Ueber die Discriminante einer gewissen quadratischen Gleichung und die Bedingungen für den Kreis bei allgemeinen projectiven Coordinaten.

(Von Herrn *F. Dingeldey* in Darmstadt).

§ 1.

Einleitende historische Bemerkungen.

Bekanntlich hat *E. Kummer*[1]) die Discriminante der kubischen Gleichung, durch welche die Hauptaxen einer auf rechtwinklige Coordinaten bezogenen Fläche zweiter Ordnung bestimmt werden, in einer Summe von sieben Quadraten dargestellt, allerdings, wie er selbst sagt, nicht vermöge einer directen Methode, sondern durch Versuche. Auf anderem Wege und unter ausgiebiger Benutzung der zwischen den neun Coefficienten einer orthogonalen Substitution bestehenden 22 Relationen ist *C. G. J. Jacobi*[2]) zu dem gleichen Resultate gelangt, indem er ausserdem zeigte, dass jedes der sieben Quadrate durch das Product jener Discriminante und je einer Function der Substitutionscoefficienten ausgedrückt werden kann, in Folge dessen die Summe dieser Functionen gleich der Einheit ist. *C. W. Borchardt*[3]) hat unter Benutzung von Sätzen der Determinantentheorie die wahre analytische Quelle angegeben, die sowohl das *Kummer*sche Resultat ergiebt, als auch „eine Ausdehnung dieses Resultates auf die allgemeine Gleichung n-ter Ordnung, mit deren Hülfe man die seculären Störungen der Planeten findet",

[1]) Dieses Journal Bd. 26, S. 268—272, 1843.

[2]) Giornale arcadico, Bd. 98, 1844 oder dieses Journal Bd. 30, S. 46—50; in der eigenen Ausgabe der Werke Bd. 1, S. 271—276; Bd. 3 der Gesammelten Werke S. 459 bis 465.

[3]) Dieses Journal Bd. 30, S. 38—45, 1845 oder Gesammelte Werke S. 3—13; vgl. auch Journal de Mathématiques publié par *Liouville* Bd. 12, S. 50—67, 1847 oder Gesammelte Werke S. 15—30.

bekanntlich jene Gleichung

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

von der bei beliebig hohem Grade n *A. Cauchy*[1]) zuerst zeigte, dass sie, natürlich unter Voraussetzung reeller a_{ik}, stets n reelle Wurzeln hat. Alsdann hat auch *O. Hesse*[2]) die *Jacobi*schen Formeln für beliebiges n erweitert und damit die *Borchardt*sche Entdeckung verificirt. Herr *G. Bauer*[3]) führte im Falle $n = 3$ die Zerlegung der Discriminante in eine Summe von sieben Quadraten auf directem Wege durch, indem er die Quadrate unmittelbar aus der Determinantenform der Discriminante entwickelte. Mit den vorerwähnten Arbeiten nahe verwandt ist eine weitere Abhandlung von *O. Hesse*[4]), in der die Discriminante der *quadratischen* Gleichung

$$(2.)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki},\ a^2+b^2+c^2 = 1),$$

von welcher die Hauptaxen eines aus einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung durch eine Ebene herausgeschnittenen Kegelschnitts abhängen, in eine Summe von 10, 7, 6 oder 5 Quadraten zerlegt wird; bezüglich einer Zerlegung in die Summe von 2 Quadraten bemerkte er, dass sie vielleicht ganz unmöglich sei, ein Irrthum, denn Herr *Henrici*[5]) gab diese Zerlegung wirklich, indem er die Gleichung (2.) in die Form

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} e_{11}-\lambda & e_{12} \\ e_{21} & e_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

brachte, und hier ist die Discriminante gleich $(e_{11}-e_{22})^2+4e_{12}^2$. Als Summe

---

[1]) Exercices de Mathématiques (Anciens exercices), Paris 1829 oder Oeuvres complètes, 2. Serie, Bd. 9, S. 175—187.

[2]) Dieses Journal Bd. 57, S. 175—182, 1859 oder Gesammelte Werke S. 489—496.

[3]) Dieses Journal Bd. 71, S. 40—45, 1868.

[4]) Dieses Journal Bd. 60, S. 305—312, 1862 oder Gesammelte Werke S. 497—506.

[5]) Dieses Journal Bd. 64, S. 187—192, 1864.

von sechs Quadraten wurde die Discriminante auch von Herrn *G. Bauer*[1]) dargestellt.

Eine allgemeinere Gattung von Gleichungen mit nur reellen Wurzeln hat *K. Weierstrass*[2]) zuerst gefunden. Man erhält diese Gleichungen durch Nullsetzen einer Determinante

$$(4.)\qquad \Gamma \equiv \Sigma \pm (\gamma_{11}\gamma_{22}\dots\gamma_{nn}),$$

deren Elemente γ_{ik} gleich $a_{ik}+\lambda b_{ik}$ sind, wobei die eine der beiden quadratischen Formen von n Veränderlichen, deren Coefficienten die a_{ik} bezw. b_{ik} sind, für reelle Werthe der Veränderlichen nur Werthe von gleichem Vorzeichen annehmen darf (definit sein muss), während im übrigen die $a_{ik}=a_{ki}$ und $b_{ik}=b_{ki}$ beliebige reelle Zahlen bedeuten. *A. Clebsch*[3]) hat die Gültigkeit der *Weierstrass*schen Entdeckung auch für den Fall $a_{ik}=p_{ik}+q_{ik}\sqrt{-1}$, $a_{ki}=p_{ik}-q_{ik}\sqrt{-1}$ erwiesen, unter p_{ik} und q_{ik} reelle Grössen verstanden, während nun die b_{ik} die Coefficienten der definiten Form sein müssen. Ausserdem hat er gezeigt, dass sich in diesem Falle die Discriminante der Gleichung als Summe von Quadraten darstellen lässt.

Endlich hat Herr *S. Gundelfinger*[4]) noch auf eine Gattung von Gleichungen mit nur reellen Wurzeln aufmerksam gemacht; auch diese Gleichungen erhält man durch Nullsetzen einer Determinante

$$(5.)\qquad B \equiv \Sigma \pm (\beta_{11}\beta_{22}\dots\beta_{nn}),$$

und zwar besitzen ihre Elemente die Werthe

$$(6.)\qquad \beta_{ii}=\alpha_{ii}-\lambda,\qquad \beta_{ik}=\alpha_{ik}\qquad (i \gtrless k),$$

wobei

$$(7.)\qquad \alpha_{ik}=\omega_{1i}a_{1k}+\omega_{2i}a_{2k}+\dots+\omega_{ni}a_{nk},$$

unter $a_{ik}=a_{ki}$ und $\omega_{ik}=\omega_{ki}$ die Coefficienten zweier Formen zweiten Grades von n Veränderlichen verstanden; doch muss die eine der beiden Formen,

---

[1]) Dieses Journal Bd. 71, S. 46—52, 1868.

[2]) Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1858, S. 207—213 oder Gesammelte Werke Bd. 1, S. 233—239.

[3]) Dieses Journal Bd. 62, S. 232—245, 1861; vgl. auch Bd. 57, S. 326—328, 1859. Für den speciellen Fall $b_{ii}=1, b_{ik}=0$ $(i \gtrless k)$ findet sich diese Bemerkung bereits bei *Ch. Hermite,* Comptes rendus de l'académie des sciences, Bd. 41, S. 181f., Paris 1855. Eine andere Verallgemeinerung des *Weierstrass*schen Satzes giebt *E. B. Christoffel,* dieses Journal Bd. 63, S. 255—272, 1864.

[4]) Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von *S. Gundelfinger,* herausgegeben von *F. Dingeldey,* Leipzig 1895, S. 70—72.

etwa die mit den Coefficienten ω_{ik}, definit sein. Natürlich ist hier im allgemeinen α_{ik} von α_{ki} verschieden. Wenn die Determinante der ω_{ik} verschwindet, so ist in den Fällen $n=3$ bezw. $n=4$ die Gleichung $B=0$ diejenige, von welcher die Hauptaxen einer auf allgemeine projective Dreiecks- bezw. Tetraedercoordinaten bezogenen Curve bezw. Fläche zweiter Ordnung abhängen[1]). Im Folgenden möchte ich zeigen, auf welche Weise sich alsdann im Falle $n=3$ die Discriminante von $B=0$ in eine Summe von zwei Quadraten zerlegen lässt. Der geometrischen Bedeutung dieser Gleichung entsprechend werden die Bedingungen, unter denen die Curve zweiter Ordnung einen Kreis darstellt, für diese Zerlegung massgebend sein; demgemäss beginne ich damit diese Bedingungen in einfachster Weise abzuleiten und ausserdem werde ich zeigen, in welcher Beziehung sie zu solchen Bedingungen stehen, die sich, gleichfalls bei Dreieckscoordinaten mit beliebiger Lage des Einheitspunktes, nach einer Bemerkung von Herrn *Gundelfinger* ergeben.

§ 2.

Ableitung der Kreisbedingungen bei beliebigem Coordinatendreieck.

Meist werden diese Bedingungen abgeleitet unter Benutzung des Potenzbegriffes oder auch unter Benutzung der Thatsache, dass die Gleichungen aller Kreise der Ebene nur um solche Glieder differiren können, die aus dem Product eines linearen Factors in den Ausdruck für die unendlich ferne Gerade[2]) bestehen. Auch beschränkt man sich meist auf den Fall der barycentrischen Coordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Schwerpunkt des Coordinatendreiecks liegt, oder den Fall jener Coordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises liegt. Herr *Gundelfinger* gelangt bei beliebigem Coordinatendreieck zu den Kreisbedingungen durch die Thatsache, dass der Ausdruck für die unendlich fernen Punkte der beiden Hauptaxen eines Kegelschnitts im Falle des Kreises identisch verschwindet[3]).

---

[1]) A. a. O. S. 86f. Vgl. auch *Ph. Brückel*, „Zusammenstellung der Formeln des Herrn *S. Gundelfinger* zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe bei Zugrundelegung von projectiven Coordinaten", dieses Journal Bd. 119, S. 219, 1898.

[2]) Vgl. z. B. *N. M. Ferrers*, „An elementary treatise on trilinear coordinates", 1. Aufl. London 1861, S. 84f.; 3. Aufl. London 1876, S. 86f.; ferner *G. Salmon*, „Analytische Geometrie der Kegelschnitte", bearbeitet von *W. Fiedler*, 3. Aufl. Leipzig 1873, S. 193ff.; 5. Aufl. Leipzig 1888, S. 567f.

[3]) In den schon oben citirten „Vorlesungen", S. 96.

Die einfachste Art die Bedingungen abzuleiten, unter denen die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung einen Kreis darstellt, erhält man wohl im Anschluss an diejenige Definition, welche den Kreis lediglich als eine durch die imaginären Kreispunkte hindurchgehende Curve zweiter Ordnung auffasst. Wir wollen diese Bedingungen ableiten unter Annahme eines beliebigen Coordinatendreiecks bei beliebiger Lage des Einheitspunktes E, die nur der einen Beschränkung unterliegt, dass E in keine Seite des Coordinatendreiecks fallen darf. Sind e_1, e_2, e_3 die Abstände des Einheitspunktes von den Seiten, sind ferner h_1, h_2, h_3 die Höhen des Coordinatendreiecks und setzen wir

$$(8.)\qquad \frac{e_i}{h_i} = p_i \qquad (i=1,2,3),$$

so stellt

$$(9.)\qquad p_x \equiv p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3 = 0$$

die Gleichung der unendlich fernen Geraden dar, und die Gleichung des imaginären Kreispunktepaares wird

$$(10.)\qquad \omega(u,u) \equiv \omega_{11}u_1+2\omega_{12}u_1u_2+\omega_{22}u_2^2+2\omega_{13}u_1u_3+2\omega_{23}u_2u_3+\omega_{33}u_3^2 = 0,$$

wobei

$$(11.)\qquad \omega_{ii} = \frac{1}{e_i^2},\quad \omega_{ik} = \frac{1}{e_ie_k}\cdot\cos(a_i, a_k), \qquad (i,k=1,2,3),$$

unter (a_i, a_k) den Nebenwinkel von demjenigen Winkel der Seiten a_i und a_k des Coordinatendreiecks verstanden, in welchem der Einheitspunkt liegt[1]). Das Paar von Schnittpunkten der unendlich fernen Geraden mit der Curve zweiter Ordnung

$$(12.)\quad f(x,x) \equiv a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{33}x_3^2 = 0, \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

ist alsdann in variabelen Liniencoordinaten u_i $(i=1,2,3)$ dargestellt durch

$$(13.)\qquad s(u,u) \equiv \sum_1^3{}_i\sum_1^3{}_k s_{ik}u_iu_k \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (s_{ik}=s_{ki}),$$

wobei

$$(14.)\qquad \begin{cases} s_{11} = a_{22}p_3^2+a_{33}p_2^2-2a_{23}p_2p_3, \\ s_{12} = a_{13}p_2p_3+a_{23}p_1p_3-a_{33}p_1p_2-a_{12}p_3^2. \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. *Gundelfinger* a. a. O. S. 3 und S. 57.

während die übrigen s_{ik} aus den hier angegebenen durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen. Soll nun $f(x, x) = 0$ die Gleichung eines Kreises sein, so muss $s(u, u) = 0$ gleichbedeutend sein mit $\omega(u, u) = 0$, d. h. es muss für beliebige Werthe der u_i die Beziehung stattfinden

$$(15.) \qquad s(u, u) = \varrho \cdot \omega(u, u),$$

wobei ϱ einen Proportionalitätsfactor bezeichnet. Hieraus ergeben sich die Bedingungen für den Kreis sofort in der Gestalt:

$$(16.) \qquad \frac{s_{11}}{\omega_{11}} = \frac{s_{22}}{\omega_{22}} = \frac{s_{33}}{\omega_{33}} = \frac{s_{23}}{\omega_{23}} = \frac{s_{31}}{\omega_{31}} = \frac{s_{12}}{\omega_{12}}. \text{[1]}$$

Den gemeinsamen Werth ϱ dieser Quotienten $\frac{s_{ik}}{\omega_{ik}}$ kann man z. B. mit Hülfe der Relation

$$(17.) \qquad s_{22}\omega_{33} + s_{33}\omega_{22} - 2s_{23}\omega_{23} = p_1^2 \cdot [a, \omega]$$

finden, in der

$$(18.) \qquad [a, \omega] = a_{11}\omega_{11} + 2a_{12}\omega_{12} + a_{22}\omega_{22} + 2a_{13}\omega_{13} + 2a_{23}\omega_{23} + a_{33}\omega_{33},$$

eine Relation, die sich vermöge der zwischen den Coefficienten ω_{ik} und p_1, p_2, p_3 bestehenden Beziehungen

$$(19.) \qquad \tfrac{1}{2}\omega'(p_i) \equiv \omega_{i1}p_1 + \omega_{i2}p_2 + \omega_{i3}p_3 = 0 \text{[2]} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

leicht ergiebt. Setzt man nun in (17.) $s_{ik} = \varrho\omega_{ik}$, so wird $2\varrho(\omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}^2) = p_1^2 \cdot [a, \omega]$; hier ist aber $\omega_{22}\omega_{33} - \omega_{23}^2 = \tau p_1^2$, wobei τ eine Constante bezeichnet, die nur von den Grössen e_i und den Stücken des Coordinatendreiecks abhängt; es ist z. B., wenn wir mit $\varDelta$ den Inhalt dieses Dreiecks bezeichnen,

$$(20.) \qquad \tau = \frac{1}{4\varDelta^2(p_1 p_2 p_3)^2}. \text{[3]}$$

---

[1]) Für den Fall solcher Dreieckscoordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises liegt, oder für den Fall barycentrischer Coordinaten, bei denen der Einheitspunkt im Schwerpunkt des Coordinatendreiecks liegt, findet man die entsprechenden Gleichungen mehrfach in der Litteratur, allerdings meist solche Gleichungen, die nur die zu s_{11}, s_{22}, s_{33} analogen Coefficienten enthalten (vgl. z. B. bei barycentrischen Coordinaten *N. M. Ferrers* im Quart. Journal Bd. 2, S. 267f., 1858; bei den anderen soeben erwähnten Dreieckscoordinaten giebt derselbe Autor die Bedingungen an der schon früher citirten Stelle seines Buches). Nur bei *E. d'Ovidio* fand ich Bedingungsgleichungen, welche die zu *allen* s_{ik} analogen Glieder enthalten (Giornale di Matematiche, Bd. 6, S. 211ff., 1868).

[2]) Vgl. *Gundelfinger*, a. a. O. S. 14.

[3]) Ebendaselbst S. 60ff.; hier werden mehrere Formen angegeben, in die der Ausdruck für τ gebracht werden kann.

Man findet auf solche Weise

$$(21.)\qquad \varrho = \frac{[a, \omega]}{2\tau}.$$

Die Gleichungen (16.) sind natürlich nicht von einander unabhängig, da ja nur zwei Bedingungen zu erfüllen sind, wenn $f(x, x) = 0$ einen Kreis darstellen soll; vielmehr bestehen die zu (19.) analogen Relationen

$$(22.)\qquad \tfrac{1}{2}s'(p_i) = s_{i1}p_1 + s_{i2}p_2 + s_{i3}p_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Von den Kreisbedingungen äusserlich verschiedene ergeben sich aus einer Bemerkung von Herrn *Gundelfinger*. Er zeigte, dass die unendlich fernen Punkte der Hauptaxen einer Curve zweiter Ordnung gegeben sind durch

$$(23.)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei

$$(24.)\qquad \Psi(u, x) \equiv \tfrac{1}{4}\sum_1^3{}_i\, \omega'(u_i) \cdot f'(x_i);$$

im Falle eines Kreises müssen nun die Coefficienten von u_i^2 und von $u_i u_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ in (23.) verschwinden[1]. Unter Anwendung der abkürzenden Bezeichnung

$$(25.)\qquad \alpha_{ik} \equiv \omega_{1i}a_{1k} + \omega_{2i}a_{2k} + \omega_{3i}a_{3k}$$

erhält man hiernach:

$$(26.)\qquad \begin{cases} \begin{vmatrix} \alpha_{12} & p_2 \\ \alpha_{13} & p_3 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \alpha_{23} & p_3 \\ \alpha_{21} & p_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{31} & p_1 \\ \alpha_{32} & p_2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} \alpha_{33} & p_3 \\ \alpha_{31} & p_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{22} & p_2 \\ \alpha_{21} & p_1 \end{vmatrix} = 0, & \begin{vmatrix} \alpha_{11} & p_1 \\ \alpha_{12} & p_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{33} & p_3 \\ \alpha_{32} & p_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{22} & p_2 \\ \alpha_{23} & p_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & p_1 \\ \alpha_{13} & p_3 \end{vmatrix} = 0. \end{cases}$$

Vor den durch (16.) dargestellten Bedingungen zeichnen sich diese Gleichungen (26.) dadurch aus, dass sie die Coefficienten p_i nicht wie jene im zweiten Grade, sondern nur linear enthalten; natürlich müssen aber die Gleichungen (26.) und (16.) äquivalent sein. In der That ist z. B.

$$(27.)\qquad \begin{cases} \alpha_{12}p_3 - \alpha_{13}p_2 = \dfrac{\omega_{12}\omega_{13}}{p_1}\left(\dfrac{s_{12}}{\omega_{12}} - \dfrac{s_{13}}{\omega_{13}}\right), \\ \alpha_{33}p_1 - \alpha_{31}p_3 - (\alpha_{22}p_1 - \alpha_{21}p_2) = \dfrac{\omega_{22}\omega_{33}}{p_1}\left(\dfrac{s_{22}}{\omega_{22}} - \dfrac{s_{33}}{\omega_{33}}\right), \end{cases}$$

und die übrigen Gleichungen (26.) hängen in analoger Weise mit (16.)

---

[1]) A. a. O. S. 96.

zusammen. Es ergeben sich diese Beziehungen zwischen den beiden Gleichungssystemen lediglich unter Anwendung der Relationen (19.).

§ 3.

Die Discriminante der quadratischen Gleichung für die Hauptaxentransformation.

Die Aufgabe, die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung $f(x, x) = 0$ mit einem einzigen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt auf die Hauptaxen zu transformiren, also in die Gestalt

$$\lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 + \varkappa X_3^2 = 0 \tag{28.}$$

überzuführen, hängt, wie schon in § 1 bemerkt wurde, bei Anwendung allgemeinster projectiver Coordinaten von der Lösung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{29.}$$

ab, in der $\alpha_{ik} = \omega_{1i}a_{1k} + \omega_{2i}a_{2k} + \omega_{3i}a_{3k}$. Nach Absonderung der Wurzel $\lambda = 0$ reducirt sich (29.) auf die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - [a, \omega]\lambda + \tau F(p, p) = 0, \tag{30.}$$

deren Wurzeln λ_1 und λ_2 die Coefficienten von X_1^2 und X_2^2 in (28.) sind, während $\varkappa$ den Werth $A : F(p, p)$ besitzt, unter A die Determinante von $f(x, x)$, unter $F(p, p)$ den Ausdruck

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix}$$

verstanden*). Soll $f(x, x) = 0$ die Gleichung eines Kreises sein, so muss die quadratische Gleichung (30.) zwei gleiche Wurzeln haben, somit die Discriminante

$$D \equiv [a, \omega]^2 - 4\tau F(p, p) \tag{31.}$$

verschwinden. Da aber die Coefficienten von $f(x, x) = 0$ zwei Bedingungen erfüllen müssen, wenn diese Gleichung einen Kreis darstellen soll, so wird D als Summe von Quadraten darstellbar sein. In dem speciellen Falle von Parallelcoordinaten mit dem Axenwinkel w ist bekanntlich

$$\sin^4 w \cdot D = (a_{11} - a_{22})^2 \sin^2 w + [(a_{11} + a_{22})\cos w - 2a_{12}]^2, \tag{32.}$$

---

*) Näheres bei *Gundelfinger* a. a. O. S. 85—91.

und es fragt sich nun, in welcher Weise man im Falle beliebiger Dreieckscoordinaten die analoge Darstellung der Discriminante D erreichen kann. Zum Zweck einer solchen Darstellung wird man zunächst versuchen, $[a, \omega]$ und $F(p,p)$ durch die Grössen s_{ik} auszudrücken. Man findet leicht

$$p_1p_2p_3[a,\omega] = -(s_{11}p_1\omega_{23}+s_{22}p_2\omega_{31}+s_{33}p_3\omega_{12}); \tag{33.}$$

ferner ist

$$\begin{cases} 4(p_1p_2p_3)^2F(p,p) = -s_{11}^2p_1^4-s_{22}^2p_2^4-s_{33}^2p_3^4+2s_{22}s_{33}p_2^2p_3^2 \\ \qquad\qquad +2s_{33}s_{11}p_3^2p_1^2+2s_{11}s_{22}p_1^2p_2^2\text{*}). \end{cases} \tag{34.}$$

Daher wird

$$\begin{cases} (p_1p_2p_3)^2D = s_{11}^2p_1^2(\omega_{23}^2+\tau p_1^2)+s_{22}^2p_2^2(\omega_{31}^2+\tau p_2^2)+s_{33}^2p_3^2(\omega_{12}^2+\tau p_3^2) \\ \qquad +2s_{22}s_{33}p_2p_3(\omega_{12}\omega_{13}-\tau p_2p_3) \\ \qquad +2s_{33}s_{11}p_3p_1(\omega_{23}\omega_{21}-\tau p_3p_1)+2s_{11}s_{22}p_1p_2(\omega_{31}\omega_{32}-\tau p_1p_2). \end{cases} \tag{35.}$$

Mit Hülfe der Relationen**)

$$\tau p_ip_k = \Omega_{ik}, \tag{36.}$$

wobei Ω_{ik} die Unterdeterminante von ω_{ik} in der Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}.$$

bezeichnet, verwandelt sich (35.) in

$$\begin{cases} (p_1p_2p_3)^2D = s_{11}^2p_1^2\omega_{22}\omega_{33}+s_{22}^2p_2^2\omega_{33}\omega_{11}+s_{33}^2p_3^2\omega_{11}\omega_{22} \\ \qquad +2s_{22}s_{33}p_2p_3\omega_{11}\omega_{23}+2s_{33}s_{11}p_3p_1\omega_{22}\omega_{31}+2s_{11}s_{22}p_1p_2\omega_{33}\omega_{12} \end{cases} \tag{37.}$$

und durch eine weitere leichte Umformung, sowie mit Rücksicht auf (20.) erhält man

$$\begin{cases} D = -4\Delta^2\tau\omega_{11}\omega_{22}\omega_{33}\left\{\left(\frac{s_{22}}{\omega_{22}}-\frac{s_{33}}{\omega_{33}}\right)^2p_2p_3\omega_{23}+\left(\frac{s_{33}}{\omega_{33}}-\frac{s_{11}}{\omega_{11}}\right)^2p_3p_1\omega_{31} \right. \\ \qquad\qquad \left. +\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}}-\frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)^2p_1p_2\omega_{12}\right\}. \end{cases} \tag{38.}$$

Liegt der Einheitspunkt im Inneren eines spitzwinkligen Coordinatendreiecks, so sind die Grössen p_i sämmtlich positiv, $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$ negativ, D würde daher in diesem Falle bereits als Summe *dreier* Quadrate dar-

*) Für den Fall barycentrischer Coordinaten findet sich diese Relation bei *L. Schendel* „Elemente der analytischen Geometrie der Ebene in trilinearen Coordinaten", Jena 1874, S. 79.

**) Vgl. *Gundelfinger* a. a. O. S. 60.

gestellt sein und $D=0$ die Gleichungen

$$\frac{s_{11}}{\omega_{11}}=\frac{s_{22}}{\omega_{22}}=\frac{s_{33}}{\omega_{33}}$$

zur Folge haben. Um nun D ganz allgemein als Summe *zweier* Quadrate darzustellen, ist die rechte Seite von (38.) etwas umzuformen, was auf verschiedene Weise geschehen kann, je nachdem man den einen oder den anderen der Indices 1, 2, 3 bevorzugt. Wir führen z. B. für ω_{23} den aus (36.) folgenden Werth $\frac{\omega_{12}\omega_{13}-\tau p_2 p_3}{\omega_{11}}$ ein und ersetzen p_1 mit Hülfe von (19.) durch $-\frac{\omega_{12}p_2+\omega_{13}p_3}{\omega_{11}}$. Alsdann erhält man leicht den folgenden Ausdruck

$$(39.)\quad D=4\Delta^2\tau\omega_{22}\omega_{33}\left\{\left(\frac{s_{22}}{\omega_{22}}-\frac{s_{33}}{\omega_{33}}\right)^2\tau p_2^2p_3^2+\left[\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}}-\frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)\omega_{12}p_2+\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}}-\frac{s_{33}}{\omega_{33}}\right)\omega_{13}p_3\right]^2\right\}.$$

Zwei andere Darstellungen der gewünschten Art entstehen hieraus durch cyklische Vertauschung der Indices; so z. B.:

$$(39^a.)\quad D=4\Delta^2\tau\omega_{11}\omega_{22}\left\{\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}}-\frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)^2\tau p_1^2p_2^2+\left[\left(\frac{s_{33}}{\omega_{33}}-\frac{s_{11}}{\omega_{11}}\right)\omega_{31}p_1+\left(\frac{s_{33}}{\omega_{33}}-\frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)\omega_{32}p_2\right]^2\right\}.$$

Ferner kann man an Stelle von s_{33} den Coefficienten s_{12} einführen; aus (22.) folgt nämlich $s_{33}p_3^2=s_{11}p_1^2+s_{22}p_2^2+2s_{12}p_1p_2$, und wenn man diesen Ausdruck in (39ª.) einführt sowie die Relationen (19.) und (20.) berücksichtigt, ergiebt sich:

$$(40.)\qquad D=\frac{\omega_{11}\omega_{22}}{p_3^2}\left\{\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}}-\frac{s_{22}}{\omega_{22}}\right)^2\tau+\frac{\omega_{12}^2}{p_3^2}\left(\frac{s_{11}}{\omega_{11}}+\frac{s_{22}}{\omega_{22}}-2\frac{s_{12}}{\omega_{12}}\right)^2\right\}.$$

In dieser Formel ist die für schiefwinklige Parallelcoordinaten mit dem Axenwinkel w giltige Formel (32.) als specieller Fall enthalten. Um diese Coordinaten zu bekommen, lässt man die Seite a_3 des Coordinatendreiecks mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen und verlegt den Einheitspunkt E auf die Halbirungslinie des Winkels w der Seiten a_1 und a_2 der Art, dass die von E bis an die Seite a_1 gezogene Parallele zu a_2 die Länge 1 hat, ebenso wie die von E bis an die Seite a_2 gezogene Parallele zu a_1 *). Es ist alsdann

$$e_1=e_2=\sin w,\quad e_3=\infty,\quad p_1=p_2=0,\quad p_3=1,$$
$$\omega_{11}=\omega_{22}=\frac{1}{\sin^2 w},\quad \omega_{12}=-\frac{\cos w}{\sin^2 w},\quad \tau=\frac{1}{\sin^2 w};$$

ferner wird $s_{11}=a_{22}$, $s_{22}=a_{11}$, $s_{12}=-a_{12}$, und (40.) geht sofort über in (32.).

*) Vgl. *Gundelfinger* a. a. O. S. 8.

Auch die in § 1 erwähnte, zuerst von *Henrici* gelöste Aufgabe, die Discriminante der quadratischen Gleichung

$$(41.)\qquad -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

in eine Summe von zwei Quadraten zu zerlegen, ist nunmehr auf neuem Wege gelöst. Es ist dies jene Gleichung, von deren Wurzeln die Hauptaxen des Kegelschnitts abhängen, der aus einer auf rechtwinklige Parallelcoordinaten bezogenen Fläche zweiter Ordnung

$$(42.)\ a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

durch die Ebene

$$(43.)\qquad ax+by+cz+d=0$$

herausgeschnitten wird. Nehmen wir nämlich an, dass $a^2+b^2+c^2$ gleich 1 sei, dass mit anderen Worten die Gleichung der Schnittebene z. B. in der *Hesse*schen Normalform vorliege, so geht die Gleichung (41.) aus

$$(30.)\qquad \lambda^2-[a,\omega]\lambda+\tau F(p,p)=0$$

hervor, wenn man setzt

$$(44.)\ \begin{cases} \omega_{11}=b^2+c^2,\ \omega_{22}=c^2+a^2,\ \omega_{33}=a^2+b^2,\ \omega_{23}=-bc,\ \omega_{31}=-ca, \\ \qquad \omega_{12}=-ab,\ p_1=a,\ p_2=b,\ p_3=c,\ \tau=1,\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

Auch die Relationen $\omega'(p_i)=0$ sowie $\Omega_{ik}=\tau p_i p_k$ bleiben alsdann erhalten, jedoch ist natürlich $p_1+p_2+p_3$ nicht mehr gleich der Einheit. Uebrigens lässt sich auch durch Anwendung elementarer Sätze der Determinantentheorie der Ausdruck (41.) nach Multiplication mit λ in eine Determinante von der Gestalt (29.) überführen und hierdurch gleichfalls die bei Beachtung der Relationen (44.) vorhandene Identität von (41.) und (30.) beweisen.

Es ist damit gezeigt, dass man als *Bedingungen, unter denen die Fläche* (42.) *von der Ebene* (43.) *in einem Kreise geschnitten wird,* wieder Gleichungen von der Form (16.) hat:

$$\frac{s_{11}}{\omega_{11}}=\frac{s_{22}}{\omega_{22}}=\frac{s_{33}}{\omega_{33}}=\frac{s_{23}}{\omega_{23}}=\frac{s_{31}}{\omega_{31}}=\frac{s_{12}}{\omega_{12}}.$$

die, wie schon bemerkt, nur zwei von einander *unabhängige* Gleichungen darstellen. Jedoch ist jetzt mit Rücksicht auf (44.) z. B.

$$(45.)\qquad \begin{cases} s_{11} = a_{22}c^2 + a_{33}b^2 - 2a_{23}bc \\ s_{12} = a_{13}bc + a_{23}ac - a_{33}ab - a_{12}c^2 \end{cases}$$

und für die ω_{ik} hat man die in (44.) angegebenen Werthe einzutragen. Die Gleichungen $\frac{s_{12}}{\omega_{12}} = \frac{s_{13}}{\omega_{13}}$ und $\frac{s_{11}}{\omega_{11}} = \frac{s_{22}}{\omega_{22}}$ sind alsdann mit denjenigen identisch, welche man in *Hesse*s Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes (3. Aufl. Leipzig 1876, S. 403, Gl. (35.)) auf anderem Wege abgeleitet findet, nur stehen dort statt der Indices 1, 2, 3 bei den Coefficienten a_{ik} die Indices 0, 1, 2.