Ueber die Reduction einer quadratischen Function.

(Von Herrn *H. E. Timerding* in Strassburg.)

Die homogenen quadratischen Functionen sind seit *Jacobi*, zuletzt noch durch Herrn *Frobenius*, auf das Ausführlichste behandelt worden, und ihnen gegenüber sind die nicht homogenen Functionen vollständig zurückgetreten. So wenig sich gegen die Unterordnung der letzteren gegenüber den ersteren auch einwenden lässt, so dürfte es doch nicht ohne Interesse sein, ein Problem kurz zu behandeln, das allein die nicht homogenen quadratischen Functionen betrifft und der Theorie der homogenen Functionen fremd ist. Dasselbe ist vollkommen analog der Reduction der in gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten gegebenen Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung auf eine möglichst einfache Form durch ihre Beziehung auf ein anderes Cartesisches System.

Wir bedienen uns der folgenden *Bezeichnungen und Benennungen:*

1. Mit $f((x))$ soll irgend eine quadratische Function, mit $\varphi((x))$ eine homogene Function zweiten Grades der n Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet werden, ebenso mit $l((x))$ eine lineare homogene Function derselben. Dann lässt sich in Zeichen schreiben

$$f((x)) = \varphi((x)) + 2\,l((x)) + a,$$

wenn a eine Constante bedeutet. n heisse die Dimension der Function.

2. Irgend eine Combination bestimmter Werthe der n Veränderlichen nennen wir einen Punkt und bezeichnen ihn durch den Buchstaben seiner Coordinaten, d. h. der Werthe der Veränderlichen, denen er entspricht, mit fortgelassenem Index. Die Gesammtheit der allen möglichen Combinationen der Veränderlichen entsprechenden Punkte wollen wir kurz als Raum, und zwar als n-dimensionalen Raum, bezeichnen. Die Punkte, die allen linearen Zusammensetzungen

$$x_\sigma = \sum_{\varrho=1}^{p+1} \lambda^{(\varrho)} x_\sigma^{(\varrho)}, \quad \text{für} \sum_{\varrho=1}^{p+1} \lambda^{(\varrho)} = 1, \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, n)$$

der Coordinaten von $p+1$ Punkten $x^{(\varrho)}$ entsprechen, erfüllen eine lineare Mannigfaltigkeit von p Dimensionen oder kurz gesagt, ein ***Lineare*** von p Dimensionen. Ein solches ist auch durch $n-p$ beliebige lineare Gleichungen zwischen den Veränderlichen gegeben, oder auch lassen sich die Coordinaten der Punkte dieses Lineare in der Form darstellen:

$$x_\sigma = x_\sigma^{(0)} + \sum_{\varrho=1}^{p} \alpha_\sigma^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

dann kann man die $\xi^{(\varrho)}$ als Coordinaten der Punkte in dem Lineare ansehen.

3. Als Determinante Δ einer quadratischen Function wird bekanntlich die Determinante aus ihren Coefficienten bezeichnet, die so gebildet ist, dass in der Hauptdiagonale die Coefficienten der Quadrate der Veränderlichen und das constante Glied stehen, und sonst im Durchschnitt der p-ten Reihe mit der q-ten Spalte der halbe Coefficient von $x_p x_q$ und in der letzten Reihe oder letzten Spalte an s-ter Stelle der halbe Coefficient von x_s steht.

Discriminante der quadratischen Function nennen wir die Determinante D ihres homogenen quadratischen Theiles.

Als anreihende Hauptminoren bezeichnen wir eine solche Kette von Hauptunterdeterminanten der Determinante Δ, deren jede aus der vorhergehenden durch Hinzufügung einer Reihe und Spalte hervorgeht.

4. Eine quadratische Function soll r-fach konisch heissen, wenn sie für alle Punkte eines Lineare von $r-1$ Dimensionen mitsammt ihren Derivirten verschwindet. Dieses Lineare wollen wir das Doppellineare der quadratischen Function nennen. Die letztere verschwindet dann für alle Punkte von $(n-r-1)$-fach unendlich vielen Linearia von r Dimensionen, die alle das Doppellineare enthalten.

Es gelten nun zunächst die folgenden vier Sätze, die hier angereiht werden mögen, da sie für das Folgende von Nutzen sind. Sie sind zum Theil wohl bekannt.

Erster Satz. Damit eine quadratische Function r-fach konisch sei, muss ihre Determinante mit allen Unterdeterminanten bis zu den $(r-1)$-ten inclusive verschwinden.

Zweiter Satz. Die Anzahl der von einander unabhängigen Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit eine quadratische Function r-fach konisch sei, ist unabhängig von der Dimension der Function, und zwar beträgt sie

$$\frac{r(r+1)}{2}.$$

Das heisst, damit eine $(r-1)$-fach konische Function auch r-fach konisch sei, sind noch r Bedingungen zu erfüllen.

Eine r-fach konische Function ist nämlich vollständig bestimmt, wenn man ihr Doppellineare und in einem Lineare von $n-r$ Dimensionen eine quadratische Function annimmt. Die Anzahl der unabhängigen Constanten, die sie enthält, ist also

$$(n-r+1)r+\frac{(n-r+1)(n-r+2)}{2}$$

oder

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{r(r+1)}{2}.$$

Das erste Glied in diesem Ausdrucke ist aber die Anzahl der in der allgemeinen quadratischen Function von n Veränderlichen enthaltenen Constanten.

Dritter Satz. Wenn in der Determinante Δ irgend eine Hauptunterdeterminante mit allen s-ten Minoren verschwindet, so verschwinden beliebige s Hauptunterdeterminanten, welche an die erstere anreihen, und zwar die r-te mit allen $(s-r)$-ten Unterdeterminanten, so dass im Ganzen eine Reihe von $2s+1$ anreihenden Hauptminoren verschwindet, die mittelste mit allen s-ten Minoren und die von dieser nach oben oder unten um r Stellen entfernte mit allen $(s-r)$-ten Minoren.

Vierter Satz. Wenn drei anreihende Hauptminoren verschwinden, so verschwinden von der mittleren i. A. alle ersten Unterdeterminanten.

Dieser Satz erscheint als eine Verbindung des zweiten mit dem dritten, wenn man in diesem $s=1$ und in jenem $r=2$ setzt.

Definition. Eine Punkttransformation des n-dimensionalen Raumes, die durch n lineare Substitutionsgleichungen bestimmt ist, soll eine orthogonale heissen, wenn sie den Differentialausdruck Σdx_μ^2 identisch in sich transformirt. Wir stellen uns nun die

Aufgabe: Eine quadratische Function durch eine orthogonale Transformation auf eine möglichst einfache Form zu bringen.

Sei die quadratische Function

$$f((x)) = \sum_\mu\sum_\nu a_{\mu\nu}x_\mu x_\nu+2\sum_\mu a_\mu x_\mu+a,$$

so versuchen wir zunächst durch die Substitutionen

$$(8)\qquad x'_\varrho = x_\varrho+x_\varrho^{(0)}, \qquad (\varrho=1,2,\ldots,n)$$

die linearen Glieder wegzuschaffen. Es ergiebt sich dann, dass die Grössen $x_\varrho^{(0)}$ den n Gleichungen genügen müssen

$$\text{(m)} \qquad \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\nu^{(0)} = a_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn die Determinante dieser Gleichungen, nämlich die Discriminante D der quadratischen Function, nicht verschwindet, so ergeben die Gleichungen (m) ein einziges, vollkommen bestimmtes Werthsystem $x_\varrho^{(0)}$. Nennen wir den diesem Werthsystem entsprechenden Punkt einen Mittelpunkt für die quadratische Function, so ist also immer ein einziger Mittelpunkt vorhanden, solange die Discriminante D von Null verschieden ist.

Ist $D = 0$, und damit beginnt die eigentliche Discussion des Problems, so sind unter den Gleichungen (m) entweder widersprechende oder überzählige oder beides enthalten, und zwar haben wir folgende Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $\varDelta \neq 0$, so sind die Gleichungen (m) unvereinbar, es giebt keinen Mittelpunkt.

2. Ist $\varDelta = 0$, so kann man dem Gleichungssystem (m) immer noch die Gleichung

$$\sum_\nu a_\nu x_\nu^{(0)} = a$$

hinzufügen, der durch jede Lösung jenes Systems genügt wird. Nehmen wir jetzt an, es seien p überzählige unter den n Gleichungen (m). Dann verschwinden alle p-ten Unterdeterminanten von $\varDelta$. Schliessen wir nun von den n Gleichungen (m) etwa die i_1-te, i_2-te, ..., i_p-te als überzählig aus, so ist in den übrigen $n-p$ Gleichungen ein Widerspruch enthalten, wenn alle $(n-p)$-reihigen Determinanten verschwinden, die man aus den links stehenden Coefficienten als Matrix bilden kann. Das heisst aber, wenn ein Widerspruch in den Gleichungen enthalten sein soll, müssen von der Discriminante auch die p-ten Unterdeterminanten verschwinden und nicht bloss die $(p-1)$-ten, wie aus dem Umstande, dass von der Determinante $\varDelta$ alle p-ten Minoren Null sind, folgen würde.

Aber trotzdem kann es doch möglich sein, durch Substitutionen von der Form (s) die linearen Glieder aus dem Ausdruck der quadratischen Function zu entfernen. Um zu erkennen, ob dies der Fall ist, setzen wir

$$x_{i_1} = x_{i_1}^{(0)}, \quad x_{i_2} = x_{i_2}^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_{i_p} = x_{i_p}^{(0)}, \quad x_{i_{p+1}} = x_{i_{p+1}}^{(0)},$$

dann behalten wir statt der ursprünglichen Function eine Function von nur $n-p-1$ Variablen übrig. Ist für diese die in Rede stehende Reduction möglich, so ist sie es auch für die ursprüngliche Function von n Variablen*), und zwar kann, weil über die Constanten $x_{i_\mu}^{(0)}$ beliebig disponirt werden darf, der den Constanten in den Substitutionsgleichungen entsprechende Punkt, der auch hier noch Mittelpunkt heissen möge, in einem Lineare von $p+1$ Dimensionen beliebig angenommen werden. Damit jene Reduction für die quadratische Function von $n-p-1$ Variablen aber möglich sei, ist notwendig, dass von der Discriminante D nicht noch die $(p+1)$-ten Minoren verschwinden.

Wir wollen dieses Verfahren an den einfachsten Fällen erläutern, wo von Δ nicht alle ersten Unterdeterminanten verschwinden.

a) Ist $\Delta = 0$, $D = 0$, aber $D' = \frac{\partial D}{\partial a_{nn}} \neq 0$, so ist in den Gleichungen wohl ein Widerspruch, aber setzen wir $x_\mu = x_\mu^{(0)}$, so finden wir für diese Function von der Dimension $n-1$ einen bestimmten Mittelpunkt, und indem wir den Coordinaten dieses Mittelpunktes den Werth $x_\mu^{(0)}$ hinzufügen, einfach unendlich viele Mittelpunkte für die Function f, als lineare Functionen der einen Coordinate $x_\mu^{(0)}$.

b) Ist $\Delta = 0$, $D = 0$ und $D' = 0$, so existirt kein Mittelpunkt. Denn setzen wir in dem Ausdrucke der quadratischen Function $x_\mu = 0$ und wollen für diese Function von der Dimension $n-1$ die in Rede stehende Trans-

*) Verschwindet nämlich die Function für einen Punkt x_μ, so verschwindet sie auch für jeden Punkt

$$x_\mu + \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_\mu^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)},$$

wo die $\xi^{(\varrho)}$ ganz beliebige Grössen sind. Verschwindet also unter der Voraussetzung

$$x_{i_\sigma} = x_{i_\sigma}^{(0)}, \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, p+1)$$

die Function für den Punkt $(x_\mu^{(0)} + x_\mu)$, wenn sie für $(x_\mu^{(0)} - x_\mu)$ Null ist, so verschwindet sie auch allemal für den Punkt

$$x_\mu^{(0)} + x_\mu + \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_\mu^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)},$$

wenn sie für

$$x_\mu^{(0)} - x_\mu - \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_\mu^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)}$$

Null ist, indem wir das zweite Mal die Vorzeichen der willkürlichen Grössen $\xi^{(\varrho)}$ verändern. Diese $p+1$ Grössen $\xi^{(\varrho)}$ lassen sich aber so bestimmen, dass die Coordinaten

$$x_{i_\sigma} + \sum_{\varrho=1}^{p+1} \alpha_{i_\sigma}^{(\varrho)} \xi^{(\varrho)} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, p+1)$$

beliebige Werthe annehmen, so dass allgemein, wenn die Function für einen Punkt $(x_\mu^{(0)} - x_\mu)$ Null wird, sie auch für $(x_\mu^{(0)} + x_\mu)$ verschwindet, w. z. b. w.

formation ausführen, so verschwindet die Discriminante, ohne dass die Determinante Null wird, die Transformation ist also sicher unmöglich.

Nach dem Vorhergehenden haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

Erster Fall. Die Gleichungen (m) enthalten keine Widersprüche und die Transformation durch die Gleichungen (s) ist möglich. Dann kann die Function in beliebigem Grade konisch sein.

Zweiter Fall. Die Gleichungen (m) enthalten Widersprüche, aber die Transformation ist trotzdem möglich. Wenn dann die Determinante Δ und die Discriminante D mit allen $(p-1)$-ten Minoren verschwinden und der Mittelpunkt in einem Lineare von p Dimensionen beliebig angenommen werden kann, so können wir die Function r-fach cylindrisch nennen.

Dritter Fall. Die Gleichungen (m) enthalten Widersprüche und die Transformation ist unmöglich. Dann kann man die quadratische Function als p-fach parabolisch bezeichnen, wenn in ihrer Determinante alle $(p-2)$-ten Minoren verschwinden und in ihrer Discriminante alle $(p-1)$-ten Unterdeterminanten.

Wir benutzen nun das bekannte Theorem: Jede homogene quadratische Function lässt sich durch eine orthogonale Substitution auf eine Form bringen, die nur die Quadrate der Veränderlichen enthält, und zwar fehlen in dieser Form p Veränderliche, wenn die Function p-fach konisch ist.

Dann geben die folgenden Sätze die Reduction einer beliebigen quadratischen Function auf ihre einfachste Form durch eine orthogonale Transformation.

Fünfter Satz. Wenn die Determinante und die Discriminante einer quadratischen Function f von Null verschieden sind, so kann man dieselbe durch eine bestimmte orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_1^n G_\mu x_\mu^2 + G.$$

Sechster Satz. Wenn die Determinante mit allen p-ten Minoren verschwindet, ohne dass von der Discriminante alle p-ten Minoren Null sind, so kann man die quadratische Function durch eine orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_1^{n-p} G_\mu x_\mu^2.$$

Siebenter Satz. Wenn die Determinante und die Discriminante mit allen p-ten Unterdeterminanten verschwinden, so lässt sich die quadratische

Function immer durch eine orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_{1}^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + G.$$

Zunächst nämlich lässt sie sich auf die Form bringen

$$f = \overset{\circ}{\varphi}((x)) + G,$$

und hierin ist $\varphi((x))$ $(p+1)$-fach konisch.

Achter Satz. Verschwindet die Discriminante einer quadratischen Function mit allen p-ten Unterdeterminanten, so verschwindet nothwendig die Determinante mit allen $(p-1)$-ten Minoren. Sind aber nicht auch alle ihre p-ten Minoren Null, so lässt sich die quadratische Function immer durch eine orthogonale Substitution auf die Form bringen

$$f = \sum_{1}^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + 2 G_{n-p} x_{n-p}.$$

Denn zunächst lässt sie sich auf die Form bringen

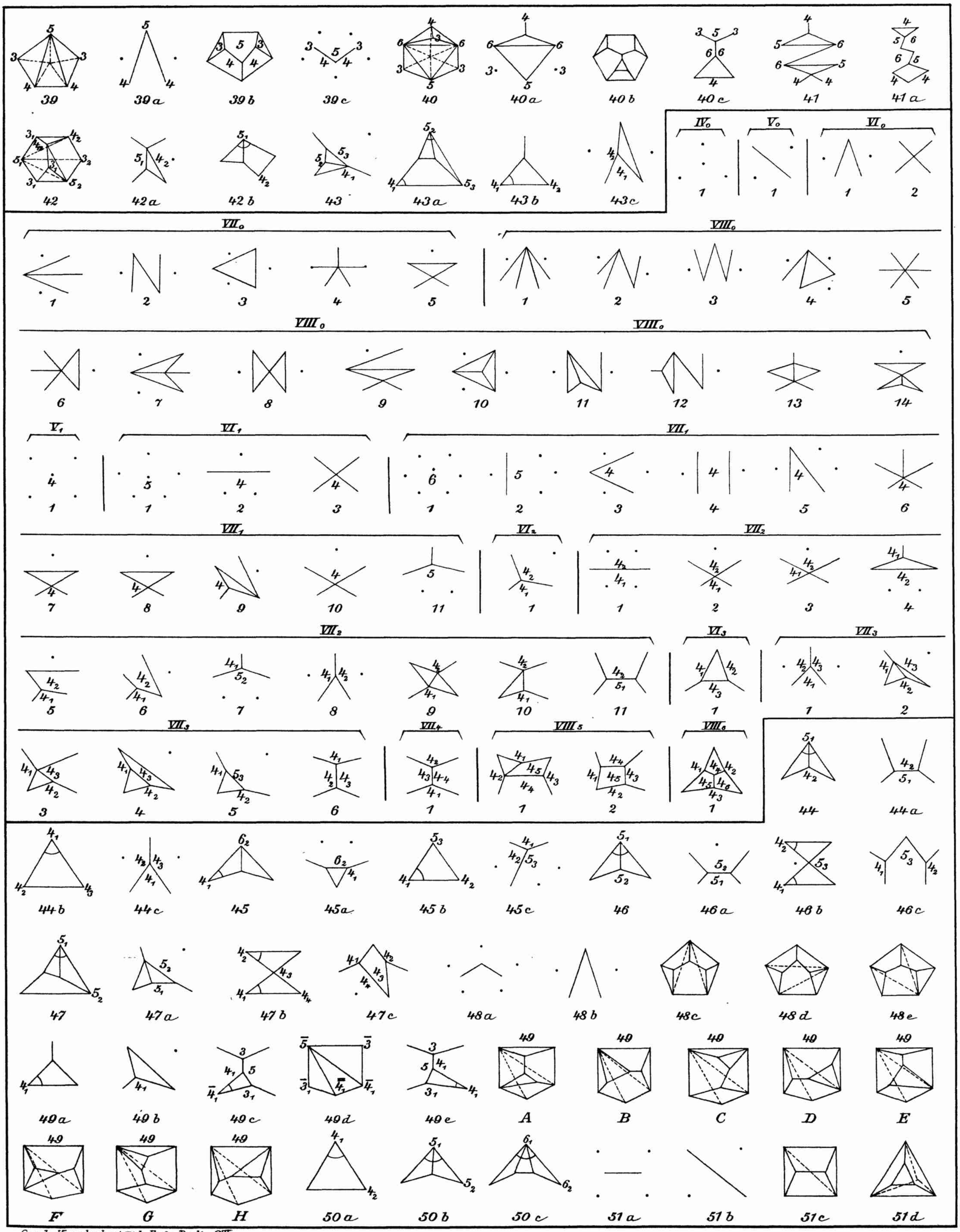
$$f = \sum_{1}^{n-p-1} G_\mu x_\mu^2 + 2 l((x)) + a,$$

aus der linearen Function $2l((x))+a$ lassen sich aber durch eine Substitution von der Form

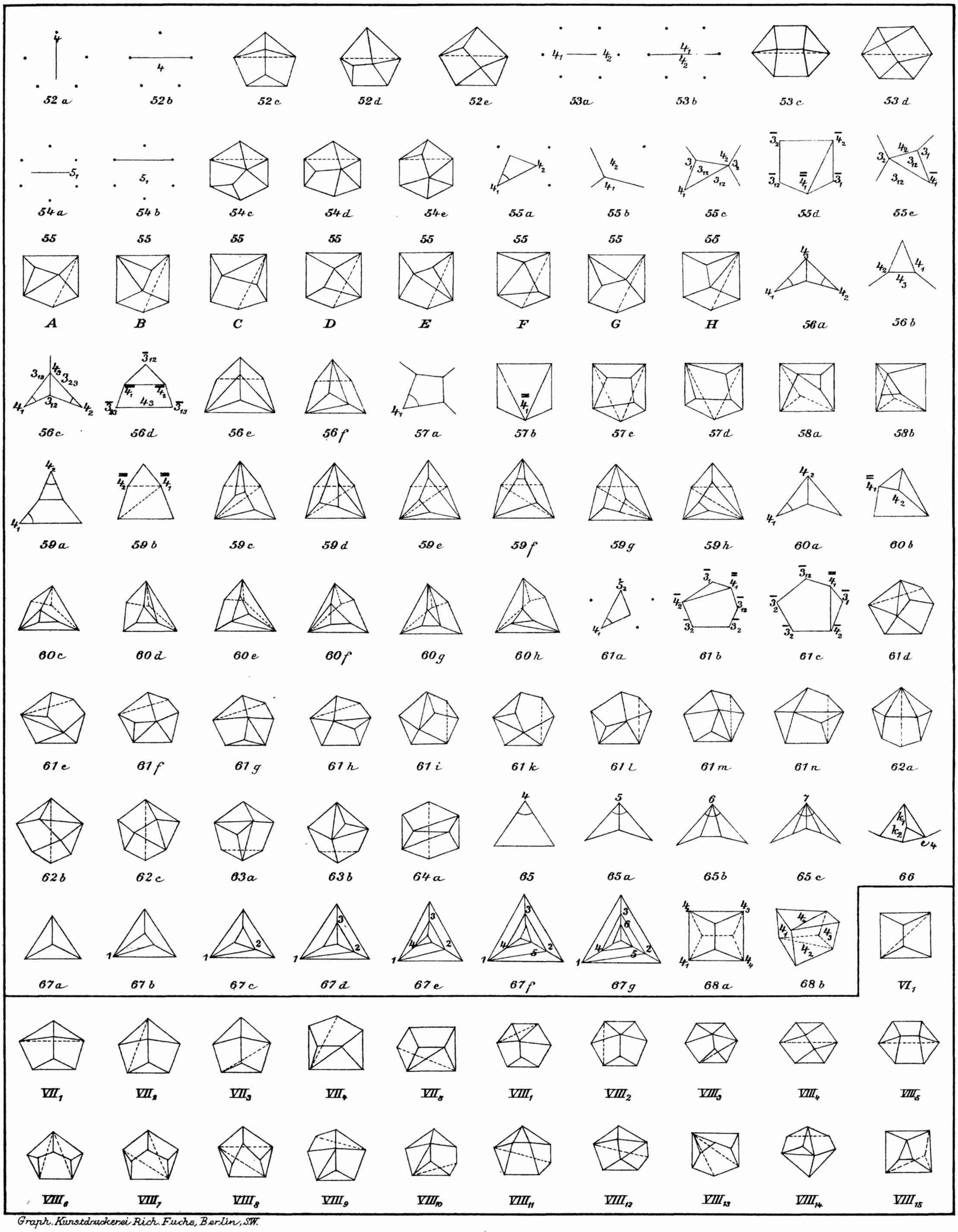
$$x'_\mu = x_\mu + x_\mu^{(0)}, \text{ wo } x_\mu^{(0)} = 0 \text{ für } \mu \geqq n-p,$$

noch $n-p-1$ Glieder ausscheiden, und der übrige aus $p+2$ Gliedern bestehende Theil lässt sich durch eine orthogonale Substitution für die allein in ihm enthaltenen $s+1$ Variablen auf die einfache Form $2G_{n-p}x_{n-p}$ reduciren.

Für den besonderen Fall $n = 3$ liefern diese Sätze die bekannte Discussion und Reduction der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Cartesischen Coordinaten, wie sie in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes gegeben wird.



Graph. Kunstdruckerei Rich. Fuchs, Berlin, SW.



Graph. Kunstdruckerei Rich. Fuchs, Berlin, SW.