Ueber Differential- und Differenzengleichungen, welche durch die hypergeometrische Reihe von *Gauss* integrirt werden können.

(Von Herrn *W. Heymann* in Chemnitz.)

In der fundamentalen Bedeutung der hypergeometrischen Function $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist es begründet, dass ihre Differentialgleichung

$$(1.)\qquad x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y = 0$$

geradezu als *Normalform* für eine beträchtliche Anzahl anderer Differentialgleichungen angesehen werden kann und muss. Wird dieser Umstand nicht berücksichtigt, so kommt es dahin, dass solche Gleichungen, welche mit (1.) äquivalent sind, zu sehr ausgedehnten und eigentlich *überflüssigen* Untersuchungen führen. Ein Beispiel hierzu bildet die in den fünfziger Jahren und später umständlich discutirte Differentialgleichung

$$(2.)\qquad (a_2+b_2x)y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x)y = 0.$$

In der That genügt es, den besonderen Fall $\beta = m$, $x = x':m$, für $m = \infty$ der Gleichung (1.) zu betrachten, auf welchen *Kummer* in seiner klassischen Arbeit „Ueber die hypergeometrische Reihe“, dieses Journal, Bd. 15 (1836), aufmerksam macht, um sofort zu erkennen, dass (1.) die geeignete Normalform für (2.) ist, wenn letztere mit der Substitution $y = e^{\lambda x}\cdot z$ zuvor von dem Gliede b_0x befreit wird. Aehnliche Bemerkungen gelten auch für die Gleichung

$$(3.)\qquad a_2y''+(a_1+b_1x)y'+(a_0+b_0x+c_0x^2)y = 0,$$

insofern diese auf (2.) zurückgeführt werden kann, wie hinlänglich bekannt ist.

Ich habe an anderer Stelle eine grössere Anzahl verwandter Differentialgleichungen aufgestellt*) und gezeigt, wie man dieselben in die

*) Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen. Teubner, 1891.

Gleichung (1.) transformirt. Als besonders bemerkenswerthe Fälle seien folgende Differentialgleichungen erster Ordnung genannt:

$$(4.)\quad \begin{cases} (a+2bx+cx^2)y'+Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F = 0; \\ \text{Substitution: } y = (a+2bx+cx^2)z+g+hx, \quad z = \dfrac{dw}{w\,dx}. \end{cases}$$

$$(5.)\quad \begin{cases} (a+bx+cx^2+dx^3)y'+(a_2+b_2x)y^2+(a_1+b_1x)y+(a_0+b_0x) = 0; \\ \text{Substitution: } x = \dfrac{1+\lambda u}{u}, \quad y = \dfrac{1+\mu v}{v}. \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} (a_1x^2+b_1y^2+2c_1xy)dx+(a_2x^2+b_2y^2+2c_2xy)dy \\ +\ (Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F)(x\,dy-y\,dx) \end{array}\right\} = 0; \\ \text{Substitution: } x = \dfrac{u}{v}, \quad y = \dfrac{1+\mu u}{v}. \end{cases}$$

$$(7.)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} (A_1x^2+B_1y^2+2C_1xy+2D_1x+2E_1y+F_1)dx \\ +\ (A_2x^2+B_2y^2+2C_2xy+2D_2x+2E_2y+F_2)dy \end{array}\right\} = 0; \\ \text{Substitution: } x = \alpha y+u. \end{cases}$$

Die Transformation in Gleichung (4.) resp. (1.) ist nur möglich, wenn der Gleichung (7.) zwei parallele Gerade particulär genügen.

$$(8.)\quad \begin{cases} (a+bx+cx^2+dx^3)\dfrac{dy}{dx}+(a_1+b_1x)y+(c_1+d_1x)z = 0, \\ (a+bx+cx^2+dx^3)\dfrac{dz}{dx}+(a_2+b_2x)y+(c_2+d_2x)z = 0, \end{cases}$$

Die Integration dieser simultanen Gleichungen lässt sich direct von (5.) abhängig machen; man kann das System aber auch so transformiren, dass nach Elimination von z die gewünschte Normalform (1.) erscheint. Wegen der Einzelheiten, welche die Rechnung mit sich bringt, vergleiche man a. a. O.; hier kommt es uns bloss darauf an, die Aufmerksamkeit auf gewisse Gruppen von Gleichungen zu lenken, deren zahlreiche Parameter schliesslich doch auf nur *drei* Elemente α, β, γ reducirt werden können.

Was wir von der Differentialgleichung (1.) gesagt haben, gilt in noch höherem Maasse von den hypergeometrischen ***Differenzengleichungen;*** man wolle nur beachten, dass jede „Beziehung zwischen benachbarten (verwandten) Functionen" bereits eine totale oder partielle lineare Differenzengleichung vorstellt. Uebrigens kann man auch hier bei der Differentialgleichung (1.) anknüpfen und durch h-fache Differentiation nach x eine Differenzengleichung in Bezug auf h ableiten, welche als Normalform der linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$(9.)\qquad Az^{(h+2)}+(B+Ch)z^{(h+1)}+(D+Eh+Fh^2)z^{(h)} = 0$$

sowie auch

$$(10.)\qquad (A+Bh)z^{(h+2)}+(C+Dh)z^{(h+1)}+(E+Fh)z^{(h)} = 0$$

angesehen werden kann. Die Bezeichnung $z^{(h)}$ statt z_h oder z_x, wie man gewöhnlich schreibt, ist für unsere Darstellung die natürlichste, weil wir es zunächst thatsächlich mit höheren Differentialquotienten zu thun haben; die Einführung der Symbole Δ und Δ^2 haben wir gänzlich unterlassen, da hierdurch eine unzweckmässige Vermischung der Coefficienten herbeigeführt wird. Es sei aber gestattet, mit der erst erwähnten Bezeichnung zu wechseln da ein Missverständniss völlig ausgeschlossen erscheint.

Die obigen Differenzengleichungen sind trotz ihres fundamentalen Charakters bisher wenig beachtet worden. Eine Ausnahme macht ***Boole*** in seinem bekannten Lehrbuche;*) allein auch dieser Schriftsteller berücksichtigt nicht, dass die Integrale auf die ***Gauss***sche Function F hinauskommen, sondern bildet die Lösungen in besonderer Weise, wobei die Uebersichtlichkeit nicht gerade gewinnt. — Untersuchungen, welche sich auf die Convergenz der Reihen, auf die rationale Darstellung, d. h. auf das Abbrechen der Reihen infolge ganzer negativer α oder β beziehen, müssen aber bei directer Inangriffnahme der Integration obiger Gleichungen ganz unnöthig wiederholt werden, kurz, alle die werthvollen Resultate, welche von ***Gauss, Kummer*** und nachfolgenden Forschern gesammelt worden sind, bleiben auf diese Weise unbeachtet oder müssen für die neuen und weniger zweckmässig geformten Gleichungen reproducirt werden. Es dürfte daher kein überflüssiges Unternehmen sein, wenn man für alle hier in Betracht kommenden Differenzengleichungen eine ***Normalform*** aussucht, die sich möglichst der Normalform (1.) anschliesst und wie diese durch hypergeometrische Reihen integrirt werden kann.

Eine solche Normalgleichung erhält man in kürzester Weise, wie schon angedeutet, wenn man Gleichung (1.) h-mal nach x differentiirt und sodann h als unabhängige Veränderliche, x dagegen als Parameter ansieht; es entsteht:

$$(11.)\quad x(1-x)y^{(h+2)}+[(1-2x)h+\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y^{(h+1)}-(\alpha+h)(\beta+h)y^{(h)} = 0.$$

---

*) A Treatise on the Calculus of finite Differences. London.

Die zugehörigen Integrale ergeben sich dann ebenfalls durch eine entsprechende Differentiation, und zwar kommt man zu folgenden ***sechs Hauptlösungen:***

$$
(12.)\quad \begin{cases}
y_1^{(h)} = \dfrac{\Gamma(\alpha+h)\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\gamma+h)}\cdot F(\alpha+h,\beta+h,\gamma+h,x),\\
y_2^{(h)} = (-1)^h\dfrac{\Gamma(\alpha+h)\Gamma(\beta+h)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1+h)}\cdot F(\alpha+h,\beta+h,\alpha+\beta-\gamma+1+h,1-x),\\
y_3^{(h)} = (-1)^h x^{-h}\Gamma(\gamma-1+h)\cdot F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma-h,x),\\
y_4^{(h)} = (1-x)^{-h}\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+h)\cdot F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1-h,1-x),\\
y_5^{(h)} = (-1)^h x^{-h}\Gamma(\alpha+h)\cdot F\left(\alpha+h,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\frac{1}{x}\right),\\
y_6^{(h)} = (-1)^h x^{-h}\Gamma(\beta+h)\cdot F\left(\beta+h,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\frac{1}{x}\right).
\end{cases}
$$

Diese Art der Herleitung ist zweifellos die kürzeste, sie ist aber nicht ganz einwandsfrei, denn der Differentiationsprocess verlangt, dass h eine *ganze positive* Zahl sei, während doch am Ende diese Veränderliche sowohl in der Gleichung (11.), als in den Integralen (12.) jedwede Zahl bedeuten kann. Ich möchte daher obigen Rechnungsvorgang nur als ein *Orientirungsmittel* angesehen wissen, welches die passende Normalform und alle ihre Lösungen aus *einer* Quelle ableiten lässt. Nachträglich aber erweist man die Allgemeingültigkeit der Integrale direct, indem man sie in die Normalform (11.) einführt. In der That ergeben sich nach einer selbstverständlichen Buchstabenvertauschung die bekannten *Gauss*schen Beziehungen zwischen

$$F(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2),\quad F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),\quad F(\alpha,\beta,\gamma)$$

oder

$$F(\alpha,\beta,\gamma-1),\qquad F(\alpha,\beta,\gamma),\qquad F(\alpha,\beta,\gamma+1)$$

oder

$$F(\alpha+1,\beta,\gamma),\qquad F(\alpha,\beta,\gamma),\qquad F(\alpha-1,\beta,\gamma),$$

je nachdem man entweder die Lösungen $y_1^{(h)}$ und $y_2^{(h)}$ oder $y_3^{(h)}$ und $y_4^{(h)}$ oder $y_5^{(h)}$ und $y_6^{(h)}$ einträgt.

Was nun die Transformation der Gleichung (9.) in die Normalform (11.) anlangt, so genügt hierzu die Substitution

$$(13.)\qquad z^{(h)} = \varrho^h\cdot y^{(h)},$$

wobei ϱ eine disponible Constante bezeichnet; die sonstigen Umformungen liegen auf der Hand. Die Gleichung (10.) führt man zunächst auf (9.) zurück; die vermittelnde Substitution unterscheidet sich von (13.) nur dadurch, dass eine Gammafunction als Factor hinzutritt. Wegen der weiteren Details vergleiche a. a. O.

Will man sämmtliche 24 Integralformen haben, die *Kummer* in der genannten Abhandlung aufgestellt hat, so braucht man die sechs Integrale unter No. 12 nur mittels der Identität

$$(14.)\qquad F(a, b, c, x) = (1-x)^{c-a-b}\cdot F(c-a, c-b, c, x)$$

umzuformen; auf die nun vorhandenen zwölf Integrale wende man dann die bekannte Transformationsformel

$$(15.)\qquad F(a, b, c, x) = (1-x)^{-a}\cdot F\left(a, c-b, c, \frac{x}{x-1}\right)$$

an. Auf diese Weise bekommt man für jeden nur denkbaren Fall passende Lösungen der vorgelegten Differenzengleichung, mag nun x grösser oder kleiner als die Einheit, h positiv oder negativ sein. Insbesondere wird man auch die Fälle leicht erkennen, in denen die Lösungen rational und überhaupt algebraisch werden.

Die bisher betrachteten Differenzengleichungen sind nicht die einzigen, welche sich mittels der Function F integriren lassen. Setzt man allgemein

$$(16.)\qquad y_h = F(\alpha+mh, \beta+nh, \gamma+ph, x),$$

unter m, n, p ganze Zahlen verstanden, so besteht zwischen y_h, y_{h+1} und y_{h+2} eine lineare homogene Beziehung, welche nach den von *Gauss* gegebenen Principien zu entwickeln ist und bezüglich y_h eine lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung vorstellt, deren Coefficienten jedoch den zweiten Grad übersteigen. Es existirt ausserdem auch ein Fall, wo m und n gebrochen sein dürfen. Ist nämlich

$$m = n = \frac{1}{2} \text{ und } \beta = \alpha+\frac{1}{2},$$

und setzt man

$$(17.)\qquad y_h = F\left(\alpha+\frac{h}{2},\ \alpha+\frac{h}{2}+\frac{1}{2},\ \gamma+ph,\ x\right),$$

so wird

$$y_{h+1} = F\left(\alpha+\frac{h}{2}+\frac{1}{2},\ \alpha+\frac{h}{2}+1,\ \gamma+ph+p,\ x\right),$$

$$y_{h+2} = F\left(\alpha+\frac{h}{2}+1,\ \alpha+\frac{h}{2}+\frac{3}{2},\ \gamma+ph+2p,\ x\right),$$

und bezeichnet man die erste Function kurz durch $F(a, b, c)$, so lauten die nächsten beiden mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit von a und b:

$$F(a+1, b, c+p) \quad\text{und}\quad F(a+1, b+1, c+2p).$$

Mithin lässt sich zwischen jenen drei Functionen eine lineare homogene Beziehung aufstellen. Der Bruch $\frac{1}{2}$ ist für die hypergeometrischen Functionen *zweiter* Ordnung charakteristisch; bei den Functionen n-ter Ordnung tritt entsprechend $\frac{1}{n}$ auf. Erwähnt sei, dass die betreffenden Functionen bei der Auflösung der quadrinomischen Gleichungen, z. B. der *Jacobi*schen Gleichung vierten und sechsten Grades eine Rolle spielen, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe.*)

Es ist weiterhin einleuchtend, dass das von uns eingeschlagene Verfahren zur Bildung von Differenzengleichungen unmittelbar auf solche Gleichungen ausgedehnt werden kann, denen hypergeometrische Functionen *dritter* und *höherer* Ordnung genügen. Sind die Gleichungen *nicht* homogen, besteht also ihre rechte Seite in einer gegebenen Function von h, so ist dem Integral der homogenen Gleichung ein additives Glied anzuhängen, das sogenannte *Supplementintegral*, welches als particuläres Integral der *nicht* homogenen Gleichung auf besondere Weise bestimmt wird. Bei diesen Untersuchungen erweisen sich die von *Euler* gefundenen, von *Kummer* präciser dargestellten bestimmten Integrale für die Function F als sehr zweckmässig. Man vergl. die ausführlichere Darstellung in den genannten „Studien", sowie die Abhandlung des Verfassers „Ueber Supplementintegrale", dieses Journal, Bd. 98.

Von linearen simultanen Differenzengleichungen sei hier nur so viel erwähnt, dass die Integration des Systems

$$(18.)\qquad \begin{cases} y^{(h+1)}+(a_1+b_1h)y^{(h)}+(c_1+d_1h)z^{(h)} = 0, \\ z^{(h+1)}+(a_2+b_2h)y^{(h)}+(c_2+d_2h)z^{(h)} = 0 \end{cases}$$

zur Gleichung (9.) hinführt. Die betreffende Transformation hat Verfasser in weit allgemeinerer Weise in einer Abhandlung „Zur Theorie der Differenzengleichungen", dieses Journal Bd. 109 mitgetheilt. Wenn übrigens die Gleichungen so speciell sind, wie unter No. 18, so lassen sie sich auch unmittelbar in ein *Normalsystem* umgestalten, so dass nach Elimination von $z^{(h)}$ und $z^{(h+1)}$ sogleich die fertige Normalform (11.) erscheint. Es giebt aber noch eine Transformation des Systems (18.), die uns besonders wegen einer

*) Ueber hypergeometrische Functionen, deren letztes Element speciell ist. — Zeitschr. f. Math. u. Phys., **44.** Jahrg.

dabei auftretenden Resolvente interessirt, welche letztere im Gebiete der Differenzengleichung eine ähnliche Rolle spielt, wie die *Riccati*sche Gleichung unter den Differentialgleichungen. Setzt man nämlich

(19.) $$y_h : z_h = -\Theta_h,$$

so entsteht

(20.) $$(a_2+b_2h)\Theta_{h+1}\cdot\Theta_h-(c_2+d_2h)\Theta_{h+1}+(a_1+b_1h)\Theta_h-(c_1+d_1h) = 0,$$

und diese Gleichung muss nun selbstverständlich eine Reduction auf die früher angegebenen Differenzengleichungen *zweiter* Ordnung (9.) resp. (11.) zulassen. Die Gleichung (20.) ist aber nicht die einzige ihrer Art, welche durch hypergeometrische Functionen integrirt werden kann; es gilt dies vielmehr auch dann noch, wenn in einer Gleichung der Form

(21.) $$p_2\Theta_{u+1}\Theta_u-q_2\Theta_{u+1}+p_1\Theta_u-q_1 = 0$$

die Coefficienten p, q bezüglich u folgendermassen beschaffen sind:

α) p_2 constant, q_2 und p_1 linear, q_1 quadratisch,

β) p_2 quadratisch, q_2 und p_1 linear, q_1 constant,

γ) p_2, q_2, p_1, q_1 sämmtlich linear.

Der erste dieser Fälle erledigt sich durch die Substitution

(22.) $$\Theta_u = \vartheta_u+\frac{q_2}{p_2},$$

denn es entsteht

(23.) $$A\vartheta_{u+1}\vartheta_u+(B+Cu)\vartheta_u+(D+Eu+Fu^2) = 0,$$

und für

(24.) $$\vartheta_u = \frac{z_{u+1}}{z_u},\quad \vartheta_{u+1}\vartheta_u = \frac{z_{u+2}}{z_u}$$

ergiebt sich

(25.) $$Az_{u+2}+(B+Cu)z_{u+1}+(D+Eu+Fu^2)z_u = 0,$$

welche Gleichung genau wie (9.) beschaffen ist.

Der zweite Fall geht aus dem ersten durch die Substitution

(26.) $$\Theta_u = \frac{1}{\Omega_u}$$

hervor.

Der dritte Fall kommt auf den zweiten zurück, wenn man in die ursprüngliche Gleichung (21.) gleich anfangs die Substitution

(27.) $$\Theta_u = \Omega_u+\lambda$$

einführt und über die Constante λ so verfügt, dass der Coefficient von u in q_1 verschwindet.

Was nun die Gleichung (21.) so wichtig macht, ist der Umstand, dass sie zur Bildung sehr allgemeiner ***Kettenbrüche*** Anlass giebt. Der Ansatz hierzu liegt unmittelbar in der Bruchform

$$(28.)\qquad \Theta_{u+1} = -\frac{p_1\,\Theta_u - q_1}{p_2\,\Theta_u - q_2},\ \text{resp. } \Theta_u = \frac{q_2\,\Theta_{u+1} + q_1}{p_2\,\Theta_{u+1} + p_1},$$

wobei die Specialfälle $p_1 = 0$ oder $q_2 = 0$ als besonders einfach hervortreten. Die nach Maassgabe der Recursionsformeln (28.) entwickelten Kettenbrüche kommen demnach im wesentlichen mit dem Quotienten aus zwei benachbarten hypergeometrischen Functionen überein und finden so Anschluss an ein wohldurchforschtes Gebiet.*) Thatsächlich bedarf es nur der kleinen Mühe, dass man die vier Elemente der hypergeometrischen Function explicite durch die Constanten der Gleichung (21.) ausdrückt. Noch vortheilhafter ist es vielleicht, wenn man die Normalform (11.) mit der Substitution

$$(29.)\qquad y_{h+1} : y_h = \vartheta_h$$

verbindet und dadurch auch für die verschiedenen Fälle der Gleichung (21.) eine zweckmässige Normalform herstellt.

Bekanntlich hat *Gauss* verschiedene Kettenbrüche angegeben, die durch den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen ersetzt werden können und mit letzteren gleichzeitig convergiren. Aus unserer Darstellung geht hervor, dass sich jene Untersuchungen weiter fortsetzen lassen, wenn man bei irgend einer der zahlreichen Differenzengleichungen, die hier in Frage kommen können, anknüpft.

---

*) Herr *L. Saalschütz* hat in einer Arbeit „Ueber rationale Auflösungen der Functionalgleichung $C\psi(n)\psi(n+1)+(A''n+B'')\psi(n+1)-(A'(n+1)+B')\psi(n)+(A'-A'')=0$", welche die Vorbereitung zu einem umfangreichen Aufsatz über Kettenbrüche bildet, vergl. dieses Journal, Bd. 119 und 120, die eben genannte Differenzengleichung, welche offenbar auf einen Specialfall der Gleichung (20.) hinauskommt, dadurch zu integriren versucht, dass er eine rationale gebrochene Function mit unbestimmten Coefficienten hypothetisch ansetzt. Obgleich nun der Herr Verfasser ganz seine eigenen Wege geht, so liegt es doch in der Natur der Aufgabe, dass das Endresultat nichts anderes sein kann, als der Quotient zweier hypergeometrischen Reihen, welche letztere rational werden, resp. abbrechen, sobald eines der beiden ersten Elemente eine ganze negative Zahl vorstellt. Herr *Saalschütz* hat dies auch in einer Randnote seiner Arbeit (Bd. 120 S. 162) bestätigt, aber die Bemerkung beigefügt, dass meine Methode in gewissen Fällen nur formales Interesse darböte, da die Reihen zuweilen divergent sein könnten. — Hierzu möchte ich bemerken, dass ein solcher Fall ***niemals*** eintreten kann. Eben weil wir die Auflösung der Gleichung (20.) auf die Normalform der hypergeometrischen Differenzengleichungen zurückführen, so stehen uns sämmtliche Integralformen von ***Kummer*** zu Gebote, von denen bekanntlich immer ein Paar ***brauchbare convergente*** und — wenn überhaupt möglich — abbrechende Reihen liefert.