Ueber eine *Jacobi*sche Gleichung.

(Von Herrn *Josef Sterba* in Wien.)

Im XV. Bande dieser Zeitschrift hat *Jacobi* in der Abhandlung „Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales" durch Integration des sinus amplitudinis eines zusammengesetzten Argumentes gezeigt, dass $\sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, b + \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+a+b) - \sin\mathrm{am}(u+a) \sin\mathrm{am}(u+b) = k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, b \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+a) \sin\mathrm{am}(u+b) \sin\mathrm{am}(u+a+b)$ ist, von welcher Gleichung er sagt „quae est formula nova, maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum". *Richelot* hat einen directen Beweis für jene Formel gegeben (s. *Enneper*, Elliptische Functionen), indem er bewies, dass allgemein die Relation besteht

$$\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta)\sin\mathrm{am}(\alpha-\beta)+\sin\mathrm{am}(\beta+\gamma)\sin\mathrm{am}(\beta-\gamma)+\sin\mathrm{am}(\gamma+\alpha)\sin\mathrm{am}(\gamma-\alpha)$$
$$= -k^2\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta)\sin\mathrm{am}(\alpha-\beta)\sin\mathrm{am}(\beta+\gamma)\sin\mathrm{am}(\beta-\gamma)\sin\mathrm{am}(\gamma+\alpha)\sin\mathrm{am}(\gamma-\alpha).$$

Es liegt nahe, diese Gleichung zu verallgemeinern, indem man zu den Elementen α, β, γ ein viertes δ hinzutreten lässt. Im Folgenden bedienen wir uns für sinam cosam, tangam, Δam der kürzeren Schreibweise sn, cn, tn, dn.

Setzt man nun

$$\mathrm{sn}^2\alpha = x, \quad \mathrm{sn}^2\beta = y, \quad \mathrm{sn}^2\gamma = z, \quad \mathrm{sn}^2\delta = w,$$

so ist bekanntlich

$$\mathrm{sn}(\alpha+\beta)\mathrm{sn}(\alpha-\beta) = \frac{x-y}{1-k^2xy},$$
$$\mathrm{sn}(\beta+\gamma)\mathrm{sn}(\beta-\gamma) = \frac{y-z}{1-k^2yz},$$
$$\mathrm{sn}(\gamma+\delta)\mathrm{sn}(\gamma-\delta) = \frac{z-w}{1-k^2zw},$$
$$\mathrm{sn}(\delta+\alpha)\mathrm{sn}(\delta-\alpha) = \frac{w-x}{1-k^2wx}.$$

Addirt man diese vier Gleichungen und bringt rechts die Brüche auf den gemeinsamen Nenner

$$N = (1-k^2xy)(1-k^2yz)(1-k^2zw)(1-k^2wx),$$

so findet man für den Zähler den Ausdruck

$$Z = -k^2(xy^2-x^2y+x^2w-xw^2+yz^2-y^2z+zw^2-z^2w)$$
$$+k^4(x^2y^2w-x^2y^2z+y^2z^2x-y^2z^2w+z^2w^2y-z^2w^2x+w^2x^2z-w^2x^2y)$$
$$= -k^2\cdot A+k^4\cdot B,$$

wo A und B die beiden Klammergrössen in Z bedeuten. Man verificirt leicht

$$A = (x-y)(y-z)(z-w)+(y-z)(z-w)(w-x)$$
$$+(z-w)(w-x)(x-y)+(w-x)(x-y)(y-z);$$
$$B = wx(x-y)(y-z)(z-w)+xy(y-z)(z-w)(w-x)$$
$$+yz(z-w)(w-x)(x-y)+zw(w-x)(x-y)(y-z).$$

Wir erhalten somit als Summe der rechten Seiten obiger vier Gleichungen

$$\frac{Z}{N} = -k^2\left\{\frac{(x-y)(y-z)(z-w)}{(1-k^2xy)(1-k^2yz)(1-k^2zw)}+\frac{(y-z)(z-w)(w-x)}{(1-k^2yz)(1-k^2zw)(1-k^2wx)}\right.$$
$$\left.+\frac{(z-w)(w-x)(x-y)}{(1-k^2zw)(1-k^2wx)(1-k^2xy)}+\frac{(w-x)(x-y)(y-z)}{(1-k^2wx)(1-k^2xy)(1-k^2yz)}\right\}.$$

Nun ist

$$\frac{(x-y)(y-z)(z-w)}{(1-k^2xy)(1-k^2yz)(1-k^2zw)} =$$
$$\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta) \quad \text{u. s. f.}$$

Bezeichnet nun $\overset{4}{\Sigma} f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ eine Summe von vier Gliedern, von denen jedes folgende aus dem vorhergehenden durch cyklische Vertauschung der Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erhalten wird, so haben wir demnach folgende Fundamentalformel:

$$(1.)\quad \begin{cases} \overset{4}{\Sigma}\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta) = \\ \qquad -k^2\overset{4}{\Sigma}\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta). \end{cases}$$

Für $\gamma = \delta$ erhält man die Formel von *Richelot* und, wenn überdies $\alpha+\beta = a$, $\alpha-\beta = b$, $\gamma+\alpha = u+a+b$ gesetzt wird, die Formel *Jacobis*. Letztere kann aus Gleichung (1.) auch direct erhalten werden, wenn

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(a+b); \quad \beta = \tfrac{1}{2}(a-b); \quad \gamma = u+\tfrac{1}{2}(a+b); \quad \delta = -\tfrac{1}{2}(a+b)$$

gesetzt wird.

In Gleichung (1.) erscheinen auf der linken Seite die Summe und Differenz je zweier Elemente als Argumente. Man kann nun leicht eine

Formel herstellen, worin in jedem Gliede links je zwei Summen mit je zwei Differenzen der Elemente als Argumente auftreten. Man setze nämlich

$$\begin{aligned}\alpha' &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta),\\ \beta' &= \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma-\delta),\\ \gamma' &= \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma-\delta),\\ \delta' &= \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma+\delta);\end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= \alpha'+\beta', & \alpha-\beta &= \gamma'+\delta',\\ \beta+\gamma &= -(\delta'-\alpha'), & \beta-\gamma &= \beta'-\gamma',\\ \gamma+\delta &= \alpha'-\beta', & \gamma-\delta &= \gamma'-\delta',\\ \delta+\alpha &= \delta'+\alpha', & \delta-\alpha &= -(\beta'+\gamma'),\end{aligned}$$

und die Gleichung (1.) lautet nach Weglassung der Indices

$$(2.)\quad\left\{\begin{aligned}&\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)-\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\\ &+\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)-\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)=\\ &k^2\{\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)\\ &-\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)\\ &+\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\gamma-\delta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\\ &-\operatorname{sn}(\delta+\alpha)\operatorname{sn}(\delta-\alpha)\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\delta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\}.\end{aligned}\right.$$

Macht man $\gamma=\delta$, so ergiebt Gleichung (2.)

$$\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\alpha)+\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)-\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}2\gamma=\\ k^2\operatorname{sn}(\beta+\gamma)\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\gamma+\alpha)\operatorname{sn}(\gamma-\alpha)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}2\gamma,$$

und für $\gamma+\alpha=-a$, $\gamma-\alpha=-b$, $\beta+\gamma=u$:

$$\operatorname{sn}a\operatorname{sn}u+\operatorname{sn}b\operatorname{sn}(u+a+b)-\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+b)=\\ k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+b)\operatorname{sn}(u+a+b).$$

Setzt man aber $\gamma+\alpha=-b$, $\gamma-\alpha=-a$, $\beta+\gamma=u$, so folgt

$$\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u+\operatorname{sn}a\operatorname{sn}(u+a+b)-\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+a)=\\ k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+a+b),$$

sodass in den beiden letzten Gleichungen a und b vertauscht erscheinen.

Die Summe beider Gleichungen giebt

$$(\operatorname{sn}a+\operatorname{sn}b)\{\operatorname{sn}u+\operatorname{sn}(u+a+b)\}-\operatorname{sn}(a+b)\{\operatorname{sn}(u+a)+\operatorname{sn}(u+b)\}=\\ k^2\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{sn}u\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn}(u+a+b)\{\operatorname{sn}(u+a)+\operatorname{sn}(u+b)\},$$

somit

$$(3.)\quad \left\{ \frac{\operatorname{sn} a+\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn}(a+b)} \cdot \frac{\operatorname{sn} u+\operatorname{sn}(a+b+u)}{\operatorname{sn}(a+u)+\operatorname{sn}(b+u)} = 1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b+u). \right.$$

Wird in dieser Gleichung $-u$ für u gesetzt, so giebt der Quotient beider die neue Relation

$$\frac{1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b-u)}{1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b+u)} = \frac{\operatorname{sn}(a+b-u)-\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}(a+b+u)+\operatorname{sn} u} \cdot \frac{\operatorname{sn}(a+u)+\operatorname{sn}(b+u)}{\operatorname{sn}(a-u)+\operatorname{sn}(b-u)}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung tritt bekanntlich im Additionstheorem der Integrale dritter Gattung auf; es ist nämlich nach *Jacobi*'s Bezeichnung

$$\Pi_1(a, u)+\Pi_1(b, u)-\Pi_1(a+b, u) = \tfrac{1}{2}\log \frac{1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b-u)}{1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b+u)},$$

also auch

$$\Pi_1(a, u)+\Pi_1(b, u)-\Pi_1(a+b, u) = \tfrac{1}{2}\log \frac{\operatorname{sn}(a+u)+\operatorname{sn}(b+u)}{\operatorname{sn}(a-u)+\operatorname{sn}(b-u)} \cdot \frac{\operatorname{sn}(a+b-u)-\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn}(a+b+u)+\operatorname{sn} u}.$$

Uebrigens lässt die rechte Seite der beiden letzten Gleichungen mit Hülfe von Gleichung (1.) sich noch auf mannigfache Weise darstellen.

Schreibt man in Gleichung (1.) αi, βi, γi, δi für α, β, γ, δ und vertauscht, um den Modul nicht anmerken zu müssen, k mit k', so folgt wegen $\operatorname{sn}(i\alpha, k) = i\operatorname{tn}(\alpha, k')$

$$(4.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{4}{\Sigma} \operatorname{tn}(\alpha+\beta)\operatorname{tn}(\alpha-\beta) = \\ \qquad -k'^2 \overset{4}{\Sigma} \operatorname{tn}(\alpha+\beta)\operatorname{tn}(\alpha-\beta)\operatorname{tn}(\beta+\gamma)\operatorname{tn}(\beta-\gamma)\operatorname{tn}(\gamma+\delta)\operatorname{tn}(\gamma-\delta). \end{array} \right.$$

Aus Gleichung (1.) lassen sich durch Specialisirung der Grössen α, β, γ, δ oder Vermehrung derselben um $\frac{1}{2}K$ oder $\frac{1}{2}iK'$, wo K und K' die Perioden bedeuten, viele Formeln gewinnen, die in der Theorie der elliptischen Functionen Verwendung finden.

Für $k = 0$ gehen die elliptischen Transcendenten in die gewöhnlichen goniometrischen Functionen über und die Gleichungen (1.) und (4.) werden

$$\overset{4}{\Sigma} \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = 0;$$

$$\overset{4}{\Sigma} \operatorname{tang}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}(\alpha-\beta) =$$

$$-\overset{4}{\Sigma} \operatorname{tang}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}(\alpha-\beta)\operatorname{tang}(\beta+\gamma)\operatorname{tang}(\beta-\gamma)\operatorname{tang}(\gamma+\delta)\operatorname{tang}(\gamma-\delta),$$

Relationen, welche mit Hülfe der Formeln

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha-\sin^2\beta,$$

$$\operatorname{tang}(\alpha+\beta)\operatorname{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha-\operatorname{tang}^2\beta}{1-\operatorname{tang}^2\alpha\operatorname{tang}^2\beta}$$

leicht zu verificiren sind.

Aus Gleichung (1.) lässt sich noch eine merkwürdige Beziehung herleiten, wenn man die elliptischen Transcendenten durch die entsprechenden ϑ-Quotienten darstellt.

Sind nämlich die Grössen p, q, r, s und p', q', r', s' durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} p' &= \tfrac{1}{2}(p+q+r+s), \\ q' &= \tfrac{1}{2}(p+q-r-s), \\ r' &= \tfrac{1}{2}(p-q+r-s), \\ s' &= \tfrac{1}{2}(p-q-r+s), \end{aligned}$$

verbunden, so besteht zwischen den ϑ-Functionen die Relation

$$\vartheta_0(p)\vartheta_0(q)\vartheta_0(r)\vartheta_0(s)+\vartheta_1(p)\vartheta_1(q)\vartheta_1(r)\vartheta_1(s) = \\ \vartheta_3(p')\vartheta_3(q')\vartheta_3(r')\vartheta_3(s')-\vartheta_2(p')\vartheta_2(q')\vartheta_2(r')\vartheta_2(s').$$

Wählt man nun p, q, r, s derart, dass die Argumente p', q', r', s' mit denselben identisch werden, wozu erforderlich ist, dass $p-q = r+s$ sei, so hat jedes Glied der obigen ϑ-Formel dieselben Argumente. Ein Werthesystem, welches der eben genannten Forderung entspricht, ist aber offenbar das folgende:

$$p = \alpha+\beta, \qquad q = \alpha-\beta, \qquad r = \beta+\gamma, \qquad s = \beta-\gamma$$

und wir haben daher die ϑ-Formel

$$\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)+\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)\vartheta_1(\beta+\gamma)\vartheta_1(\beta-\gamma) = \\ \vartheta_3(\alpha+\beta)\vartheta_3(\alpha-\beta)\vartheta_3(\beta+\gamma)\vartheta_3(\beta-\gamma)-\vartheta_2(\alpha+\beta)\vartheta_2(\alpha-\beta)\vartheta_2(\beta+\gamma)\vartheta(\beta-\gamma).$$

Beachtet man nun, dass allgemein

$$\frac{\vartheta_1(u)}{\vartheta_0(u)} = \sqrt{k}\cdot\operatorname{sn}u; \quad \frac{\vartheta_2(u)}{\vartheta_0(u)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\operatorname{cn}u; \quad \frac{\vartheta_3(u)}{\vartheta_0(u)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\cdot\operatorname{dn}u$$

ist, so lässt sich Gleichung (1.) in folgender Form schreiben

$$\sum^{4} \frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)}{\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)}\left\{1+\frac{\vartheta_1(\beta+\gamma)\vartheta_1(\beta-\gamma)\vartheta_1(\gamma+\delta)\vartheta_1(\gamma-\delta)}{\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)\vartheta_0(\gamma+\delta)\vartheta_0(\gamma-\delta)}\right\} = 0$$

oder mit Rücksieht auf die obige ϑ-Formel

$$\sum^4 \frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)}{\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\vartheta_3(\beta+\gamma)\vartheta_3(\beta-\gamma)\vartheta_3(\gamma+\delta)\vartheta_3(\gamma-\delta)}{\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)\vartheta_0(\gamma+\delta)\vartheta_0(\gamma-\delta)} =$$

$$\sum^4 \frac{\vartheta_1(\alpha+\beta)\vartheta_1(\alpha-\beta)}{\vartheta_0(\alpha+\beta)\vartheta_0(\alpha-\beta)} \cdot \frac{\vartheta_2(\beta+\gamma)\vartheta_2(\beta-\gamma)\vartheta_2(\gamma+\delta)\vartheta_2(\gamma-\delta)}{\vartheta_0(\beta+\gamma)\vartheta_0(\beta-\gamma)\vartheta_0(\gamma+\delta)\vartheta_0(\gamma-\delta)}.$$

Geht man wieder auf elliptische Functionen zurück, so ist

$$(5.)\quad \begin{cases} \sum^4 \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}(\beta+\gamma)\operatorname{dn}(\beta-\gamma)\operatorname{dn}(\gamma+\delta)\operatorname{dn}(\gamma-\delta) = \\ k^2 \sum^4 \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}(\beta+\gamma)\operatorname{cn}(\beta-\gamma)\operatorname{cn}(\gamma+\delta)\operatorname{cn}(\gamma-\delta). \end{cases}$$

Die Richtigkeit der Gleichung (5.) kann an speciellen Fällen leicht erprobt werden.

Setzt man in ihr $\beta=\gamma=\delta$, so folgt nach einigen leichten Reductionen

$$\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\operatorname{dn}2\beta - k^2\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\operatorname{cn}2\beta = k'^2.$$

Vertauscht man hierin α mit β und subtrahirt beide Gleichungen, so ist

$$\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)\{\operatorname{dn}2\alpha-\operatorname{dn}2\beta\} = k^2\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)\{\operatorname{cn}2\alpha-\operatorname{cn}2\beta\},$$

somit

$$(6.)\quad \frac{\operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta)} = k^2\frac{\operatorname{cn}2\alpha-\operatorname{cn}2\beta}{\operatorname{dn}2\alpha-\operatorname{dn}2\beta}.$$

Für $\beta=0$ folgt die leicht zu verificirende Formel

$$\frac{1-\operatorname{cn}2\alpha}{1-\operatorname{dn}2\alpha} = \frac{1}{k^2}\cdot\frac{\operatorname{dn}^2\alpha}{\operatorname{cn}^2\alpha}.$$

Setzt man in (6.) $k=0$, so muss also

$$\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = (\cos 2\alpha-\cos 2\beta)\left\{\frac{k^2}{\operatorname{dn}2\alpha-\operatorname{dn}2\beta}\right\}_{k=0}$$

eine richtige Gleichung sein. Die Klammergrösse nimmt für $k=0$ die Form $\frac{0}{0}$ an; das gewöhnliche Verfahren liefert

$$\left(\frac{k^2}{\operatorname{dn}2\alpha-\operatorname{dn}2\beta}\right)_0 = \left[\frac{2k}{\frac{-k\operatorname{sn}^2 2\alpha}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\alpha}} - \frac{-k\operatorname{sn}^2 2\beta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2 2\beta}}}\right]_{k=0} = -\frac{2}{\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\beta}$$

und es ist in der That

$$\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} = -2\frac{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}{\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\beta}.$$

Vertauscht man in Gleichung (6.) α, β, k mit αi, βi, k', so folgt

$$(7.)\qquad \operatorname{dn}(\alpha+\beta)\operatorname{dn}(\alpha-\beta) = k'^2\frac{\operatorname{cn}2\alpha-\operatorname{cn}2\beta}{\operatorname{cn}2\alpha\operatorname{dn}2\beta-\operatorname{cn}2\beta\operatorname{dn}2\alpha}.$$

Aus der Verbindung von (6.) und (7.) ergiebt sich weiter

$$(8.)\qquad \operatorname{cn}(\alpha+\beta)\operatorname{cn}(\alpha-\beta) = \frac{k'^2}{k^2}\cdot\frac{\operatorname{dn}2\alpha-\operatorname{dn}2\beta}{\operatorname{cn}2\alpha\operatorname{dn}2\beta-\operatorname{cn}2\beta\operatorname{dn}2\alpha}.$$

Aus Gleichung (5.) lassen sich noch mehrere ähnliche Formeln herleiten, wenn man sie erst durch Einführung imaginärer Argumente oder Vermehrung der letzteren um halbe Perioden transformirt.