Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de *Gauss*.

(Par M. *P. Appell* à St. Germain-en-Laye.)

Nous avons dans le tome 121 de ce Journal, p. 310, publié un Mémoire *Sur une forme générale des équations de la dynamique,* au sujet duquel nous demandons la permission de présenter deux remarques complémentaires, l'une d'ordre mathématique, l'autre d'ordre bibliographique sur le principe de la moindre contrainte de *Gauss.*

1.

Quand les liaisons d'un système sans frottement peuvent être exprimées en termes finis et quand on emploie des paramètres qui sont de véritables coordonnées, les équations de *Lagrange* sont applicables. Supposons, pour simplifier qu'il existe une fonction des forces U. On peut alors écrire les équations du mouvement dès que l'on connaît les expressions de la demi force vive T et de U en fonction des paramètres indépendants.

Si, au contraire, les liaisons ne peuvent pas s'exprimer toutes par des relations en termes finis, on ne peut plus appliquer les équations de *Lagrange;* pour écrire les équations du mouvement il suffit de connaître U et la fonction $S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2$ composée avec les accélérations comme T avec les vitesses. Mais cela est-il nécessaire?

Ne pourrait-il pas exister des équations du mouvement, plus générales que celles de *Lagrange,* applicables à tous les cas et n'exigeant pour être écrites que la connaissance des deux fonctions T et U? Nous allons montrer que de telles équations n'existent pas. Pour cela nous indiquerons deux systèmes différents dans lesquels les fonctions T et U sont identiquement les mêmes, sans que, cependant, les équations du mouvement soient les mêmes.

Premier système. Imaginons un solide pesant qui remplisse les conditions suivantes:

1°. le solide est terminé par une arête vive ayant la forme d'un cercle K de rayon a;

2°. le centre de gravité G du corps est situé au centre du cercle K;

3°. l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité G est de révolution autour de la perpendiculaire Gz au plan du cercle.

Supposons ensuite que le corps solide ainsi constitué soit assujetti à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, qu'il touche par l'arête circulaire K.

Soit $G\alpha$ la verticale ascendante menée par G, prenons comme axe Gy la perpendiculaire au plan αGz et comme axe Gx la perpendiculaire au plan yGz : Gy est alors une horizontale du plan du cercle K et Gx une ligne de plus grande pente de ce plan aboutissant au point par lequel le cercle touche le plan fixe. Désignons par Θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante $G\alpha$ et par ψ l'angle de Gy avec une horizontale fixe. Ces deux angles déterminent l'orientation du trièdre $Gxyz$. Pour fixer la position du corps solide par rapport au trièdre $Gxyz$, il suffit de connaître l'angle φ que fait un rayon du cercle K, invariablement lié au corps, avec l'axe Gy. La rotation instantanée ω du corps est alors la résultante de la rotation du trièdre et d'une rotation $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$ autour de Gz. Les composantes p, q, r de ω sont donc:

$$p = -\psi' \sin\Theta, \qquad q = \Theta', \qquad r = \psi' \cos\Theta + \varphi'.$$

D'autre part, la condition que le cercle K roule montre que le carré de la vitesse du centre de gravité G est $a^2(q^2+r^2)$. En définitive, en prenant la masse du corps comme unité et appelant A et C les moments d'inertie par rapport à Gx et Gz, on a

$$2T = a^2(q^2+r^2) + A(p^2+q^2) + Cr^2$$

d'où, pour l'expression définitive des fonctions T et U

$$(1.) \qquad \begin{cases} 2T = A\psi'^2 \sin^2\Theta + (A+a^2)\Theta'^2 + (C+a^2)(\psi'\cos\Theta+\varphi')^2, \\ U = -ga\sin\Theta. \end{cases}$$

Deuxième système. Soit un deuxième corps pesant, de même forme, de même rayon a et de même masse que le précédent. Imaginons que la distribution de la masse soit différente, de telle façon qu'en appelant A_1 et C_1

les moments d'inertie analogues à A et C, on ait

$$A_1 = A, \qquad C_1 = C + a^2.$$

Assujettissons ce corps aux deux liaisons suivantes: le corps touche, par l'arête circulaire K, un plan horizontal fixe P_1 sur lequel il peut glisser sans frottement; le centre de gravité G du corps glisse sans frottement sur une circonférence verticale fixe dont le rayon est a et dont le centre O est dans le plan fixe P_1.

Pour exprimer ces liaisons, prenons les mêmes axes mobiles $Gxyz$ et les mêmes notations que plus haut; appelons x_1, y_1, z_1, les coordonnées absolues du point G par rapport à deux axes Ox_1 et Oy_1, du plan P_1, et une verticale ascendante Oz_1. On peut supposer que la circonférence verticale fixe, décrite par G, est dans le plan x_1Oz_1; on a alors

$$\textit{première liaison:}\ z_1 = a\sin\Theta$$

$$\textit{deuxième:}\ y_1 = 0, \quad x_1^2 + z_1^2 = a^2,$$

d'où évidemment

$$x_1 = a\cos\Theta.$$

On a, dans ces conditions,

$$2T_1 = x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 + A_1(p^2+q^2) + C_1 r^2$$

ou, d'après les valeurs de x_1, y_1, z_1, A_1 et C_1,

$$(2.)\qquad \begin{cases} 2T_1 = A\psi'^2\sin^2\Theta + (A+a^2)\Theta'^2 + (C+a^2)(\psi'\cos\Theta+\varphi')^2, \\ U_1 = -ga\sin\Theta. \end{cases}$$

On voit que les fonctions T et T_1, U et U_1 sont identiques: cependant les équations du mouvement sont différentes, car les équations de *Lagrange* s'appliquent au deuxième système et ne s'appliquent pas au premier. C'est ce que nous voulions montrer.

On peut remarquer que, sur les trois équations du mouvement, deux peuvent être amenées à avoir la même forme dans les deux systèmes: en effet l'intégrale des forces vives est évidemment la même pour les deux; de plus, comme l' a déjà montré *Slesser* dans un article du Quarterly Journal of Mathematics (1873), on a le droit d'écrire pour le premier système l'équation de *Lagrange* relative à Θ, ce qu'on peut faire évidemment pour le deuxième. Mais les troisièmes équations sont différentes dans les deux mouvements: pour le deuxième système on a l'intégrale $r = r_0$ qui n'existe pas pour le premier.

Il va de soi que la différence entre les deux mouvements apparaît immédiatement si l'on forme les deux fonctions S et S_1, en appliquant les formules de notre précédent mémoire. (Voyez également Journal de Mathématiques pures et appliquées, premier fascicule 1900.)

2.

Indications bibliographiques. Nous avons, à la fin, du précédent Mémoire donné quelques indications très rapides et très incomplètes sur l'énoncé analytique du principe de *Gauss*. Nous devons à l'obligeance de M. *A. Mayer* de Leipzig les renseignements historiques et bibliographiques suivants. L'énoncé analytique du principe de *Gauss* a déjà été indiqué par *Jacobi* dans une leçon qui n'a pas encore été publiée; il a été donné, indépendamment de *Jacobi*, par *Scheffler* (III. Band der *Schlömilch*schen Z., p. 197). Il se trouve reproduit dans *Mach (Die Mechanik in ihrer Entstehung historisch-kritisch dargestellt,* Leipzig 1883), dans *Hertz* que nous avions cité, dans *Boltzmann (Vorlesungen über die Principe der Mechanik,* Leipzig 1897). Enfin M. *Willard Gibbs* dans un beau travail: *On the fundamental formulae of Dynamics (American Journal of Mathematics, Vol. II,* 1879) a donné, de cet énoncé analytique du principe de *Gauss,* des applications à divers problèmes, notamment à la question de la rotation des corps solides.