Ueber die Gruppirungen der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung.

(Von Herrn *H. E. Timerding* in Strassburg i. E.)

Die viel bearbeitete Theorie der Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung hat in jüngster Zeit Herr *Ciani* wesentlich weitergeführt,[1]) indem er, in vielen Punkten an die Untersuchungen von *de Paolis*[2]) anknüpfend, insbesondere den glücklichen Gedanken verfolgte, zur Betrachtung der Doppeltangenten die *Kummer*sche Configuration von 16 Punkten und 16 Ebenen heranzuziehen, wobei er sich hauptsächlich auf die grosse Arbeit von *Caporali* über diese Configuration[3]) stützte. Den zahlreichen älteren Abhandlungen, die mit denen von *Steiner, Hesse* und *Aronhold*[4]) beginnen, ist damit so viel neues Material hinzugefügt, dass es nicht aussichtslos scheint, eine möglichst vollständige und systematische Uebersicht über die verschiedenen Gruppirungen der Doppeltangenten zu versuchen. Hierbei wird es sich empfehlen, eine Unterscheidung überall durchzuführen, für die Herr *Frobenius* zuerst die treffende Bezeichnung gefunden hat,[5]) indem er die Worte syzygetisch und azygetisch gebraucht. Dieselben werden anscheinend in doppeltem Sinne angewandt, einmal als Eigenschaft einer Gruppe von

[1]) Rendiconti del R. Istituto Lombardo 1895, 1898. Annali di Matematica, Serie III, tomo II, 1898.

[2]) La trasformazione piana doppia di terzo ordine e la sua applicazione alle curve del quarto ordine. Memorie dell' Accademia dei Lincei, Serie III, t. II, 1878.

[3]) Memorie della R. Accademia dei Lincei, anno CCLXXV Memorie di Geometria, pag. 80.

[4]) *Steiner* und *Hesse* in Band 49 dieses Journals, *Aronhold* in den Monatsberichten der Berliner Akademie, Juli 1864. Wegen der Beziehungen zur Charakteristikentheorie der Thetafunctionen von drei Veränderlichen sehe man insbesondere *H. Weber*, Theorie der *Abel*schen Functionen vom Geschlecht Drei. Berlin 1876.

[5]) Dieses Journal, Band 99.

Doppeltangenten, das andere Mal, um eine gegenseitige Beziehung zweier Gruppen auszudrücken. Die eine Bedeutung fliesst aber mit Nothwendigkeit aus der anderen.

Besondere Beachtung verdienen die Gruppen von Doppeltangenten, die aus ebensoviel Untergruppen bestehen, wie diese Untergruppen Linien zählen, und die sich noch auf eine zweite Art in Untergruppen von derselben Linienzahl zerlegen lassen, sodass aus jeder Untergruppe der einen Zerlegung *eine* Linie in jede Untergruppe der anderen Zerlegung eingeht und die Linien in den Untergruppen der einen Zerlegung so durch die andere Zerlegung eindeutig einander zugeordnet werden. Dies sind genau dieselben Verhältnisse, wie sie beispielsweise obwalten, wenn man als Elemente die Berührungsebenen einer quadratischen Regelfläche ansieht. Diese Ebenen lassen sich auf zwei Arten in eine Schar von Ebenenbüscheln zerlegen, jedes Ebenenbüschel der einen Schar enthält eine Ebene aus jedem Ebenenbüschel der anderen Schar, und die Ebenenbüschel der einen Schar sind durch die Ebenenbüschel der anderen Schar projectiv auf einander bezogen. Im vorliegenden Falle ist die Anzahl der Elemente stets eine endliche und zwar nothwendig eine Quadratzahl. Eine der wichtigsten dieser Gruppen bilden eben solche 16 Doppeltangenten, die, wenn man die ebene Curve vierter Ordnung als Schnittlinie einer *Kummer*schen Fläche ansieht, die Schnitte mit den Doppelebenen dieser Fläche bilden. Ueberhaupt giebt diese Auffassung der Curve vierter Ordnung für eine Reihe der folgenden Sätze den Beweis und das tiefere Verständniss. Andere lassen sich in der *Geiser*schen Weise*) durch die Projection der geraden Linien einer Fläche dritter Ordnung aus einem beliebigen Flächenpunkte auf eine Ebene herleiten. Diese Herleitung der einzelnen Sätze genauer zu verfolgen, wäre aber unmöglich gewesen, ohne den Umfang dieses Aufsatzes über Gebühr zu erweitern. Ueberdies lassen sich alle Sätze, die sich lediglich auf die Gruppirungen der Doppeltangenten beziehen, durch eine Art Induction erkennen, indem man die Doppeltangenten in der *Hesse*schen Weise mit den Verbindungslinien von acht assoziirten Punkten in Beziehung bringt, ohne dass die Strenge des Nachweises dadurch leidet. Im Gegentheil lässt diese Methode die besondere Eigenart der Sätze noch klarer hervortreten.

Es bedarf zum Schlusse wohl keiner Rechtfertigung, dass das Wort

*) *Geiser* im 1. Bande der Mathematischen Annalen.

Gruppe bei diesen rein geometrischen Untersuchungen in einem anderen Sinne gebraucht wird, als es die Algebra zulässt, um so weniger als, wo der algebraische Begriff der Gruppe in die Geometrie eintritt, er sich immer unter diesen allgemeineren subsumiren lässt.

1.

Aus den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung lassen sich 378 Paare bilden. Diese 378 Paare theilen sich aber in 63 Gruppen von je 6 Paaren, die als zerfallende Curven demselben Netze von Kegelschnitten angehören. Eine solche Gruppe von sechs Paaren wollen wir eine *Steiner*sche Paarsechs nennen.

Die Berührungspunkte von je zwei Paar Doppeltangenten derselben Paarsechs liegen auf einem Kegelschnitte. Also liegen die sechs Berührungspunkte von drei Doppeltangenten auf einem Kegelschnitte, wenn zwei derselben ein Paar in einer Paarsechs bilden und derselben Paarsechs die dritte Doppeltangente angehört. Greift man aber aus einer Paarsechs drei Doppeltangenten heraus, von denen in ihr keine zwei ein Paar bilden, so liegen deren Berührungspunkte auch nie auf einem Kegelschnitte.

Im ersteren Falle heisst nach *Frobenius* das Tripel der Doppeltangenten syzygetisch, im letzteren Falle azygetisch.

(1.) Mit zwei gegebenen Doppeltangenten bilden 10 andere ein syzygetisches und 16 ein azygetisches Tripel. Die ersteren 10 Doppeltangenten bilden mit den beiden gegebenen die Paarsechs, der diese als ein Paar angehören. Von den letzteren 16 Doppeltangenten aber bildet jede ein azygetisches Tripel mit allen Paaren dieser Paarsechs.

Es giebt sonach 1260 syzygetische und 2016 azygetische Tripel.

Man nennt allgemeiner azygetisch eine Gruppe von Doppeltangenten, wenn von keinen drei unter ihnen die Berührungspunkte auf einem Kegelschnitte liegen, wenn sie also, zu dreien zusammengefasst, lauter azygetische Tripel bilden.

(2.) Eine azygetische Gruppe kann höchstens aus 7 Doppeltangenten bestehen. Durch solche 7 Doppeltangenten ist die Curve vierter Ordnung eindeutig bestimmt, und aus ihnen lassen sich die übrigen

21 Doppeltangenten linear ableiten. Eine solche Gruppe heisst nach ihrem Entdecker eine *Aronhold*sche Sieben. Es giebt deren 288.

Für die azygetischen Gruppen von geringerer Linienzahl gilt der Satz:

(3.) Eine Gruppe von 3 bis 6 Doppeltangenten aus einer Paarsechs ist dann und nur dann azygetisch, wenn sie kein Paar dieser Paarsechs enthält.

Zwei Paarsechs haben entweder vier oder sechs Doppeltangenten mit einander gemein. Im letzteren Falle bilden die 12 Doppeltangenten aus ihnen beiden, welche sie nicht gemein haben, eine neue Paarsechs, und wir nennen das Tripel dieser Paarsechs, ebenso wie irgend zwei von ihnen, ***azygetisch.*** Im ersteren Falle enthält noch eine dritte Paarsechs dieselben vier Doppeltangenten, welche die ersten beiden gemein haben, und wir sprechen dann von einem ***syzygetischen*** Paarsechstripel. In einem solchen sind immer alle 28 Doppeltangenten enthalten. Aus vier syzygetischen Doppeltangenten lassen sich auf drei Arten zwei Paare bilden, die jedesmal ***einer*** Paarsechs angehören. Die drei Paarsechs, die man so erhält, bilden das entsprechende syzygetische Tripel.

Liegt nun eine Paarsechs vor, und man greift aus ihr irgend zwei Paare heraus, so findet man zu dem syzygetischen Quadrupel, das sie bilden, noch zwei Paarsechs, die mit der vorgelegten Paarsechs ein syzygetisches Paarsechstripel ausmachen. Diese beiden Paarsechs theilen aber die 16 Doppeltangenten, die nach Ausschluss der ersten Paarsechs übrig bleiben und die wir als eine *Kummer*sche Gruppe bezeichnen wollen, in zwei Hälften.

(4.) Die 16 Doppeltangenten einer *Kummer*schen Gruppe lassen sich auf 15 verschiedene Arten in zweimal 8 zerfällen, die durch dasselbe syzygetische Quadrupel aus der zugehörigen Paarsechs zu je einer neuen Paarsechs ergänzt werden, so dass die drei Paarsechs zusammen ein syzygetisches Tripel bilden.

Diesem Satze lässt sich noch eine andere bemerkenswerthe Form geben:

(5.) Sucht man in einer *Kummer*schen Gruppe die Doppeltangenten auf, welche zwei, nicht als ein Paar zusammengehörige Doppeltangenten der entsprechenden Paarsechs zu einem syzygetischen oder azygetischen Tripel ergänzen, so zerfällt die Gruppe auf diese Weise in zweimal 8 Doppeltangenten. Diese Zerfällung ist aber dieselbe für alle vier Paare, die sich aus einem syzygetischen Quadrupel der Paarsechs, ausser den Paaren dieser Paarsechs selbst, bilden lassen, und zwar werden zwei Paare, die zusammen das ganze Quadrupel erschöpfen, durch *dieselben* Doppeltangenten zu syzygetischen oder azygetischen Tripeln ergänzt, von zwei Paaren aber, die eine Doppeltangente gemein haben, wird durch dieselbe neue Doppeltangente das eine zu einem azygetischen, das andere zu einem syzygetischen Tripel ergänzt.

So erhält man 15 Zerfällungen der *Kummer*schen Gruppe in zweimal 8, welche mit denen des vorigen Satzes identisch sind.

Liegt ein syzygetisches Paarsechstripel vor, so gehört jedes syzygetische Quadrupel, dessen Doppeltangenten alle nur in einer der drei Paarsechs enthalten sind, noch zu zwei weiteren Paarsechs, die wieder mit den übrigen beiden Paarsechs des vorgelegten Paarsechstripels je vier Doppeltangenten gemein haben und zusammen von ihnen alle Linien mit Ausnahme der gemeinsamen Doppeltangenten enthalten. Zu jedem syzygetischen Paarsechstripel gehören so zwölf weitere Paarsechs, die mit jeder Paarsechs des Tripels ein Quadrupel gemein haben, und jedes syzygetische Quadrupel, das zu einer und nur zu einer Paarsechs des Tripels gehört, ist zugleich in zweien dieser zwölf neuen Paarsechs enthalten.

Wenn man nun zu drei syzygetischen Quadrupeln, die zusammen eine Paarsechs bilden, jedesmal noch die übrigen beiden Paarsechs aufsucht, in denen sie enthalten sind, so sind alle diese Paarsechs syzygetisch, und zwar haben sie zu je dreien dasselbe syzygetische Quadrupel gemein. Denn die dritte Paarsechs, die das irgend zweien der sechs Paarsechs gemeinsame Quadrupel enthält, muss auch eines der vorgelegten drei Quadrupel in sich begreifen, also selbst zu den sechs Paarsechs gehören.

(6.) Die 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung lassen sich auf 135 Arten in 7 syzygetische Quadrupel zerlegen, so dass zu jeder Paarsechs, die zwei dieser Quadrupel enthält, auch noch ein drittes derselben gehört. Solcher Paarsechs giebt es jedesmal 7. Sie bilden lauter syzygetische Paarsechstripel, derart, dass zu ihnen auch immer noch die dritte Paarsechs gehört, die das irgend zweien von ihnen gemeinsame Quadrupel enthält. Jedes der 7 syzygetischen Quadrupel bildet die Basis eines dieser syzygetischen Paarsechstripel.

Folgendes ist nur eine andere Formulirung desselben Satzes:

(7.) Die 16 Doppeltangenten einer *Kummer*schen Gruppe lassen sich auf 15 verschiedene Arten in vier syzygetische Quadrupel zerfällen, entsprechend den 15 Arten, auf die sich die zugehörige Paarsechs in drei syzygetische Quadrupel zertheilen lässt. Fasst man bei jeder Zerfällung die vier Quadrupel der *Kummer*schen Gruppe paarweise zusammen, was jedesmal auf drei Arten geschehen kann, so bilden diese Quadrupelpaare zusammen mit einem und demselben Quadrupel der zu der *Kummer*schen Gruppe gehörigen Paarsechs je eine neue Paarsechs.

Indem man in der eben angegebenen Weise die syzygetischen Quadrupel in einer *Kummer*schen Gruppe zu zweien zusammennimmt, gelangt man wieder zu den Zerfällungen dieser Gruppe in zweimal acht, oder wie wir sagen wollen, in zwei Paarvier. So erhält man aus jeder Zerfällung in Quadrupel drei Zerfällungen in Paarvier, aber andererseits gehören zu jeder dieser Zerlegungen in Paarvier drei Zerlegungen in syzygetische Quadrupel, entsprechend den drei Arten, auf die sich aus vier Paaren einer Paarsechs zwei syzygetische Quadrupel bilden lassen.

Nennen wir zwei *Kummer*sche Gruppen, die sich aus den 28 Doppeltangenten herausheben lassen, syzygetisch, wenn sie acht Doppeltangenten gemein haben, so sind sie dann und nur dann syzygetisch, wenn ihre zugehörigen Paarsechs es sind. Zu jeder Paarsechs sind aber 30 andere syzygetisch, die paarweise mit der ersten Paarsechs dasselbe Quadrupel gemein haben. Daraus folgt:

(8.) Zu jeder vorgelegten *Kummer*schen Gruppe unter den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung sind 30 andere solche Gruppen syzygetisch, die paarweise so zusammentreten, dass jeder Zerlegung der vorgelegten Gruppe in zwei Paarvier ein derartiges Gruppenpaar entspricht, indem jede der beiden Paarvier mit denselben vier Paaren aus der nach Ausschluss der vorgelegten Gruppe übrig bleibenden Paarsechs eine *Kummer*sche Gruppe des Paares bildet.

Von diesem Paare *Kummer*scher Gruppen können wir sagen, dass es mit der vorgelegten Gruppe ein syzygetisches Tripel von *Kummer*schen Gruppen bildet.

(9.) Aus drei Paarvier, d. h. Gruppen von vier Paaren derselben Paarsechs, lassen sich, wofern sie, auch zu zweien, keine einzige Doppeltangente gemein haben, drei *Kummer*sche Gruppen bilden, indem man die Paarvier zu zweien zusammennimmt. Diese drei *Kummer*schen Gruppen bilden ein syzygetisches Tripel. Sie erschöpfen alle Doppeltangenten bis auf ein syzygetisches Quadrupel, und zu jedem solchen Quadrupel gehört so ein einziges Tripel von *Kummer*schen Gruppen. Es giebt dieser Tripel sonach 315.

Als Corollar können wir den Satz hinzufügen:

(10.) Die 16 Doppeltangenten, die von zwei syzygetischen Paarsechs nach Ausschluss ihrer gemeinsamen Linien übrig bleiben, bilden immer eine *Kummer*sche Gruppe.

Endlich ergeben sich noch die Sätze:

(11.) Es existiren 60 syzygetische Paarsechstripel, die irgend ein Quadrupel aus einer vorgelegten *Kummer*schen Gruppe zur Basis haben. Aus jeder Paarsechs eines solchen Tripels gehören zwei Paare von den in ihr allein enthaltenen Doppeltangenten zur *Kummer*schen Gruppe selbst, die anderen zwei Paare zu der zugeordneten Paarsechs. Es gehören sonach von dem Paarsechstripel ausser seiner Basis zu der *Kummer*schen Gruppe sechs Paar Doppeltangenten, und die Punkte, in denen die Linien dieser einzelnen Paare sich durchschneiden, bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten *Aronhold*sche Linien sind, indem auf ihnen sich je drei Paar Doppeltangenten durchschneiden, so dass zu jedem syzygetischen Quadrupel der *Kummer*schen Gruppe ein Vierseit von *Aronhold*schen Linien gehört und zu der ganzen Gruppe 240 solche Linien.

(12.) Die viermal vier *Aronhold*schen Linien, welche so einer Zerfällung der *Kummer*schen Gruppe in vier syzygetische Quadrupel entsprechen, bilden immer eine neue *Kummer*sche Gruppe, nämlich vier syzygetische Quadrupel von Doppeltangenten einer neuen Curve vierter Ordnung, deren letzte 12 Doppeltangenten eine Paarsechs darstellen.

Die 240 *Aronhold*schen Linien einer *Kummer*schen Gruppe zerfallen also in 15 neue *Kummer*sche Gruppen.

2.

Eine Paarsechs lässt sich auf 32 verschiedene Arten in zwei azygetische Sextupel zerfällen. Hierzu nämlich ist erforderlich und hinreichend, dass bei der Zerfällung von keinem Paare der Paarsechs die Doppeltangenten beisammen bleiben. Die 32 Eintheilungen sondern sich aber in zwei streng geschiedene Gruppen von je 16. Wir haben nämlich zwei Arten von azygetischen Sextupeln zu unterscheiden, die wir der Kürze halber als *Sechs* und *Schar* charakterisiren wollen.

(13.) Als eine Schar bezeichnen wir solche sechs Doppeltangenten, die einen Kegelschnitt berühren. Ihre 12 Berührungspunkte mit der Curve vierter Ordnung liegen immer auf einer Curve dritter Ordnung, die nach einem Satze von *Frobenius* auch durch die Berührungspunkte der sechs Doppeltangenten mit dem Kegelschnitte hindurchgeht.

(14.) Die 1008 Scharen von Doppeltangenten, die es giebt, sind zu dreien einander zugeordnet, so dass von drei zusammengehörigen Scharen je zwei eine Paarsechs bilden. Umgekehrt bestimmt jedes azygetische Paarsechstripel drei Scharen von Doppeltangenten, indem die Paarsechs dieselben zu zweien gemein haben. Die 18 Doppeltangenten eines solchen Scharentripels zerfallen aber auch in 6 Linientripel, so dass jede der drei zugehörigen Paarsechs aus allen Tripeln ein Paar enthält. Wir wollen diese Gruppe von 18 Doppeltangenten darum eine *Dreisechs* nennen.

(15.) Zu jeder Sechs von Doppeltangenten gehört eine andere Sechs, die mit der ersten zusammen alle Doppeltangenten einer Paarsechs enthält und mit ihr eine Doppelsechs bildet. Beide Sechs der Doppelsechs werden durch eine und dieselbe Doppeltangente zu je einer *Aronhold*schen Sieben ergänzt. Umgekehrt erhält man aus jeder *Aronhold*schen Sieben eine Sechs, indem man irgend eine ihrer Doppeltangenten weglässt. Die Zahl der Sechs ist sonach das Siebenfache von der Zahl der *Aronhold*schen Sieben, also 2016.

Zu jeder *Aronhold*schen Sieben gehören 7 andere, die man aus der ersten erhält, indem man eine Doppeltangente unverändert lässt und die übrig bleibende Sechs durch die zugehörige Sechs (die mit ihr eine Doppelsechs bildet) ersetzt. Auf diese Weise zerfallen die 288 *Aronhold*schen Sieben in 36 Oktupel.

(16.) Keine Schar gehört ganz einer *Aronhold*schen Sieben an, aber je fünf Doppeltangenten aus einer Schar bestimmen eindeutig eine *Aronhold*sche Sieben, indem sie zu einer solchen durch ein bestimmtes Paar von Doppeltangenten ergänzt werden. Die sechs Paare, welche so zu einer Schar hinzutreten, indem sie mit je fünf Linien derselben eine *Aronhold*sche Sieben bilden, stellen aber eine Paarsechs dar, und zwar diejenige Paarsechs, durch welche die Schar zu einer Dreisechs ergänzt wird.

Aus einer Paarsechs geht durch jede Zerfällung in zwei Sechs eine Doppelsechs und durch jede Zerspaltung in zwei Scharen eine Doppelschar hervor.

(17.) Die Sechs zweier Doppelsechs, welche aus derselben Paarsechs gebildet sind, haben paarweise vier und paarweise zwei Doppeltangenten gemein, und gleiches gilt von den Scharen zweier Doppelscharen, die aus derselben Paarsechs hervorgegangen sind.

Die Sechs einer Doppelsechs und die Scharen einer Doppelschar, die aus derselben Paarsechs erzeugt sind, haben mit einander paarweise eine und paarweise fünf Doppeltangenten gemein, oder sie haben jedesmal drei Linien gemein.

(18.) Um aus einer Doppelsechs die anderen 15 Doppelsechs zu bekommen, welche dieselben 12 Doppeltangenten enthalten, vertausche man irgendwie zwei Doppeltangenten ihrer einen Sechs mit den homologen Linien der anderen Sechs. Vertauscht man irgend eine oder irgend drei Doppeltangenten der einen Sechs mit den entsprechenden der anderen Sechs, so erhält man die zugehörigen 16 Doppelscharen.

a. Eine Sechs von Doppeltangenten bestimmt eine *Kummer*sche Gruppe. Diese Gruppe nämlich bleibt übrig, wenn man von den 28 Doppeltangenten die vorgelegte Sechs und die andere, welche mit ihr eine Doppelsechs bildet, fortnimmt. Bezeichnet man nun die Linien der Sechs der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis 6, so giebt es zunächst eine bestimmte Doppeltangente (0) in der *Kummer*schen Gruppe, die zusammen mit der Sechs, oder der sie zu einer Doppelsechs ergänzenden anderen Sechs, eine *Aronhold*sche Sieben bildet. Die übrigen 15 Doppeltangenten der *Kummer*schen

Gruppe gehören auf die gleiche Weise zu den 15 Doppelsechs, welche dieselben Doppeltangenten wie die erste Doppelsechs enthalten, und können mit je zwei der Zahlen 1 bis 6 bezeichnet werden, die dann angeben, welche Linien der vorgelegten Sechs mit den homologen der zugeordneten Sechs vertauscht werden müssen, um die entsprechende neue Doppelsechs zu gewinnen.

Unter den 16 Doppeltangenten der *Kummer*schen Gruppe berühren 16 Scharen von sechs Linien je einen Kegelschnitt. Jede dieser Scharen gehört einer Dreisechs an, die unter ihren 18 Doppeltangenten auch die Linien der vorgelegten und ihrer zugeordneten Sechs enthält. Zwei Scharen dieser Dreisechs bekommt man, indem man irgendwie ein oder drei Paar homologe Linien der beiden Sechs vertauscht, und die 16 Kegelschnitte der *Kummer*schen Gruppe lassen sich sonach durch eine oder drei der Zahlen 1 bis 6 bezeichnen, indem im letzteren Falle die übrig bleibenden drei Zahlen jedesmal denselben Kegelschnitt darstellen.

b. Mit Hülfe der Zahlen 1 bis 6, die einer Sechs zugeschrieben werden, lassen sich auch alle Doppeltangenten bis auf eine charakterisiren. Die ausgezeichnete Doppeltangente (0) ist die, welche die vorgelegte Sechs zu einer *Aronhold*schen Sieben vervollständigt. Jede Linie der dieser Sechs zugeordneten zweiten Sechs berührt mit den fünf ihr nicht homologen Linien jener ersten Sechs denselben Kegelschnitt und lässt sich durch die fünf Symbole dieser Linien festlegen. Von den noch übrigen 15 Doppeltangenten ist aber schon gezeigt, wie sie sich durch je zwei der Zahlen 1 bis 6 charakterisiren lassen. Irgend eine von ihnen, etwa (12), bildet mit (1) und der zu (2) zugeordneten Doppeltangente der zweiten Sechs oder mit (2) und der zu (1) zugeordneten Doppeltangente ein syzygetisches Tripel, das allemal durch die ausgezeichnete Doppeltangente zu einem syzygetischen Quadrupel ergänzt wird. Solcher Tripel giebt es 45, sie gehören als zerfallende Curven einem syzygetischen Complexe von kubischen Berührungscurven an, nämlich von solchen Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung alle in sechs Punkten eines Kegelschnittes berühren. Von den 45 Linientripeln selbst kann man sagen, dass sie einen ***syzygetischen Tripelcomplex*** bilden.

c. Um nun aber zu einer duadischen Bezeichnung aller Doppeltangenten zu gelangen, füge man zwei Zeichen, etwa 7 und 8, hinzu, gebe das eine den Linien der vorgelegten Sechs, das andere denen der zugeordneten

Sechs, so dass z. B. (17) und (18) entsprechende Linien in beiden Sechs sind. Der vorher mit (0) charakterisirten Doppeltangente ertheile man das Symbol (78) und die übrigen 15 Linien bezeichne man wie früher. Die Doppeltangenten, welche auf diese Weise durch je zwei von irgend drei der Zahlen 1 bis 8, z. B. (12), (23), (31), charakterisirt werden, bilden im ganzen 56 azygetische Tripel, einen *azygetischen Tripelcomplex.* Denn diese Tripel bilden die ganz zerfallenden Curven in einem azygetischen Complexe von kubischen Berührungscurven, nämlich von solchen Curven dritter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung sechsfach, aber *nie* in sechs Punkten eines Kegelschnittes, berühren.

Zu diesem Complexe gehören acht bestimmte *Aronhold*sche Sieben, die ein Oktupel darstellen (15). Je zwei Doppeltangenten von einer derselben bilden mit einer bestimmten aus den 21 übrigen Doppeltangenten eine zerfallende Curve des Complexes. Die Linien einer beliebigen dieser Sieben zeigen in ihrer duadischen Bezeichnung alle eine gemeinsame Zahl.

Man sieht hieraus, dass sich die Doppeltangenten auf 36 verschiedene Arten in der angegebenen Weise bezeichnen lassen und ohne, wie *Hesse* es thut, auf ihre Beziehung zu den Verbindungslinien von acht associirten Punkten im Raume einzugehen, kann man sie durch die 28 Verbindungsstrecken von 8 beliebig in der Ebene gewählten Punkten in der *Cayley*schen Weise*) rein schematisch darstellen, indem man die beizufügenden Zahlen weglässt, wo es sich bloss um die Angabe der gegenseitigen Lagenbeziehungen dieser Strecken handelt. Eine solche Darstellung empfiehlt sich durchgehends, und man kann die verschiedenen Typen, die sich hierbei darbieten, wenn sie auch nur in dieser Darstellung und nicht in Wirklichkeit unterschieden sind, ruhig sondern, indem man sich doch andererseits, wegen der verschiedenen möglichen Darstellungen, öfters erlaubt, sich auf die Betrachtung eines besonders bequemen Typus zu beschränken und von ihm auf die anderen zu schliessen.

3.

Jedes azygetische Quadrupel wird durch zwei azygetische Tripel zu einer *Aronhold*schen Sieben ergänzt. Die Linien dieser beiden Tripel bilden zusammen drei Paare einer *Steiner*schen Paarsechs und sollen eine Paardrei genannt werden.

---

*) *Cayley*, dieses Journal, Band 68, 87.

Eine Paardrei lässt sich auf vier Arten in zwei azygetische Tripel zerlegen, oder wie wir dafür sagen wollen, aus einer Paardrei lassen sich vier verschiedene Doppeldrei bilden. Entsprechend einer jeden dieser vier Zerlegungen lässt sich der Paardrei ein azygetisches Quadrupel zuordnen, das mit beiden Tripeln der Doppeldrei je eine *Aronhold*sche Sieben bildet. Diese vier azygetischen Quadrupel, welche sonach zu jeder Paardrei gehören, stellen eine *Kummer*sche Gruppe dar, die so in vier azygetische Quadrupel zerlegt ist.

Zu jeder Paardrei gehört eine bestimmte andere Paardrei, welche die erste zu einer Paarsechs ergänzt. Zu dieser zweiten Paardrei findet man dieselbe *Kummer*sche Gruppe, und die entsprechende zweite Zerlegung der letzteren in vier azygetische Quadrupel ist so geartet, dass jedes neue Quadrupel aus jedem der alten Quadrupel eine einzige Linie enthält. Eine solche doppelte Zerfällung der *Kummer*schen Gruppe in viermal vier Linien wollen wir eine Viervier nennen.

(19.) Aus jeder *Kummer*schen Gruppe lassen sich 10 Viervier bilden, entsprechend den 10 Arten, auf die sich die zugehörige Paarsechs in zwei Paardrei theilen lässt. Den beiden Paardrei entsprechen nämlich zwei zusammengehörige Zerfällungen der *Kummer*schen Gruppe in vier azygetische Quadrupel, und zwar ist beidemal jedes Quadrupel mit einer bestimmten der vier Doppeldrei, die sich aus der zugehörigen Paardrei bilden lassen, so verbunden, dass es mit beiden Tripeln der Doppeldrei je eine *Aronhold*sche Sieben bildet.

(20.) Wird die *Kummer*sche Gruppe auf eine dieser 20 Arten in vier azygetische Quadrupel getheilt, so berühren die Diagonalen der vier Vierseite, welche diese Quadrupel bilden, eine und dieselbe Curve dritter Klasse.

Greift man von den drei Paarsechs eines syzygetischen Tripels irgend zwei heraus und lässt von ihnen das gemeinsame Quadrupel fort, so lassen sich die von jeder übrig bleibenden acht Doppeltangenten auf vier Arten in zwei azygetische Quadrupel zerlegen, die jedesmal von einem und demselben Paare aus der dritten Paarsechs des Tripels zu einer Schar ergänzt werden. Die zweimal acht Doppeltangenten bilden aber die beiden Hälften einer *Kummer*schen Gruppe, welche sonach auf *vier* Arten derart weiter zerlegt werden können, dass wir zu einer azygetischen Quadrupelzerfällung der *Kummer*schen Gruppe gelangen, während wir früher sahen, dass sie auf *drei*

Arten so weiter zerlegt werden können, dass wir eine syzygetische Quadrupelzerfällung erhalten.

(21.) Wenn ein azygetisches Quadrupel mit beiden azygetischen Tripeln einer Doppeldrei je eine *Aronhold*sche Sieben bildet, so bildet es mit jedem Paar zusammengehöriger Linien der Doppeldrei eine Schar, nämlich sechs Doppeltangenten, die einen Kegelschnitt berühren.

(22.) Irgend zwei von vier azygetischen Quadrupeln, die zusammen eine *Kummer*sche Gruppe ausmachen, gehören derselben Paarsechs an, und diese ist zu der Paarsechs, der die übrigen beiden Quadrupel angehören, syzygetisch. Die dritte Paarsechs, die mit diesen beiden ein syzygetisches Tripel bildet, ist diejenige, welche der *Kummer*schen Gruppe zugeordnet ist, und das gemeinsame Quadrupel aller drei Paarsechs gehört derjenigen Paardrei an, welcher diese Quadrupelzerlegung der *Kummer*schen Gruppe entspricht.

(23.) Die acht azygetischen Tripel, die sich aus einer gegebenen Paardrei bilden lassen, zerfallen in zwei Gruppen von je vier Tripeln, so dass zwei Tripel derselben Gruppe immer *eine*, zwei Tripel aus verschiedenen Gruppen *zwei* Linien gemein haben, wenn sie nicht alle Linien der Paardrei erschöpfen und eine Doppeldrei bilden. Jede Gruppe von vier Tripeln gehört dann aber zu einem azygetischen Tripelcomplex (vgl. oben 2, c), und man findet zu jeder Paardrei ein Paar von solchen Complexen. Zu associirten Paardrei, die sich zu einer Paarsechs ergänzen, gehört aber dasselbe Paar von azygetischen Tripelcomplexen.

Zerlegt man ein azygetisches Quadrupel auf eine der drei möglichen Arten in zwei Paare, so gehören dieselben zwei verschiedenen Paarsechs an. Diese beiden Paarsechs und diejenige, von der die zu dem azygetischen Quadrupel gehörige Doppeldrei einen Theil bildet, stellen ein syzygetisches Paarsechstripel dar. Sondert man das gemeinsame syzygetische Quadrupel und das vorgelegte azygetische Quadrupel von den ersten beiden Paarsechs ab, so bleibt von jeder eine Paardrei übrig. Diese beiden Paardrei zerlegen sich aber mit Hülfe der Doppeldrei, welche zu dem azygetischen Quadrupel gehört, auf bestimmte Art in azygetische Tripel, die mit jedem Tripel der Doppeldrei je eine neue Doppeldrei bilden. Man hat so im ganzen sechs azygetische Tripel vor sich, von denen beliebige zwei eine Doppeldrei bilden. Eine solche Gruppe werde von uns eine ***Dreisechs*** genannt.

(24.) Jedes azygetische Tripel gehört zu einer und nur zu einer Dreisechs. Von den fünf Tripeln, die es zu je einer Doppeldrei ergänzen, bilden auch beliebige zwei eine Doppeldrei. Da es 2016 azygetische Tripel giebt, giebt es sonach 336 Dreisechs.

Jede Dreisechs lässt sich auf eine einzige Art in drei Scharen zerfällen, die paarweise die Paarsechs eines azygetischen Paarsechstripels bilden. Von jedem Tripel der Dreisechs gehört zu jeder der drei Scharen eine Linie (vergl. (14.)).

(25.) Die Quadrupel, welche die 15 Doppeldrei einer Dreisechs zu *Aronhold*schen Sieben ergänzen, gehören immer nur den nach Ausschluss der Dreisechs übrig bleibenden 10 Linien an und stellen sämmtliche azygetische Quadrupel dar, die sich aus diesen 10 Linien bilden lassen.

Solche 10 Linien sollen eine *Caporali*sche Gruppe heissen.

(26.) Zwei *Kummer*sche Gruppen wollen wir azygetisch nennen, wenn sie 10 Doppeltangenten gemein haben. Denn dann sind die zu ihnen gehörigen Paarsechs azygetisch. Ihre 10 gemeinsamen Doppeltangenten bilden immer eine *Caporali*sche Gruppe.

(27.) Die drei Doppeldrei, in die sich eine Dreisechs auf 15 Arten zerlegen lässt, gehören zu je einer Paarsechs, diese drei Paarsechs bilden jedesmal ein syzygetisches Tripel und haben alle drei ein syzygetisches Quadrupel gemein. Die 15 syzygetischen Quadrupel, welche man so erhält, gehören immer nur der nach Ausschluss der Dreisechs verbleibenden *Caporali*schen Gruppe an, und mehr syzygetische Quadrupel sind in dieser nicht enthalten.

Ist umgekehrt ein syzygetisches Paarsechstripel vorgelegt, so kann man aus den vier Paaren, die nur in einer der drei Paarsechs enthalten sind, irgend drei herausgreifen, und ebenso aus den vier Paaren, die allein der zweiten Paarsechs angehören; dann finden sich drei bestimmte Paare, die nur zu der dritten Paarsechs gehören; so dass alle drei Paardrei zusammen eine Dreisechs bilden. Auf solche Art lassen sich aus einem syzygetischen Paarsechstripel 16 verschiedene Dreisechs ableiten.

Die drei Paar Doppeltangenten, welche von dem Paarsechstripel nach Ausschluss einer dieser Dreisechs und des gemeinsamen Quadrupels übrig bleiben, bilden eine besondere Gruppe, die wir eine ***de Paolissche Zweidrei*** nennen wollen.

Es bilden also immer die sechs Doppeltangenten, die von einer *Caporali*schen Gruppe nach Ausschluss eines syzygetischen Quadrupels übrig bleiben, eine *de Paolis*sche Zweidrei.

(28.) Aus jedem syzygetischen Paarsechstripel lassen sich 16 *de Paolis*sche Zweidrei herleiten. Man greife nämlich aus den nicht gemeinsamen Paaren von zweien der drei Paarsechs je ein Paar heraus, dann findet sich ein bestimmtes Paar in der dritten Paarsechs, das mit ihnen eine *de Paolis*sche Zweidrei bildet.

(29.) Die sechs Doppeltangenten einer *de Paolis*schen Zweidrei durchschneiden sich in drei Punkten einer geraden, nämlich einer *Aronhold*schen Linie. (Ihre sechs Paar Berührungspunkte mit der Curve vierter Ordnung liegen auf einer Curve dritter Ordnung, die auch durch die drei Schnittpunkte auf der *Aronhold*schen Linie geht.) Es giebt 5040 *de Paolis*sche Zweidrei und ebensoviele *Aronhold*sche Linien.

Jeder *de Paolis*schen Zweidrei ist das gemeinsame Quadrupel des syzygetischen Paarsechstripels, aus dem sie sich herleiten lässt, in gewisser Weise zugeordnet. Diese Zuordnung ergiebt sich wie folgt:

(30.) Aus der *de Paolis*schen Zweidrei lassen sich 8 syzygetische Tripel herausheben. Zu jedem Paare der Zweidrei gehört immer *eine* Linie eines solchen Tripels. Die acht Tripel sind paarweise derart einander associirt, dass je zwei associirte Tripel alle sechs Linien der Zweidrei erschöpfen und durch dieselbe vierte Doppeltangente zu je einem syzygetischen Quadrupel ergänzt werden. Die vier Doppeltangenten, die so zu den Tripeln hinzutreten, bilden das der Zweidrei zugeordnete syzygetische Quadrupel.

Je zwei associirte Tripel der Zweidrei und die drei Linien, welche sie von dem zugeordneten Quadrupel ***nicht*** zu syzygetischen Quadrupeln ergänzen, bilden drei Dreiecke, diese drei Dreiecke sind zu einander perspectiv und die Ecken je zweier von ihnen liegen auf einem Kegelschnitte.

Von den Doppeltangenten, welche die Seiten solcher drei Dreiecke sind, wollen wir sagen, sie bilden eine ***Cianische Dreidrei***. Dann zeigt sich zunächst:

(31.) Jede *Cian*ische Dreidrei wird durch eine bestimmte Doppeltangente zu einer *Caporal*ischen Gruppe von 10 Doppeltangenten ergänzt, aber umgekehrt findet man auch immer eine Dreidrei, wenn man von den Linien einer *Caporal*ischen Gruppe irgend eine weglässt.

(32.) Wenn drei aus Doppeltangenten gebildete Dreiecke zu einander perspectiv sind, so dass die homologen Ecken von allen dreien auf je einer *Aronhold*schen Linie liegen und diese drei *Aronhold*schen Linien sich in einem „*Geiser*schen" Punkte durchschneiden, dann bilden die homologen Seiten dieser drei Dreiecke drei neue Dreiecke, die ebenfalls perspectiv sind. Jede *Cian*ische Dreidrei lässt sich sonach auf doppelte Weise in drei perspective Dreiecke zerlegen, so dass jedesmal die homologen Linien der einen Zerlegung die Dreiecke der anderen Zerlegung bilden.

Zu jeder *Cian*ischen Dreidrei gehören zwei bestimmte *Geiser*sche Punkte, mit denen beidemal die homologen Ecken der drei Dreiecke auf je einer *Aronhold*schen Linie liegen, und die sämmtlichen *Geiser*schen Punkte werden so durch die verschiedenen Dreidrei paarweise einander conjugirt.

(33.) Die zweimal drei perspectiven Dreiecke, die sich aus einer Dreidrei bilden lassen, stellen *syzygetische* Tripel von Doppeltangenten dar und werden durch *dieselbe* Doppeltangente zu syzygetischen Quadrupeln ergänzt. Dies ist die Doppeltangente, welche die Dreidrei zu einer *Caporal*ischen Gruppe vervollständigt.

(34.) Zu jeder Dreidrei gehören *sechs de Paolis*sche Zweidrei, und umgekehrt gehört jede Zweidrei zu *vier* Dreidrei, indem sie durch jedes Tripel aus einem bestimmten syzygetischen Quadrupel zu einer Dreidrei ergänzt wird. Zu jeder *de Paolis*schen Zweidrei gehören *vier Geiser*sche Punkte, diese sind die Projectionscentren der vier Paare perspectiver Dreiecke, die sich aus ihr bilden lassen. Die 12 Schnittpunkte ihrer 6 Linien, die nicht auf der zugeordneten *Aronhold*schen Linie liegen, vertheilen sich paarweise auf die Seiten des Vierecks, das die zugehörigen vier *Geiser*schen Punkte bilden. Die zu den letzteren conjugirten *Geiser*schen Punkte liegen auf der *Aronhold*schen Linie, die zu der Zweidrei gehört.

(35.) Während durch jeden *Geiser*schen Punkt drei *Aronhold*sche

Linien gehen, liegen umgekehrt auf jeder *Aronhold*schen Linie vier *Geiser*sche Punkte. Es giebt 5040 *Aronhold*sche Linien und 6720 *Geiser*sche Punkte, die paarweise zu derselben Dreidrei gehören, also 3360 *Ciani*sche Dreidrei.

(36.) Jedes azygetische Quadrupel von Doppeltangenten bildet ein Vierseit, dessen drei Diagonalen *Aronhold*sche Linien sind. Auf jeder derselben durchschneidet sich noch ein Paar von Doppeltangenten, und die so erhaltenen drei Paare bilden diejenige Paardrei, die das azygetische Quadrupel zu einer *Caporali*schen Gruppe ergänzt.

(37.) Jede *Ciani*sche Dreidrei lässt sich auch auf doppelte Weise in drei azygetische Tripel zerlegen, und zwar gehört von jedem Tripel der einen Zerlegung *eine* Linie zu jedem Tripel der anderen Zerlegung. Beidemale lässt sich die Dreidrei durch Hinzufügung von drei weiteren azygetischen Tripeln zu einer Dreisechs ergänzen. Jede Dreidrei gehört also zu zwei verschiedenen Dreisechs.

Die zweimal drei Tripel, welche man zu der Dreidrei hinzugefügt hat, stellen zwei neue Dreidrei dar. Zerlegt man jede derselben auf die zweite mögliche Art in drei azygetische Tripel, so erhält man im ganzen sechs neue Tripel, die wieder eine Dreisechs bilden.

So findet man ein Tripel von Dreidrei und gleichzeitig ein Tripel von Dreisechs, derart, dass eine bestimmte Tripelzerlegung zweier der Dreidrei die Tripel einer der Dreisechs liefert, und je zwei der Dreisechs die Doppeltangenten einer der Dreidrei gemein haben, indem gleichzeitig durch die Art, wie diese in den beiden Dreisechs als Tripel zusammengehören, die beiden Tripelzerfällungen der Dreidrei gegeben werden. Die drei Dreidrei oder die drei Dreisechs enthalten zusammen alle 28 Doppeltangenten bis auf eine, und diese ergänzt jede der Dreidrei zu einer *Caporali*schen Gruppe.

(38.) Beliebige drei Tripel aus einer Dreisechs stellen immer eine Dreidrei dar. In der That gehen so, weil sich jede Dreidrei, ihren beiden Tripelzerlegungen entsprechend, doppelt ergiebt, aus den 336 Dreisechs 3360 Dreidrei hervor, welches die richtige Anzahl ist.

Die Natur der *Ciani*schen Dreidrei zeigt sich am deutlichsten, wenn man in der *Geiser*schen Weise eine Doppeltangente auszeichnet und die 27 übrigen als die Projectionen der 27 geraden Linien einer Fläche dritter Ordnung aus einem Flächenpunkte auf die Ebene ansieht. Dann entsprechen den 45 syzygetischen Tripeln von Doppeltangenten, welche durch die ausgezeichnete Doppeltangente zu syzygetischen Quadrupeln ergänzt werden, 45 ebene Dreiecke auf der Fläche dritter Ordnung. Nach *Steiner* lassen sich diese 45 Dreiecke auf 240 Arten so zu dreien zusammenfassen, dass drei zusammengehörige Dreiecke perspectiv sind, indem ihre homologen Ecken auf drei geraden Linien liegen und diese drei geraden Linien sich in einem und demselben Punkte schneiden. Die homologen Seiten solcher drei Dreiecke liegen aber immer wieder in je einer Ebene und bilden drei neue Dreiecke, die wieder perspectiv sind. So findet man 120 Paare von Triedern, in deren Kanten sich je drei Paar gerade Linien der Fläche begegnen. Diese 720 Triederkanten gehen bei der Projection auf die Ebene in *Aronhold*sche Linien über, die 240 Triederspitzen in *Geiser*sche Punkte, und die 120 Gruppen von 9 Linien, aus denen sich zweimal drei perspective Dreiecke bilden lassen, in ebensoviel *Ciani*sche Dreidrei von Doppeltangenten.

Zeichnet man nach und nach alle 28 Doppeltangenten aus, so findet man alle *Aronhold*sche Linien, alle *Geiser*schen Punkte und alle *Ciani*schen Dreidrei. Die *Aronhold*schen Linien erhält man aber vierfach, denn zu jeder gehört eine *de Paolis*sche Zweidrei, zu dieser ein syzygetisches Quadrupel, und man gelangt zu *derselben* Zweidrei, welche von den Doppeltangenten des zugehörigen Quadrupels man auch auszeichnen mag. Jede Dreidrei und damit jeden *Geiser*schen Punkt erhält man aber nur einfach, denn zu der Dreidrei gehört eine bestimmte Doppeltangente, die man auszeichnen muss, um die Dreidrei in der angegebenen Weise zu erhalten. So gelangt man wieder zu den 5040 *Aronhold*schen Linien, den 3360 *Ciani*schen Dreidrei und 6720 *Geiser*schen Punkten.