Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.

(Fortsetzung.)

(Von Herrn *Georg Wallenberg* in Charlottenburg.)

In meiner Arbeit „Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung“ (dieses Journal Bd. 116, S. 1—9) habe ich (S. 9), den ursprünglichen Ausgangspunkt umkehrend, folgenden Satz bewiesen: „Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ein algebraisches Particularintegral erster Ordnung besitzt, welches ausser dem von y' und y freien Gliede mindestens Glieder zweier verschiedener Dimensionen enthält, so sind ihre sämmtlichen Integrale algebraisch“. Während der eine Ausnahmefall, dass nämlich in dem Particularintegral das von y' und y freie Glied fehlt, dort (S. 8) bereits erledigt worden ist, indem die Bedingung angegeben wurde, unter der auch in diesem Falle die Integrale algebraisch sind, hatte ich mir die Erledigung des zweiten Ausnahmefalles, in welchem das Particularintegral ausser dem von y' und y freien Gliede nur Glieder *einer* Dimension enthält, daselbst vorbehalten. Dieser Ausnahmefall soll in der vorliegenden Arbeit erledigt werden*); die dabei gewonnenen Resultate ergänzen zugleich die in meiner Dissertation enthaltenen Untersuchungen sowie die diesbezüglichen Entwickelungen von *Königsberger* (Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen, Leipzig 1882, Kap. I—III) und *Krause* (Diss., Göttingen 1897). Die Methode, deren ich mich bediene, gestattet einen klaren Einblick in den Zusammenhang zwischen der Structur der Differentialgleichung und der Natur ihrer Integrale, insbesondere ihrer algebraischen Integrirbarkeit,

*) Es stellt sich dabei als opportun heraus, den Rationalitätsbereich der Coefficienten auf algebraische Functionen der unabhängigen Variablen zu erweitern.

und ermöglicht gleichzeitig, sämmtliche Typen der in Frage stehenden Differentialgleichungen nebst ihren Integralen aufzustellen.

Die lineare homogene Differentialgleichung

$$(1.)\qquad y''+\lambda y'+\mu y = 0,$$

deren Coefficienten algebraische Functionen der unabhängigen Variablen z sind, möge ein Particularintegral erster Ordnung von der Form

$$(2.)\qquad (y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho_2 y)^{p_2}\dots(y'-\varrho_n y)^{p_n} = \alpha$$

besitzen, worin $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, \alpha$ algebraische Functionen von z und $p_1, p_2, \dots, p_n$ ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler bedeuten. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1.) hat die Form

$$y = \bar{c}_1\eta_1+\bar{c}_2\eta_2,$$

wenn $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ die willkürlichen Constanten und η_1, η_2 zwei Fundamentalintegrale von (1.) sind. Da auch das allgemeine Integral von (2.) in dieser Form enthalten sein und aus ihr dadurch hervorgehen muss, dass man zwischen $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ eine gewisse Beziehung mit constanten Coefficienten statuirt, so muss umgekehrt, wenn man

$$y = \bar{c}_1\eta_1+\bar{c}_2\eta_2$$

und

$$y' = \bar{c}_1\eta_1'+\bar{c}_2\eta_2'$$

in (2.) einsetzt, eben jene Relation mit constanten Coefficienten zwischen $\bar{c}_1$ und $\bar{c}_2$ sich ergeben. Nun ist

$$y'-\varrho_i y = \bar{c}_1(\eta_1'-\varrho_i\eta_1)+\bar{c}_2(\eta_2'-\varrho_i\eta_2);$$

es muss also

$$\eta_2'-\varrho_i\eta_2 = K_i(\eta_1'-\varrho_i\eta_1)$$

sein, wo K_i eine Constante bedeutet. Daraus ergiebt sich

$$\varrho_i = \frac{K_i\eta_1'-\eta_2'}{K_i\eta_1-\eta_2},$$

also

$$K_i\eta_1-\eta_2 = c_i e^{\int\varrho_i dz},$$

d. h. es muss $e^{\int\varrho_i dz}$ ein Particularintegral von (1.) sein. Insbesondere müssen

$$K_1\eta_1-\eta_2 = c_1 e^{\int\varrho_1 dz}$$

und

$$K_2\eta_1-\eta_2 = c_2 e^{\int \varrho_2 dz}$$

zwei Fundamentalintegrale von (1.) sein, da ϱ_2 von ϱ_1, also auch K_2 von K_1 verschieden ist; das allgemeine Integral von (1.) lautet also

$$y = -c_1 e^{\int \varrho_1 dz} + c_2 e^{\int \varrho_2 dz},$$

wenn man jetzt c_1 und c_2 willkürlich lässt. Daher wird

$$y'-\varrho_i y = -c_1 e^{\int \varrho_1 dz}(\varrho_1-\varrho_i)+c_2 e^{\int \varrho_2 dz}(\varrho_2-\varrho_i),$$

und es muss

$$(\varrho_2-\varrho_i)e^{\int \varrho_2 dz} = -k_i(\varrho_1-\varrho_i)e^{\int \varrho_1 dz} \quad (k_i \text{Constante})$$

sein, daraus folgt:

$$\varrho_i = \frac{k_i\varrho_1 e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+\varrho_2}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1},$$

also

$$\varrho_i-\varrho_1 = \frac{\varrho_2-\varrho_1}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1} \quad \left(\begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ k_1=\infty,\ k_2=0\end{matrix}\right),$$

und

$$y'-\varrho_1 y = c_2(\varrho_2-\varrho_1)e^{\int \varrho_2 dz},$$

$$y'-\varrho_2 y = c_1(\varrho_2-\varrho_1)e^{\int \varrho_1 dz},$$

$$y'-\varrho_i y = (k_i c_2+c_1)(\varrho_i-\varrho_1)e^{\int \varrho_1 dz} = \frac{(k_i c_2+c_1)(\varrho_2-\varrho_1)e^{\int \varrho_1 dz}}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1} \quad (i=3,4,\dots,n).$$

Die Einsetzung dieser Werthe in (2.) ergiebt

$$\alpha = \frac{c_1^{p_2}c_2^{p_1}\prod_{i=3}^{i=n}(c_1+k_i c_2)^{p_i}\cdot(\varrho_2-\varrho_1)^m e^{\int(p_1\varrho_2+(m-p_1)\varrho_1)dz}}{\prod_{i=3}^{i=n}(k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1)^{p_i}},$$

worin $m=p_1+p_2+\cdots+p_n$ die Dimension der Differentialgleichung (2.) ist. Da der Coefficient α keine *willkürliche* Constante enthalten darf, so muss

$$(3.)\qquad c_1^{p_2}c_2^{p_1}\prod_{i=n}^{i=n}(c_1+k_i c_2)^{p_i} = k$$

sein, wo k eine *feste* Constante bedeutet. Die Differentialgleichung (2.)

nimmt daher die Gestalt an

$$(\text{A.})\ (y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho_2 y)^{p_2}\cdot\prod_{i=3}^{i=n}\Big(y'-\frac{k_i\varrho_1 e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+\varrho_2}{k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1}\,y\Big)^{p_i}=\frac{k(\varrho_2-\varrho_1)^m e^{m\int\varrho_1 dz}}{e^{p_1\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}\prod\limits_{i=3}^{i=n}(k_i e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}+1)^{p_i}}.$$

Es sind nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden:

1. *Es sind mehr als zwei verschiedene Linearfactoren vorhanden.* In diesem Falle müssen, wenn die Coefficienten der Differentialgleichung (A.) algebraisch sein sollen, $e^{\int(\varrho_1-\varrho_2)dz}$ und $e^{\int\varrho_1 dz}$, also auch $e^{\int\varrho_1 dz}$ und $e^{\int\varrho_2 dz}$ algebraische Functionen von z sein. *Daher ist auch das allgemeine Integral von* (1.) *selber eine algebraische Function von z.*

2. *Es sind nur zwei verschiedene Linearfactoren vorhanden**). Dann lautet die Differentialgleichung (A.)

$$(\text{B.})\qquad (y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho\ y)^{p_2}=k(\varrho_2-\varrho_1)^{p_1+p_2}e^{\int(p_2\varrho_1+p_1\varrho_2)dz},$$

und es muss $e^{\int(p_2\varrho_1+p_1\varrho_2)dz}$ eine algebraische Function von z sein: d. h. die Particularintegrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.)

$$\eta_1=e^{\int\varrho_1 dz}\ \text{und}\ \eta_2=e^{\int\varrho_2 dz}$$

brauchen selber *keine* algebraischen Functionen von z zu sein; sie genügen aber einer Relation von der Form

$$\eta_1^{p_2}\eta_2^{p_1}=\beta,$$

wo β eine algebraische Function von z ist**).

Ist insbesondere $p_1=p_2=1$, so lautet unsere Differentialgleichung

$$(\text{C.})\qquad (y'-\varrho_1 y)(y'-\varrho_2 y)=k(\varrho_1-\varrho_2)^2 e^{\int(\varrho_1+\varrho_2)dz}.$$

Schreibt man die linke Seite derselben in der Form

$$y'^2-2pyy'+qy^2,$$

so ist

$$\varrho_1+\varrho_2=2p,\quad (\varrho_1-\varrho_2)^2=4(p^2-q),$$

und die Differentialgleichung nimmt die Gestalt an

$$(\text{C}^*.)\qquad y'^2-2pyy'+qy^2=4k(p^2-q)e^{2\int p\,dz};$$

*) Der Fall eines einzigen Linearfactoren erledigt sich von selbst, da er auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung führt.

**) Cfr. *Königsberger*, l. c., p. 113—119.

damit die Coefficienten algebraische Functionen seien, muss p die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function sein.

Das allgemeine Integral lautet

$$y = ce^{\int(p+\sqrt{p^2-q})\,dz} - \frac{k}{c}e^{\int(p-\sqrt{p^2-q})\,dz};$$

dasselbe ist nur dann algebraisch, wenn auch $\sqrt{p^2-q}$ die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function ist.

Schreibt man ferner die Differentialgleichung (B.) in der Form

$$F \equiv (a_1 y' + b_1 y)^k (a_2 y' + b_2 y)^l = 1,$$

so kann man, da wegen der Irreductibilität der Differentialgleichung k von l verschieden ist (abgesehen von dem eben behandelten Falle $k = l = 1$), ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$$

voraussetzen, indem man, wenn dies nicht der Fall ist, nur a_1 und b_1 mit $\sqrt[k-l]{\varDelta^l}$, a_2 und b_2 mit $\sqrt[l-k]{\varDelta^k}$ zu multipliciren braucht. Benutzt man jetzt die Relation

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{\partial F}{\partial y'}(\lambda y' + \mu y)^{*}),$$

*) Cfr. meine Arbeit, l. c., p. 6. — Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die allgemeine *Poincaré*sche Relation (Acta Math. 7: 1, p. 3)

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = P \cdot F + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}$$

einer Modification bedarf: es sei nämlich $D(z, y)$ derjenige Theiler der Discriminante von $F(z, y, y') = 0$, welcher die mehrfachen Factoren derselben sämmtlich in der ersten Potenz enthält, so lautet die fragliche Relation

$$D(z, y)\left[\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y} y'\right] = P \cdot F + Q \cdot \frac{\partial F}{\partial y'},$$

wo nunmehr P und Q in der That, wie *Poincaré* es thut, als *ganze* rationale Functionen von y und y' angenommen werden können. So genügt z. B. die linke Seite der Differentialgleichung

$$F \equiv x^2(x+1)y'^2 - x(y-1)(xy+2)y' + (y-1)^2 = 0,$$

deren allgemeines Integral

$$y = \frac{1 + c^2 x}{1 + cx}$$

ist, der Relation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = \frac{4y'}{y-1} F + 2\left(\frac{y'}{x} - \frac{y'^2}{y-1}\right)\frac{\partial F}{\partial y'};$$

in der That ist hier $y = 1$ eine Doppelwurzel der Discriminantengleichung.

so ergeben sich durch Coefficientenvergleichung unter mehrfacher Benutzung der Gleichung $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$ für b_1 und b_2 die Werthe

$$b_1 = -\frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 + k}{(k+l) a_2},$$

$$b_2 = -\frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 - l}{(k+l) a_1}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auf dem folgenden Wege: Man setze

$$(4.) \qquad \begin{cases} a_1 y' + b_1 y = \varphi^l \\ a_2 y' + b_2 y = \varphi^{-k}, \end{cases}$$

dann kann man, da k und l relativ prim sind, zwei Zahlen m und n so bestimmen, dass $ml - nk = 1$ ist; daher muss $\varphi = (a_1 y' + b_1 y)^m (a_2 y' + b_2 y)^n$ infolge der über die Differentialgleichung (B.) gemachten Vorraussetzungen feste Verzweigungspunkte besitzen. Aus den Gleichungen (4.) folgt nun

$$y = a_1 \varphi^{-k} - a_2 \varphi^l,$$

$$y' = -b_1 \varphi^{-k} + b_2 \varphi^l,$$

und daraus durch Differentiation der ersten Gleichung und Vergleichung mit der zweiten

$$(5.) \qquad \varphi' = \frac{(a_1' + b_1)\varphi - (a_2' + b_2)\varphi^{k+l+1}}{k a_1 + l a_2 \varphi^{k+l}}.$$

Da die Function φ feste Verzweigungspunkte besitzt, so muss

$$a_1' + b_1 = \varrho k a_1,$$

$$a_2' + b_2 = -\varrho l a_2,$$

also

$$b_1 = \varrho k a_1 - a_1',$$

$$b_2 = -\varrho l a_2 - a_2'$$

sein. Die Beziehung

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & \varrho k a_1 - a_1' \\ a_2, & -\varrho l a_2 - a_2' \end{vmatrix} = 1$$

ergiebt für ϱ den Werth

$$\varrho = \frac{a_1' a_2 - a_1 a_2' - 1}{(k+l) a_1 a_2};$$

die dadurch gewonnenen Werthe für b_1 und b_2 stimmen mit den oben gefundenen überein. Diese Methode liefert aber auch das Integral der vorliegenden Differentialgleichung; aus (5.) ergiebt sich nämlich unter Berücksichtigung der folgenden Gleichungen:

$$\varphi' = \varrho \cdot \varphi,$$

also

$$\varphi = ce^{\int \varrho dz} = c\sqrt[k+l]{\frac{a_1}{a_2}}\, e^{-\frac{1}{k+l}\int\frac{dz}{a_1 a_2}},$$

und daher als Integral der Differentialgleichung

$$(\mathrm{B}^*.)\quad \left(a_1 y' - \frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 + k}{(k+l)a_2}\, y\right)^k \left(a_2 y' - \frac{k a_1 a_2' + l a_1' a_2 - l}{(k+l)a_1}\, y\right)^l = 1:$$

$$y = c^{-k} a_1^{\frac{l}{k+l}} a_2^{\frac{k}{k+l}} e^{\frac{k}{k+l}\int\frac{dz}{a_1 a_2}} - c^l a_1^{\frac{l}{k+l}} a_2^{\frac{k}{k+l}} e^{-\frac{l}{k+l}\int\frac{dz}{a_1 a_2}};$$

dasselbe ist nur dann algebraisch, wenn $\frac{1}{a_1 a_2}$ die logarithmische Ableitung einer algebraischen Function ist.

Es ist von Interesse, diejenigen in jedem Falle algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen (2.) zu bestimmen, deren Geschlecht kleiner als 2 ist, da für diese der *Poincaré*sche Satz*) die algebraische Integrirbarkeit nicht ergiebt. Wir haben gefunden, dass die Differentialgleichung (2.) nur dann stets algebraisch integrirbar ist, wenn die Anzahl der Linearfactoren grösser als 2 ist; wir können also $n > 2$ voraussetzen (es ist übrigens leicht ersichtlich, dass die Differentialgleichung (2.) im Falle $n \leqq 2$ vom Geschlecht 0 ist). — Wendet man auf (2.) die birationale Transformation

$$y' = v, \quad y = u \cdot v$$

an, so hat die (u, v)-Curve dasselbe Geschlecht. Besitzt nun $m = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ mit p_r den gemeinsamen Theiler q_r, so ist für die algebraische Function v von u die Anzahl der Verzweigungen

$$w = n(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n);$$

daher ergiebt die bekannte *Riemann*sche Relation

$$w = 2m + 2(p-1)$$

für p den Werth

$$p = \frac{(n-2)(p_1 + p_2 + \cdots + p_n) - (q_1 + q_2 + \cdots + q_n) + 2}{2}.$$

Da $q_i \leqq p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ist, so muss, wenn $n > 3$ ist,

$$p > 1$$

sein; wir haben uns also nur mit dem Falle $n = 3$ zu beschäftigen; in diesem Falle ist

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 - (q_1 + q_2 + q_3) + 2}{2},$$

---

*) Acta Math. 7: 1; cfr. die Diss. des Verf., p. 2.

und es kann nur dann $p=1$ werden, wenn $q_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$, d. h. wenn $p_1+p_2+p_3$ durch das kleinste Vielfache von p_1, p_2 und p_3 theilbar ist. Die Discussion der daraus sich ergebenden Diophantischen Gleichung liefert als mögliche Werthe

$$1)\ p_1 = p_2 = p_3 = 1,$$
$$2)\ p_1 = 2,\ p_2 = p_3 = 1,$$
$$3)\ p_1 = 3,\ p_2 = 2,\ p_1 = 1,$$

und als zugehörige Differentialgleichungen

$$(y'-\varrho_1 y)(y'-\varrho_2 y)(y'-\varrho_3 y) = \alpha,$$
$$(y'-\varrho_1 y)^2(y'-\varrho_2 y)(y'-\varrho_3 y) = \alpha,$$
$$(y'-\varrho_1 y)^3(y'-\varrho_2 y)^2(y'-\varrho_3 y) = \alpha,$$

worin ϱ_3 und α in der oben (cfr. Gl. (A.)) gefundenen Weise von ϱ_1 und ϱ_2 abhängen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate können wir in die folgenden Sätze zusammenfassen:

I. *Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten ein Particularintegral erster Ordnung von der Form* (2.) *besitzt, so sind ihre Integrale algebraisch, falls* $n>2$ *ist.*

Aus diesem Satze, mit den Resultaten meiner oben citirten Arbeit zusammengehalten, folgt:

II. *Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten reductibel ist, d. h. ein algebraisches Particularintegral erster Ordnung besitzt, so sind ihre Integrale mit zwei Ausnahmen algebraisch. Erste Ausnahme: in dem Particularintegral fehlt das von* y *und* y' *freie Glied. Zweite Ausnahme: das Particularintegral hat die Form* (2.) *und es ist* $n \lesseqgtr 2$. *In diesen beiden Fällen brauchen die Integrale nicht algebraisch zu sein*); doch lassen sich in jedem Falle die Bedingungen angeben, unter denen sie auch hier algebraisch sind.*

Durch den zweiten Satz sind die einzig möglichen Formen der algebraischen Particularintegrale erster Ordnung festgelegt, welche reductible, *nicht* algebraisch integrirbare lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung besitzen können. Eine genauere Discussion des ersten Ausnahme-

*) Sie sind Exponentialfunctionen *Abel*scher Integrale, mit Ausnahme des Falles $n = 1$, wo das Integral einer solchen Exponentialfunction auftreten kann (cfr. p. 163 und *Königsberger*, l. c., p. 18—20).

falles führt nämlich zu dem einzigen Typus

$$\frac{(y'-\varrho_1 y)^{p_1}}{(y'-\varrho_2 y)^{p_2}} = \alpha.$$

Wir können daher schliesslich sagen:

III. ***Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zwar reductibel, aber nicht algebraisch integrirbar ist, so kann sie nur algebraische Particularintegrale erster Ordnung von der Gestalt***

$$(y'-\varrho_1 y)^{p_1}(y'-\varrho_2 y)^{p_2} = \alpha$$

besitzen. — Darin sind $\varrho_1, \varrho_2, \alpha$ algebraische Functionen von z, deren Zusammenhang sich aus Gleichung (B.) oder in anderer Form aus (B*.) ergiebt, während p_1 und p_2 ganze Zahlen bedeuten, ***von denen eine auch negativ bez. Null*) sein kann.*** Ihre Integrale sind Exponentialfunctionen *Abel*scher Integrale bez. Integrale*) solcher Functionen.

*) Dieser Fall $n = 1$ erledigt sich folgendermassen (cfr. *Königsberger* l. c.): Die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche ein Particularintegral erster Ordnung

$$y'-\varrho y = \alpha$$

besitzt, lautet

$$y''-\left(\varrho+\frac{\alpha'}{\alpha}\right)y'-\left(\varrho'-\frac{\alpha'}{\alpha}\varrho\right)y = 0,$$

und ihr Integral

$$y = c_1 e^{\int \varrho dz} + c_2 e^{\int \varrho dz}\int e^{\int\left(\frac{\alpha'}{\alpha}-\varrho\right)dz} dz.$$

Im Falle $\alpha = 0$ tritt in der Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihrem Integral an Stelle von $\frac{\alpha'}{\alpha}$ eine beliebige algebraische Function von z.

Berichtigung zu der Arbeit „Ueber eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung" (Bd. 120 dieses Journals S. 113ff.).

Seite 129 Zeile 5 von oben muss $\frac{n-2}{n}$ statt $\frac{n-2}{2}$ stehen.

Seite 131 muss die Gleichung $f\left(\frac{y'''}{y'^2}-\frac{y''^2}{y'^3}, y\right) = 0$ unterdrückt werden.
