or, comme la circonférence dont le rayon est R_2 est placée à l'intérieur de celle dont le rayon est R_1 et comme ϱ représente la distance des centres, on a

$$\varrho < R_1 - R_2, \quad \varrho < R_1 + R_2,$$

et par conséquent

$$\varrho < k, \quad \varrho(m-1) < k(m+1).$$

Les deux valeurs considérées sont donc réelles.

On peut encore remarquer que ces deux racines sont réciproques; soient donc représentées par t et $\frac{1}{t}$. En substituant ces valeurs dans l'équation (6.) il vient, pour déterminer C_1, les équations

$$C_1 = \frac{\varrho - tk}{k - t\varrho} = v, \quad C_1 = \frac{t\varrho - k}{tk - \varrho} = \frac{1}{v},$$

et on voit que les deux valeurs de C_1 sont aussi réciproques l'une de l'autre.

En substituant enfin les valeurs qu'on vient de trouver pour C_1 et C_2 dans les équations (4.) on obtient les valeurs de $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$. On trouve ainsi, en posant $C_1 = v$, $C_2 = t$,

$$\alpha' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2} x', \quad \beta' = \frac{1 - t^2}{v^2 - t^2} y',$$

$$\alpha = \frac{v^2(1 - t^2)}{v^2 - t^2} x', \quad \beta = \frac{v^2(1 - t^2)}{v^2 - t^2} y',$$

et, en posant $C_1 = \frac{1}{v}$, $C_2 = \frac{1}{t}$,

$$\alpha' = \frac{v^2(t^2 - 1)}{t^2 - v^2} x', \quad \beta' = \frac{v^2(t^2 - 1)}{t^2 - v^2} y',$$

$$\alpha = \frac{t^2 - 1}{t^2 - v^2} x', \quad \beta = \frac{t^2 - 1}{t^2 - v^2} y'.$$

Si l'on permute dans le premier système de formules α et α', β et β', on obtient le second. Ces formules ne déterminent donc que deux points (α, β), (α', β'), et ces points représentent les nombres a et b.

De tout ce qui précède on conclut que les circonférences données sont comprises entre les circonférences réelles représentées par les équations (1.) et (2.), et qu'il existe, par conséquent, une série de la forme (3.) qui représente, dans la couronne limitée par ces circonférences, la fonction donnée $f(x)$. Les valeurs des nombres a et b, qui entrent dans cette série, sont données par les formules qu'on vient d'obtenir, les valeurs des coefficients sont données par les formules obtenues dans les n^{os}. 1 et 2.

Nous avons supposé jusqu'ici que le centre de la circonférence extérieure coïncidait avec l'origine des coordonnées. Si le centre de cette circonférence est le point d'affixe λ, on peut poser $x = x' + \lambda$, développer la fonction $f(x' + \lambda)$ suivant les puissances de $\frac{x'-a}{x'-b}$ et remplacer dans le résultat x' par $x - \lambda$.

Il convient encore de remarquer que, dans le cas limite où le cercle intérieur se réduit à un point (x', y'), c'est-à-dire, dans le cas où la fonction $f(x)$ est holomorphe dans un cercle donné, le point (x', y') de son intérieur excepté, on a, en premier lieu, $\alpha = x'$, $\beta = y'$, $C_2 = 0$, et ensuite

$$C_1^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{R_1^2}, \quad \alpha' = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2} x', \quad \beta' = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2} y'.$$

Les constantes a et b, qui entrent dans le développement de $f(x)$, sont alors données par les formules

$$a = x' + iy', \quad b = \frac{R_1^2}{x'^2 + y'^2}(x' + iy');$$

le point b est donc l'inverse de a par rapport au centre du cercle donné.

7. Pour faire une première application de la doctrine antérieure considérons une aire A limitée intérieurement par des arcs de circonférence s_1, $s_2, \ldots, s_k$, limitée extérieurement, dans une direction, par une droite K, qui ne coupe pas ces arcs, et infinie dans les autres directions; et supposons que les circonférences auxquelles appartiennent les arcs considérés ne coupent pas l'aire A et que $f(x)$ soit une fonction holomorphe dans cette aire. Prenons à l'intérieur de A un point d'affixe a et sur la droite perpendiculaire à K, tirée par ce point, un autre point d'affixe b tel que les distances des deux points à K soient égales. Tirons ensuite une des circonférences représentées par

l'équation $\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \text{const.}$, dont le rayon soit assez grand et le centre assez éloigné de la droite K pour contenir à l'intérieur les arcs $s_1, s_2, \ldots$.

Cela posé, nous avons, C représentant cette circonférence et x l'affixe d'un point de l'intérieur de l'aire limitée par C et par $s_1, s_2, \ldots$

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\left[\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} - \sum_{m=1}^{k}\int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)}\right],$$

où $\Theta(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

Mais

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b},$$

$$\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n,$$

$$\int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \int_{s_m} \frac{f(z)dz}{z-x} - \int_{s_m} \frac{f(z)dz}{z-b}$$

$$= -\int_{s_m} \frac{f(z)dz}{(x-c_m)\left[1-\frac{z-c_m}{x-c_m}\right]} - \int_{s_m} \frac{f(z)dz}{z-b},$$

où $c_1, c_2, \ldots$ représentent les affixes des centres de $s_1, s_2, \ldots$.

En remarquant maintenant qu'on a $|z-c_m| < |x-c_m|$, le long de s_m, on voit que la première des intégrales, qui entrent dans le dernier membre de cette égalité, peut être développée en série ordonnée suivant les puissances de $\frac{z-c_m}{x-c_m}$, et qu'on a par conséquent

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)} = G\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

$G\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$ représentant, suivant l'usage, une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-c_m}$.

Nous avons donc la formule

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{m=1}^{k} G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de l'aire limitée par C et par les arcs $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

Les valeurs de A_n sont données par la formule

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta^{n+1}(z)} = \frac{a-b}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)(z-b)^{n-1}dz}{(z-a)^{n+1}},$$

laquelle fait voir que ces valeurs ne changent pas quand on remplace la circonférence C par les autres circonférences représentées par l'équation $\left|\frac{x-a}{x-b}\right| = \text{const.}$, qui la contiennent à l'intérieur; et, comme ces circonférences tendent vers la droite K, on peut énoncer le théorème suivant:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée intérieurement par des arcs de cercle et extérieurement par une droite peut être développée en série de la forme suivante:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^n + \sum_{m=1}^{k} G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right),$$

qui a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de cette aire.

Il est facile de voir que cette formule a encore lieu lorsque les circonférences intérieures se réduisent à leurs centres.

8. Une autre question qui mène à des séries de la forme considérée est celle du développement des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites.

Soient $K_1, K_2, K_3, \ldots$ des droites qui limitent une aire A donnée, mais ne la coupent pas, x un point de son intérieur et $f(x)$ la fonction considérée. Par le point b de l'intérieur de A tirons des droites perpendiculaires à K_1, $K_2, K_3, \ldots$ et soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des points de ces perpendiculaires tels que leurs distances à $K_1, K_2, \ldots$ soient respectivement égales aux distances de b aux mêmes droites.

On a, en vertu du théorème de *Cauchy*,

$$f(x)-f(b) = \sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2i\pi}\int_{K_m}\frac{f(z)\,\Theta'(z)dz}{\Theta(z)-\Theta(x)},$$

où $\Theta(z) = \frac{z-a}{z-b}$.

Mais, comme on a

$$\frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)} = \frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-b},$$

on voit que la fonction $\frac{f(z)\Theta'(z)}{\Theta(z)-\Theta(x)}$ est indépendante de a, et qu'on peut par conséquent écrire, en rendant explicite la constante a qui entre dans la fonction $\Theta(x)$,

$$f(x)-f(b) = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{2i\pi} \int_{K_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m)-\Theta(x, a_m)}.$$

En remarquant maintenant qu'on a

$$\left|\frac{x-b}{x-a_m}\right| < \left|\frac{z-b}{z-a_m}\right|$$

pour tous les points x de l'intérieur de l'aire A et pour tous les points z de la droite K_m, on conclut que l'intégrale

$$\int_{K_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m)-\Theta(x, a_m)}$$

peut être développée en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $\frac{x-b}{x-a_m}$. On peut donc énoncer le théorème suivant:

Toute fonction $f(x)$ holomorphe dans une aire limitée par des droites, qui ne la coupent pas, est développable en série de la forme

$$f(x)-f(b) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n,$$

quand x est l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire.

9. On peut démontrer, au moyen de considérations analogues à celles qu'on vient d'employer pour démontrer les théorèmes antérieurs, le théorème suivant:

Toute fonction holomorphe dans l'aire limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence est développable en série de la forme

$$f(x)-f(b) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m}\right) + \Sigma P_m(x-c'_m) + \Sigma G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$$

($c'_1, c'_2, \ldots$ représentant les centres des arcs extérieurs, $c_1, c_2, \ldots$ ceux des arcs intérieurs et x un point de l'intérieur de l'aire), *si ni les droites ni les circonférences considérées ne coupent l'aire.*

Ce théorème contient un théorème démontré par M. *Appell* dans les Acta mathematica (t. I, p. 111).

10. Nous avons supposé jusqu'ici que b était l'affixe d'un point de l'aire A. On peut trouver, au moyen de la même méthode, une formule applicable lorsque b est l'affixe d'un point de l'extérieur de l'aire considérée. Si l'on représente par a'_m les valeurs de a_m qui sont les affixes de points

du plan placés du même côté que l'aire A, par rapport aux droites K_m, et par a''_m les autres valeurs de a_m, on a alors

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a''_m}\right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(m)} \left(\frac{x-a'_m}{x-b}\right)^n$$
$$+ \Sigma P_m(x-c'_m) + \Sigma G_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right).$$

11. Une conséquence qu'on tire des théorèmes qu'on vient d'énoncer, laquelle nous ferons ici remarquer, c'est que les fonctions elliptiques peuvent être développées, d'une infinité de manières différentes, en des séries simples, dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, lesquelles sont convergentes dans un parallélogramme des périodes.

Ainsi, par exemple, dans le cas de la fonction $p(x)$, nous avons, en considérant le parallélogramme des périodes dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées, en posant $b = 0$ et en représentant par c une circonférence infiniment petite avec le centre dans l'origine,

$$p(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{m=1}^{4} \int_{K_m} \frac{p(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)} - \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{p(z)dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{p(z)dz}{z},$$

où $\Theta(z, a_m) = \frac{z-a_m}{z}$; mais $a_1 = -a_3$, $a_2 = -a_4$, et

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + b_0 z^2 + \cdots;$$

donc

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^{(1)}\left(\frac{x}{x-a_1}\right)^n + A_n^{(2)}\left(\frac{x}{x-a_2}\right)^n + A_n^{(3)}\left(\frac{x}{x+a_1}\right)^n + A_n^{(4)}\left(\frac{x}{x+a_2}\right)^n\right],$$

où

$$A_n^{(1)} = -\frac{a_1}{2i\pi}\int_{K_1} \frac{p(z)(z-a_1)^{n-1}dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(2)} = -\frac{a_2}{2i\pi}\int_{K_2} \frac{p(z)(z-a_2)^{n-1}dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(3)} = \frac{a_1}{2i\pi}\int_{K_3} \frac{p(z)(z+a_1)^{n-1}dz}{z^{n+1}},$$

$$A_n^{(4)} = \frac{a_2}{2i\pi}\int_{K_4} \frac{p(z)(z+a_2)^{n-1}dz}{z^{n+1}}.$$

Mais, en posant $z = -z'$, il vient

$$\int_{K_1} \frac{p(z)(z-a_1)^{n-1}}{z^{n+1}} dz = -\int_{K_3} \frac{p(z')(z'+a_1)^{n-1}}{z'^{n+1}} dz',$$

$$\int_{K_2} \frac{p(z)(z-a_2)^{n-1}}{z^{n+1}} dz = -\int_{K_4} \frac{p(z')(z'+a_2)}{z'^{n+1}} dz',$$

et par conséquent $A_n^{(1)} = A_n^{(3)}$, $A_n^{(2)} = A_n^{(4)}$.

Donc

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[\frac{A_n^{(1)}}{(x-a_1)^n} + \frac{A_n^{(1)}}{(x+a_1)^n} + \frac{A_n^{(2)}}{(x-a_2)^n} + \frac{A_n^{(2)}}{(x+a_2)^n}\right].$$

On peut encore écrire cette formule de la manière suivante:

$$p(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} [A_n^{(1)} \log(x^2 - a_1^2) + A_n^{(2)} \log(x^2 - a_2^2)].$$

12. La fonction $f(x)$, considérée dans le n°. 9, peut encore être représentée, dans l'aire A, par un autre développement que nous allons trouver.

Remarquons, en premier lieu, qu'on voit, au moyen des égalités (1.) et (2.) du n°. 4, que si l'on donne un point d'affixe $b = \alpha' + i\beta'$ et une circonférence dont le centre soit le point d'affixe $c_m = x' + iy'$ et dont le rayon soit R_m, on peut trouver un nombre $a_m = \alpha + i\beta$ tel que cette circonférence appartienne à l'ensemble de circonférences représentées par l'équation

$$\left|\frac{x - a_m}{x - b}\right| = \text{const.};$$

cette valeur de a_m est donnée par l'équation

$$a_m = \frac{R_m^2(\alpha' + i\beta')}{(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2} + \frac{[(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2 - R_m^2](x' + iy')}{(x' - \alpha')^2 + (y' - \beta')^2}.$$

Cela posé, prenons, comme antérieurement, un point b à l'intérieur de l'aire considérée et faisons correspondre à chaque droite du contour et à chaque circonférence un point, qu'on détermine par le moyen indiqué dans le n°. 8, dans le cas des droites, et par le moyen qu'on vient d'indiquer, dans le cas des circonférences; soient $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ les affixes de ces points. On a, en représentant par $s_1, s_2, \ldots, s_k$ les arcs de circonférence ou les segments de droite, qui forment le contour de l'aire, et par ε_m une quantité égale à $+1$, lorsque s_m fait partie du contour extérieur, et égale à -1, lorsqu'il fait partie du contour intérieur,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^{k} \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z)dz}{\Theta(z) - \Theta(x)},$$

ou, comme dans le n°. 8,

$$f(x) - f(b) = \sum_{m=1}^{k} \varepsilon_m \int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)},$$

où $\Theta(z, a_m) = \frac{z - a_m}{z - b}$. Mais on a, le long de s_m,

$$\left|\frac{x - b}{x - a_m}\right| < \left|\frac{z - b}{z - a_m}\right|.$$

Donc l'intégrale

$$\int_{s_m} \frac{f(z)\Theta'(z, a_m)dz}{\Theta(z, a_m) - \Theta(x, a_m)}$$

peut être développée suivant les puissances entières et positives de $\dfrac{x-b}{x-a_m}$; et nous avons par conséquent le développement

$$f(x) = f(b) + \sum_{m=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n,$$

convergent à l'intérieur de l'aire considérée.

Si b représente un point de l'extérieur de l'aire A, cette formule doit être remplacée par la suivante:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{k'} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(m)} \left(\frac{x-b}{x-a''_m}\right)^n + \sum_{m=1}^{k''} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a'_m}{x-b}\right)^n,$$

où a'_m représente les valeurs que prend a_m lorsque a_m et x sont tous deux à l'intérieur ou tous deux à l'extérieur de la circonférence à laquelle appartient l'arc s_m, et a''_m représente les autres valeurs de a_m.

13. Nous terminerons ce que nous avons à dire à l'égard des séries ordonnées suivant les puissances de $\dfrac{x-a}{x-b}$ en faisant voir qu'on peut former, au moyen de ces séries, des fonctions holomorphes dans une aire limitée par des droites ou par des droites et des arcs de circonférence, lesquelles ne peuvent pas être continuées à l'extérieur de cette aire.

Soit

$$(7.) \qquad A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + A_3 X^3 + \cdots$$

une série convergente à l'intérieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, laquelle représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle (on connaît un grand nombre de séries qui sont dans ce cas); et soit K une droite qui passe par le milieu du segment de droite déterminé par deux points dont les affixes sont a et b et y soit perpendiculaire à ce segment. La série qu'on obtient en posant $X = \dfrac{x-a}{x-b}$, c'est-à-dire, la série

$$(8.) \qquad A_0 + A_1\left(\frac{x-a}{x-b}\right) + A_2\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2 + \cdots,$$

est convergente dans celle des régions du plan de représentation des x, dans lesquelles le divise la droite K, qui contient le point d'affixe a. Elle représente donc, dans cette aire, une fonction holomorphe, et nous allons démontrer que cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire considérée.

Soit, en effet, u l'affixe d'un point de cette aire, voisin de K. Il existe une quantité positive ϱ et une série

$$(9.)\qquad b_0+b_1(x-u)+b_2(x-u)^2+b_3(x-u)^3+\cdots,$$

convergente dans le cercle de rayon ϱ et de centre u, telle que la fonction définie par cette série et la fonction définie par la série (8.) coïncident dans la partie commune des aires de convergence des deux séries.

Mais, en posant

$$X=\frac{x-a}{x-b},\quad A=\frac{u-a}{u-b},$$

la série antérieure se réduit à la suivante

$$(10.)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big(\frac{a-b}{A-1}\Big)^n\Big(\frac{X-A}{X-1}\Big)^n,$$

laquelle est donc convergente, lorsque

$$\left|\frac{X-A}{X-1}\right|<\varrho\left|\frac{A-1}{a-b}\right|=\frac{\varrho}{|u-b|},$$

c'est-à-dire, dans un cercle, qui existe dans le plan de représentation des X, lequel contient à l'intérieur le point A. Or, ce cercle doit être tout à l'intérieur du cercle de convergence de la série (7.), parce que la fonction définie par la série (10.) doit coïncider, dans le voisinage du point A, avec la fonction définie par (7.) et cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de ce cercle. Le cercle de convergence de la série (9.) doit donc être aussi tout à l'intérieur de l'aire de convergence de (8.). Comme cette circonstance se donne quelque petite que soit la distance du point d'affixe u à la droite K, on conclut que *la fonction définie par la série* (8.) *ne peut pas être continuée au delà de la droite K.*

Cela posé, soient: 1°. $K_1, K_2, K_3, \ldots$ des droites qui limitent une aire A, mais ne la coupent pas; 2°. a l'affixe d'un point de l'intérieur de cette aire; 3°. $b_1, b_2, b_3, \ldots$ les affixes des points placés respectivement sur les perpendiculaires à $K_1, K_2, K_3, \ldots,$ tirées par le point d'affixe a, dont les distances à ces droites-ci sont respectivement égales aux distances du point correspondant à a aux mêmes droites.

Les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\Big(\frac{x-a}{x-b_1}\Big)^n,\quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n\Big(\frac{x-a}{x-b_2}\Big)^n,\ldots$$

sont respectivement convergentes, dans la moitié du plan déterminée par K_1 et a, par K_2 et a, etc., et les fonctions qu'elles représentent ne peuvent par être continuées au delà de ces droites.

Considérons maintenant la somme des séries précédentes

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n + \cdots.$$

Cette somme représente une fonction holomorphe dans l'aire A, et nous allons démontrer que cette fonction ne peut pas être continuée à l'extérieur de cette aire.

En effet, si cette fonction peut être continuée au delà de la droite K_1, par exemple, il existe un point d'affixe u et une série de la forme

$$b'_0 + b'_1(x-u) + b'_2(x-u)^2 + \cdots,$$

convergente dans un cercle de rayon ϱ et de centre d'affixe u, lequel coupe la droite, tels que les valeurs de la série coïncident avec les valeurs de S dans la partie commune des régions de convergence des deux développements. En approchant le point d'affixe u de la droite K_1, on peut tirer un autre cercle C_1 de rayon égal à ϱ_1 et de centre d'affixe u_1, qui coupe encore K_1, qui soit à l'intérieur du premier et qui ne coupe pas les droites $K_2, K_3, \ldots$; et il existe encore une série de la forme

$$b''_0 + b''_1(x-u_1) + b''_2(x-u_1)^2 + \cdots,$$

convergente dans ce cercle, dont les valeurs coïncident avec les valeurs de S dans la partie commune des régions de convergence des deux développements.

Comme le cercle C_1 est à l'intérieur des aires dans lesquelles les séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n, \ \ldots$$

sont convergentes, on a aussi, dans ce cercle

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n = c_0 + c_1(x-u_1) + c_2(x-u_1)^2 + \cdots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n = c'_0 + c'_1(x-u_1) + c'_2(x-u_1)^2 + \cdots,$$

. . . .

On a donc aussi, dans le cercle considéré,

$$b''_0 + b''_1(x-u_1) + \cdots - \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_3}\right)^n + \cdots\right]$$
$$= d_0 + d_1(x-u_1) + d_2(x-u_2)^2 + \cdots.$$

Or le premier membre de cette égalité coïncide avec $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{x-a}{x-b_1}\right)^n$ dans la partie du cercle C_1 qui est à l'intérieur de l'aire A. Donc la fonction définie par cette série peut être continuée au delà de K_1, ce qui est absurde. On conclut donc que la fonction définie par la série S ne peut pas être continuée à l'extérieur de l'aire A.

14. On peut aussi former par ce moyen des fonctions holomorphes dans une aire donnée A, limitée extérieurement par des droites et par des arcs de circonférence et intérieurement par des arcs de circonférence, qui ne peuvent pas être continuées à l'extérieur de A.

Soient $C_1, C_2, C_3, \ldots$ les circonférences auxquelles appartiennent les arcs qui forment le contour de A et $K_1, K_2, K_3, \ldots$ les droites données, et supposons que ces droites et ces circonférences ne coupent pas l'aire A.

A chaque circonférence et à chaque droite il correspond deux nombres a_m et c_m (c_m étant égal à l'unité dans le cas des droites) tels qu'elle peut être représentée par l'équation

$$\left|\frac{x-b}{x-a_m}\right| = c_m. \tag{11.}$$

Cela posé, on voit comme antérieurement que, si la série (7.) représente une fonction qui ne peut pas être continuée à l'exterieur d'un cercle de rayon égal à l'unité, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c_m^n} \left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n$$

représente une fonction holomorphe dans une aire, qui contient l'aire A, laquelle ne peut pas être continuée au delà de la droite ou de la circonférence représentée par l'équation (11.). La somme

$$\sum_{m=1}^{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{c_m^n} \left(\frac{x-b}{x-a_m}\right)^n$$

représente donc la fonction qu'on voulait former.

L'aire A peut, en particulier, être limitée seulement à l'exterieur ou seulement à l'intérieur. Dans les cas où elle est limitée intérieurement, les fontions qu'on obtient au moyen de la méthode précédente ont des *lacunes* limitées par des arcs de circonférence.

III.

Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances de $\sin x$.

15. Considérons maintenant les développements ordonnés suivant les puissances de $\sin x$. Nous avons déjà vu, dans un mémoire publié dans ce journal (tome 116, p. 14), que l'équation $|\sin x| = c$ représente des courbes fermées, lorsque $c \overline{\overline{<}} 1$, et nous y avons trouvé le développement des fonctions holomorphes dans l'aire limitée par une de ces courbes. Si la fonction $f(x)$ est holomorphe seulement dans la couronne limitée par deux des courbes considérées, on peut trouver son développement suivant les puissances positives et négatives de $\sin x$ au moyen des formules données dans le n°. 1. Alors, si la fonction n'a, à l'intérieur du contour s, qu'un nombre limité de points singuliers, les coefficients du développement sont donnés par les formules

$$A_n = A'_n + A''_n,$$

$$A'_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^n z},$$

$$A''_n = \frac{1}{2i\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} \frac{f(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\sum_{m=1}^{k}\int_{c_m} \frac{f'(z)\,dz}{\sin^n z},$$

$$B_n = -\frac{1}{2ni\pi}\int_s f'(z)\sin^n z\,dz.$$

A l'égard de A''_n et de B_n nous n'avons rien à ajouter à ce qui résulte immédiatement de la théorie générale. Mais la méthode qui résulte de cette théorie pour le calcul de A'_n peut être remplacé, comme dans le cas considéré dans le mémoire rapporté, par une autre plus simple, qui résulte des égalités

$$\frac{1}{2(2\eta+1)i\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+1} z} = \frac{f^{(2\eta+1)}(0) + s^{(1)}_{2\eta+1} f^{(2\eta-1)}(0) + \cdots + s^{(\eta)}_{2\eta+1} f'(0)}{(2\eta+1)!},$$

$$\frac{1}{2\cdot 2\eta i\pi}\int_c \frac{f'(z)\,dz}{\sin^{2\eta} z} = \frac{f^{(2\eta)}(0) + S^{(1)}_{2\eta} f^{(2\eta-2)}(0) + \cdots + S^{(\eta-1)}_{2\eta} f''(0)}{(2\eta)!},$$

lesquelles sont une conséquence de l'analyse y donnée et ont lieu, lorsque la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point d'affixe 0. Nous rappelons qu'on représente par $s^{(m)}_{2\eta+1}$ la somme des combinaisons des nombres

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2, \ldots, (2\eta-1)^2$$

pris m à m, et par $S^{(m)}_{2\eta}$ la somme des combinaisons des nombres

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2, \ldots, (2\eta-2)^2$$

pris aussi m à m.

Si le point d'affixe 0 est un pôle de $f(x)$, dont le dégré de multiplicité est égal à β, on a, en posant $F(x) = f(x)\sin^\beta x$,

$$A'_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{f(z)\cos z \sin^\beta z}{\sin^{n+\beta+1} z}\,dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{n+\beta+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\int\limits_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{n+\beta} z};$$

et, comme la fonction $F(x)$ est holomorphe dans le voisinage du point d'affixe 0, les égalités qu'on vient d'écrire sont applicables à l'intégrale qui entre dans cette formule.

16. Pour faire une première application des formules précédentes considérons la fonction $\frac{1}{x}\cdot$ On a alors

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{\cos z\,dz}{z\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{\sin z\cos z\,dz}{z\sin^{n+2} z}\cdot$$

Mais, en posont $\frac{\sin z}{z} = F(z)$, il vient

$$F^{(2\eta)}(0) = (-1)^\eta\cdot\frac{1}{2\eta+1}, \quad F^{(2\eta+1)}(0) = 0.$$

Donc

$$A_{2\eta+1} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{2\eta+3} z} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+2)}\int\limits_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+2} z}$$

$$= \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{1}{2\eta+3} - \frac{S^{(1)}_{2(\eta+1)}}{2\eta+1} + \dots \pm \frac{S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}}{3}\right];$$

$$A_{2\eta} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{F(z)\cos z\,dz}{\sin^{2\eta+2} z} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+1)}\int\limits_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{2\eta+1} z} = 0.$$

On a aussi

$$B_1 = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_c \frac{\sin z}{z^2}\,dz = 1, \quad B_n = 0 \qquad (n > 1).$$

Donc nous avons la formule

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{1}{2\eta+3} - \frac{S^{(1)}_{2(\eta+1)}}{2\eta+1} + \dots \pm \frac{S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}}{3}\right]\sin^{2\eta+1} x.$$

Cette formule a lieu pour toutes les valeurs de x qui sont réprésentées par les points de l'aire limitée par celle des ovales $|\sin x| = 1$ dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées.

17. Comme seconde application considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\cos x}{x}\cdot$$

On a

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{\cos^2 z\,dz}{z\sin^{n+1}z} = \frac{1}{4i\pi}\int_c \frac{\sin 2z\cos z\,dz}{z\sin^{n+2}z},$$

ou, en posant $F(z) = \frac{\sin 2z}{2z}$,

$$A_n = \frac{1}{2i\pi(n+1)}\int_c \frac{F'(z)\,dz}{\sin^{n+1}z}.$$

Mais, on a

$$F^{(2\eta)}(0) = (-1)^\eta \frac{2^{2\eta}}{2\eta+1}, \quad F^{(2\eta+1)}(0) = 0.$$

Donc

$$A_{2\eta+1} = \frac{1}{2i\pi(2\eta+2)}\int_c \frac{F'(z)dz}{\sin^{2\eta+2}z}$$

$$= \frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{2^{2(\eta+1)}}{2\eta+3} - S^{(1)}_{2(\eta+1)}\frac{2^{2\eta}}{2\eta+1} + \cdots \pm S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}\frac{2^2}{3}\right].$$

$$A_{2\eta} = 0.$$

On a aussi $B_1 = 1$, $B_n = 0$ $(n > 1)$; et par conséquent nous avons la formule

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{\sin x} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\eta+1}}{(2\eta+2)!}\left[\frac{2^{2(\eta+1)}}{2\eta+3} - S^{(1)}_{2(\eta+1)}\frac{2^{2\eta}}{2\eta+1} + \cdots \pm S^{(\eta)}_{2(\eta+1)}\frac{2^2}{3}\right]\sin^{2\eta+1}x.$$

IV.

Sur la série de *Fourier*.

18. L'intégrale considérée dans le n°. 1 contient comme cas particulier l'intégrale $\int \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}$, au moyen de laquelle on peut obtenir la série de *Fourier*.

Supposons que la fonction $f(x)$ admette la période 2ω, représentée géometriquement par la droite DA, qui fait un angle égal à l'argument de 2ω avec l'axe des abscisses et supposons que cette fonction soit holomorphe dans la bande comprise entre les deux droites parallèles DA et CB. On trouve au moyen du théorème de *Cauchy*, en représentant par S le parallélogramme $ABCD$ et par x l'affixe d'un point de l'intérieur de ce parallélogramme,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}},$$

ou, en remarquant que les parties de cette intégrale relatives aux droites AB et CD sont égales,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_{BC} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_{DA} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right].$$

Cela posé, nous allons démontrer que, le long de la droite DA, est $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| > \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|$ et que, le long de la droite CB, est $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|$. Considérons pour cela les lignes représentées par l'équation

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| = c,$$

c étant une constante positive quelconque, laquelle, en posant

$$z = x_1 + iy_1, \quad \omega = \varrho(\cos\Theta + i\sin\Theta),$$

peut être réduite à la forme suivante

$$e^{-\frac{\pi}{\varrho}(y_1\cos\Theta - x_1\sin\Theta)} = c,$$

ou

$$y_1 = x_1 \operatorname{tang}\Theta - \frac{\varrho \log c}{\pi\cos\Theta}.$$

On voit au moyen de cette équation que les points du plan de représentation de la variable z dans lesquels $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ prend une même valeur sont placés sur une même droite parallèle à DA. Pour trouver cette valeur, quand la droite est donnée, on doit chercher la valeur que prend $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ dans le point où la droite coupe l'axe des ordonnées. En posant pour cela $x_1 = 0$ et en représentant par y'_1 l'ordonnée de ce point, on voit que la valeur que $\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right|$ prend dans la droite parallèle à DA qui coupe l'axe des ordonnées dans le point y'_1 est égale à $e^{-\frac{\pi y'_1\cos\Theta}{\varrho}}$; et par conséquent que (l'angle Θ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$) cette quantité décroît, lorsque la droite considérée se déplace dans le sens des ordonnées positives. Nous avons donc, pour tous les points z de la droite DA et pour tous les points x de l'intérieur l'aire $ABCD$,

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| > \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

et, pour tous les points de la droite CB et pour les mêmes valeurs de x,

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|.$$

On a donc, le long de DA,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = \frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi z}{\omega}}} + \cdots$$

et, le long de CB,

$$\frac{1}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} = -\left[\frac{1}{e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}}{e^{\frac{3i\pi x}{\omega}}} + \cdots\right];$$

et par conséquent

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{\frac{ni\pi x}{\omega}},$$

où

$$A_n = -\frac{1}{2\omega}\int_{DA} e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)dz,$$

$$A_{-n} = \frac{1}{2\omega}\int_{BC} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)dz = \frac{1}{2\omega}\int_{DA} e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} f(z)dz.$$

On a donc, en représentant par l le segment DA (ou un segment égal pris sur une droite parallèle à DA compris entre DA et BC) la formule de *Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_l f(z)dz + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_l f(z)\cos\frac{n(x-z)\pi}{\omega}dz\right].$$

19. La formule de *Fourier* est encore susceptible, dans le cas des variables complexes, d'une extension que nous allons indiquer. Supposons, en effet, maintenant: 1°. que la fonction $f(z)$ ne soit pas périodique, mais qu'elle soit holomorphe dans le voisinage du segment de droite AB, c'est-à-dire dans l'aire limitée par un parallélogramme PP_1Q_1Q dont deux côtes PP_1 et QQ_1 sont parallèles et égaux à AB; 2°. que ce segment soit représenté par le nombre complexe 2ω et que a soit l'affixe du point A. On a, comme antérieurement, en représentant par S le contour du parallélogramme,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\int_S \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}} - e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}.$$

Soient maintenant u l'affixe d'un point de AP, v l'affixe d'un point de AQ et x l'affixe d'un point de AB. On peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\int_a^u \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_u^{u+2\omega} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} + \int_{u+2\omega}^{a+2\omega} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right.$$

$$\left. - \int_a^v \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \int_v^{v+2\omega} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \int_{v+2\omega}^{a+2\omega} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right],$$

et par conséquent

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\lim_{u=a}\int_u^{u+2\omega} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}} - \lim_{v=a}\int_v^{v+2\omega} \frac{f(z)e^{\frac{i\pi z}{\omega}}dz}{e^{\frac{i\pi z}{\omega}}-e^{\frac{i\pi x}{\omega}}}\right],$$

ou, en supposant, comme antérieurement, que l'argument de 2ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et en ayant égard à l'inégalité

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| > \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes u et $u+2\omega$, et à l'inégalité

$$\left|e^{\frac{i\pi z}{\omega}}\right| < \left|e^{\frac{i\pi x}{\omega}}\right|,$$

qui a lieu le long de la droite qui passe par les points d'affixes v et $v+2\omega$,

$$f(x) = \frac{1}{2\omega}\left[\lim_{u=a}\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega} f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz + \lim_{v=a}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_v^{v+2\omega} f(z)e^{\frac{ni\pi z}{\omega}}dz\right].$$

Considérons maintenant la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega} f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz,$$

et remarquons que, comme on a

$$\int f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz = \frac{\omega i}{n\pi}f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} + \frac{\omega^2}{n^2\pi^2}f'(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} - \frac{\omega^2}{n^2\pi^2}\int f''(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz,$$

on peut l'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\omega i}{\pi}[f(u+2\omega)-f(u)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}} + \frac{\omega^2}{\pi^2}[f'(u+2\omega)-f'(u)]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-\frac{ni\pi(u-x)}{\omega}}$$

$$-\frac{\omega^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{\frac{ni\pi x}{\omega}}\int_u^{u+2\omega} f(z)e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}}dz.$$

Or la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n i \pi (a-x)}{\omega}},$$

ou, puisque les arguments de $x-a$ et de ω sont égaux,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{n i \pi |a-x|}{|\omega|}},$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\cos\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|} + i\sin\frac{n\pi|x-a|}{|\omega|}\right]$$

est convergente, suivant un théorème connue (*Picard, Traité d'Analyse*, t. I, p. 231); et on voit par conséquent, au moyen d'un théorème donné par *Abel* pour le cas des séries de termes réels et dont M. *Picard* a fait l'extension au cas des séries de termes complexes (l. c., t. II, p. 73), qu'est

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{n i \pi (x-u)}{\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{n i \pi (x-a)}{\omega}}.$$

On trouve de la même manière

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{n i \pi (x-u)}{\omega}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{n i \pi (x-a)}{\omega}}.$$

Comme on a

$$\left| \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{n i \pi (z-x)}{\omega}} dz \right| < M|2\omega|,$$

où M représente la plus grande valeur que prend $\left| f''(z) e^{-\frac{n i \pi (z-x)}{\omega}} \right|$ dans le parallélogramme PP_1Q_1Q, on voit que les valeurs des termes de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{n i \pi (z-x)}{\omega}} dz \right|$$

sont inférieures aux valeurs des termes correspondants de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M|2\omega|}{n^2}$, quelle que soit la valeur de u, et par conséquent que la série considérée est uniformement convergente dans le voisinage du point A; nous avons par conséquent

$$\lim_{u=a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_u^{u+2\omega} f''(z) e^{-\frac{n i \pi (z-x)}{\omega}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_a^{a+2\omega} f''(z) e^{-\frac{n i \pi (z-x)}{\omega}} dz.$$

De tout ce qui précède on tire l'égalité

$$\lim_{u=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{n i \pi x}{\omega}} \int_u^{u+2\omega} f(z) e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{n i \pi x}{\omega}} \int_a^{a+2\omega} f(z) e^{-\frac{n i \pi z}{\omega}} dz;$$

et de la même manière on trouve la suivante

$$\lim_{v=a} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{v}^{v+2\omega} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz.$$

Il vient donc la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) e^{-\frac{ni\pi z}{\omega}} dz + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{ni\pi x}{\omega}} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) e^{\frac{ni\pi z}{\omega}} dz \right],$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\omega} \left[\int_{a}^{a+2\omega} f(z) dz + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{a+2\omega} f(z) \cos \frac{n\pi(x-z)}{\omega} dz \right],$$

laquelle a lieu pour toutes les valeurs de x représentées par les points de AB.
