Ueber eine reale Darstellung der imaginären Gebilde einer reellen Ebene und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie.

(Von Herrn *E. Busche* in Bergedorf.)

---

§ 1. Verallgemeinerungen der *Gauss*schen Ebene.

In einer im 40. Bande der Mathematischen Annalen veröffentlichten Abhandlung „Rappresentazioni reali delle forme complesse" giebt Herr *C. Segre* zwei Methoden an, um die imaginären Punkte eines *reellen* linearen n-dimensionalen Raumes R_n durch reelle Punkte eines höheren Raumes darzustellen. Die erste von ihnen ist eine Verallgemeinerung der *Gauss*schen Ebene, die zweite eine solche der *Riemann*schen Kugel. Die Dimension des benutzten Raumes ist im ersten Falle gleich $2n$, und die Bilder der ∞^{2n} imaginären Punkte des R_n sind die reellen Punkte des R_{2n}, während im anderen Falle der Raum ein $R_{n(n+2)}$ ist, in dem die Fläche von der Ordnung $\binom{2n}{n}$ liegt, deren ∞^{2n} reelle Punkte die imaginären Punkte des R_n repräsentiren. Die erste Methode, die mit der im Folgenden zu erörternden näher verwandt ist als die hier nicht weiter zu betrachtende zweite Methode, beruht darauf, dass in dem R_{2n} ausserhalb des reellen R_n ein vollständig imaginärer R_{n-1} angenommen wird, d. h. ein solcher, der — wenn $n > 1$ ist — mit seinem conjugirten kein reelles Gebilde gemeinsam hat, und dass jeder durch diesen R_{n-1} gehende imaginäre R_n mit seinem conjugirten zum Schnitt gebracht wird. Dieser Schnitt, ein reeller Punkt, ist das Bild des imaginären Punktes, den der imaginäre R_n mit dem gegebenen reellen R_n gemein hat. Für $n = 1$ ist der imaginäre R_{n-1} ein Punkt, und die imaginären Geraden, die durch diesen Punkt gehen, liefern als Schnittpunkte mit ihren conjugirten

Geraden die Punkte einer Repräsentationsebene*) für die imaginären Punkte der gegebenen reellen Geraden. Ist der imaginäre Hülfspunkt einer der beiden unendlich fernen Kreispunkte, so geht die Ebene in eine *Gauss*sche Ebene über.**)

Diese *Segre*sche Methode ist also thatsächlich eine directe Verallgemeinerung der *Gauss*schen, aber sie ist nicht die einzige. Wenn man nicht gerade darauf Gewicht legen will, dass die imaginären *Punkte* eines reellen R_n durch die reellen Punkte eines höheren Raumes dargestellt werden, so kann man auch das folgende Verfahren anwenden, das vor dem *Segre*schen und anderen analogen, die man noch aufstellen kann, den Vorzug hat, einen Raum zu benutzen, dessen Dimension nur um 1 höher ist als die des vorgelegten reellen R_n. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, die imaginären R_{n-1} des reellen R_n durch reelle R_{n-1} eines höheren Raumes zu repräsentiren, so zeigt sich, dass schon für einen reellen R_{n+1} die Anzahl der darin enthaltenen reellen R_{n-1} doppelt so gross ist wie die Anzahl der reellen R_{n-1} des R_n, also gleich der Anzahl der imaginären R_{n-1} des R_n. Es ist nämlich bekanntlich†) die Stufe der reellen R_k in einem reellen R_m gleich $(k+1)(m-k)$, also die der reellen R_{n-1} in einem R_n gleich n und in einem R_{n+1} gleich $2n$.

Um diesen Umstand zur Darstellung der imaginären R_{n-1} eines reellen R_n zu benutzen, nehme man in einem R_{n+1}, der den R_n enthält, einen

*) Vergl. die Preisarbeit des Herrn *E. Kötter*: Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen Curven. Berlin 1887. Herr *Kötter* benutzt solche projectivisch verallgemeinerten *Gauss*schen Ebenen als methodisches Hülfsmittel, natürlich ohne von einer Bezeichnung ihrer Punkte mit complexen Zahlen Gebrauch zu machen. Herrn *Kötter* verdanke ich den Hinweis auf den Zusammenhang meiner Darstellung des Imaginären mit der von Herrn *Segre* verallgemeinerten *v. Staudt*schen Auffassung der *Gauss*schen Ebene.

**) Vergl. *v. Staudt*: Beiträge zur Geometrie der Lage, Art. 410. Die *v. Staudt*sche Theorie des Imaginären ist behandelt worden von *F. August*: Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie, Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin, 1872, ferner von *O. Stolz*: Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, und von *J. Lüroth*: Ueber das Imaginäre in der Geometrie, Math. Ann. Bd. 8. Ausführliche Litteraturangaben findet man in dem schon erwähnten *Kötter*schen Werke.

†) Vergl. *Schubert*: Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes, Math. Ann. Bd. 26, oder auch von demselben Verfasser: Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension. Mittheilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg, Bd. I.

imaginären Punkt ausserhalb des R_n an und verbinde ihn mit einem imaginären R_{n-1} des gegebenen R_n durch einen imaginären R_n; dieser wird von seinem conjugirten in einem reellen R_{n-1} geschnitten, der das Bild des imaginären R_{n-1} ist. Für $n = 1$ geht diese Methode, ebenso wie die des Herrn *Segre*, in die *Gauss*sche über. Für $n = 2$ führt sie zu dem, von Herrn *Segre* beiläufig erwähnten, von *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über *Abel*sche Functionen benutzten Mittel, das Element eines durch eine algebraische Gleichung zwischen zwei complexen Variabeln definirten algebraischen Gebildes durch die Verbindungslinie der Bildpunkte der Variabeln auf zwei parallelen Ebenen zu veranschaulichen.

Auch die von *S. Lie* in einer kurzen Notiz im 70. Bande dieses Journals „Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie" angegebene räumliche Abbildung der imaginären Elemente einer Ebene ist nichts anderes als ein Specialfall der angegebenen allgemeinen Methode.*) *Lie* geht von der Darstellung des Punktes mit den complexen Coordinaten $x+iy$, $z+ip$ aus, indem er in dem Punkte $x+iy$ einer *Gauss*schen Ebene eine Senkrechte von der Länge z errichtet und deren Endpunkt, mit dem „Gewichte" p belastet, als Repräsentanten des imaginären Punktes betrachtet. Ich glaube, dass nur diese unsymmetrische Bevorzugung eines

*) Die weitere Ausführung seines Verfahrens hat *Lie* in den Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania, 1869, gegeben. Diese Arbeit ist mir nur durch die Bearbeitung bekannt, die Herr *Domsch* im Programm des Realgymnasiums zu Borna, 1888, von ihr geliefert hat. Bei dieser Gelegenheit erwähne ich auch die Arbeiten des Herrn *Suhle*: „Ueber imaginäre Punkte ebener Curven" in den Programmen des Realgymnasiums zu Dessau, 1893 und 1894, und „Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function n-ten Grades für complexe Variabele", 1896. Herr *Suhle* geht von der bekannten Methode aus, den reellen und den imaginären Bestandtheil einer Function complexen Arguments durch die Längen zweier in dem Punkt einer *Gauss*schen Ebene, der dem Argument entspricht, errichteten Senkrechten darzustellen. Für den Fall, dass der imaginäre Bestandtheil verschwindet, erhält man so als geometrischen Ort für den Endpunkt der den reellen Bestandtheil repräsentirenden Strecke gewisse reelle Raumcurven, die Herr *Suhle* näher untersucht. Es ist leicht zu sehen, dass diese Methode in der allgemeineren von *Lie* enthalten ist.

Ausser diesen räumlichen Darstellungen der imaginären Elemente einer Ebene sind mir noch zwei bekannt, die des Herrn *Henschel*: „Versuch einer räumlichen Darstellung complexer ebener Gebilde" (Jena 1892) und die von Herrn *Pietzker* in seinen „Beiträgen zur Functionenlehre" (Leipzig 1899). Beide scheinen mir nicht unmittelbar auf das von Herrn *Segre* verallgemeinerte *v. Staudt*sche Princip zurückführbar zu sein.

der vier Coordinatenbestandtheile es verursacht hat, dass die *Lie*sche Methode bis jetzt wenig beachtet worden ist, und halte es deshalb nicht für überflüssig, von einem anderen, ebenfalls ganz elementaren, Ausgangspunkte aus diesen besonders wichtigen Specialfall der erwähnten Verallgemeinerung der Zahlenebene noch einmal zu behandeln.

Ich bin zu meiner Darstellung, die mir wegen der Symmetrie sowohl zwischen den Coordinatenbestandtheilen als auch zwischen den Punkt- und Liniencoordinaten vor dem Verfahren von *Lie* gewisse Vorzüge zu besitzen scheint, bei Versuchen gekommen, den *Eisenstein*schen geometrischen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes auf die gewöhnlichen complexen Zahlen zu übertragen. Auf tiefergehende geometrische Untersuchungen kann ich mich deshalb nicht einlassen; ich beschränke mich darauf, die Brauchbarkeit dieser Methode, den imaginären Elementen einer reellen Ebene einen Platz ausserhalb der Ebene anzuweisen, dadurch zu zeigen, dass ich die ersten Anfangsgründe einer analytischen Geometrie entwickele, die sich complexer Coordinaten bedient. Die zahlentheoretischen Resultate der letzten Paragraphen können zwar auch auf anderem Wege gewonnen werden, sie sind aber immerhin wohl geeignet, den Nutzen einer räumlichen Veranschaulichung der imaginären ebenen Gebilde darzuthun.

§ 2. Darstellung der imaginären Punkte einer reellen Ebene.

Es ist anzunehmen, dass die *Gauss*sche Repräsentationsebene sich weniger rasch Eingang verschafft hätte, wenn sie ursprünglich mittelst des *v. Staudt*schen Hülfspunktes definirt worden wäre. Deshalb werde ich — ebenso wie *Lie* von *Gauss*schen Ebenen ausgehend — die räumlichen Gebilde, durch die die imaginären Geraden und Punkte einer reellen Ebene veranschaulicht werden sollen, zunächst ohne besondere Hervorhebung des imaginären Hülfspunktes definiren und nachträglich zeigen, dass sie sich auch in der im § 1 in Bezug auf die Geraden angegebenen Weise ergeben.

Die Zahlenebene setze ich in projectivisch verallgemeinerter Form (*Kötter*sche Repräsentationsebene) voraus. Wie man die reellen Punkte einer Geraden oder die reellen Strahlen eines Büschels mit den reellen Zahlen und die reellen Punkte einer Ebene oder die reellen Strahlen eines Bündels mit Zahlenpaaren, also auch mit complexen Zahlen bezeichnen kann, ohne metrische Hülfsmittel zu benutzen, ist z. B. aus *Clebsch-Lindemanns* „Vorlesungen über Geometrie“, Band II, aus Herrn *Kleins* „Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie" oder aus Herrn *Killings* „Einführung in die Grundlagen der Geometrie" bekannt. Die Nichtbenutzung der Metrik ist bei meiner Darstellung nicht wesentlich, aber sie ist zweckmässig, weil man so die unendlich fernen Gebilde nicht besonders auszuzeichnen braucht; das würde sich nicht vermeiden lassen, wenn die *Gauss*sche Ebene in der gewöhnlichen Form zu Grunde gelegt würde.

Zwei Repräsentationsebenen, die X-Ebene, von der ein beliebiger Punkt mit $X = X_1 + X_2 i$ bezeichnet werde, und die Y-Ebene ($Y = Y_1 + Y_2 i$) mögen sich in der geraden Linie schneiden, deren Punkte in beiden Ebenen mit Zahlen mit unendlich grossem absoluten Betrag bezeichnet sind. Die Nullpunkte der Ebenen seien S und T. Auf den von ihnen ausgehenden Geraden der Ebenen liegen die Punkte mit constantem Verhältniss $X_2 : X_1$ und $Y_2 : Y_1$. Die Punkte der beiden Ebenen sollen nun derartig mit den complexen Zahlen bezeichnet sein, dass die Verhältnisse $X_2 : X_1$ und $Y_2 : Y_1$ jedes Punktes der Schnittlinie übereinstimmen. Auf der Schnittlinie entsteht so ein *von Staudt*sches Abscissensystem, dessen Nullpunkt mit N, dessen Unendlichkeitspunkt mit M bezeichnet werde.

Die X- und Y-Ebene entsprechen den Coordinatenaxen eines nicht homogenen projectivischen ebenen Coordinatensystems, die X und Y den *Plücker*schen Liniencoordinaten der Geraden, die den Punkt X mit dem Punkt Y verbindet. Die Punkte T und S sind dementsprechend die Mittelpunkte zweier Coordinatenbündel, deren Strahlen $x = x_1 + x_2 i$ und $y = y_1 + y_2 i$ mit den negativen reciproken Werthen der Punkte bezeichnet werden, die sie in den Coordinatenebenen treffen.

Die Ebene NST oder σ ist die Ebene, deren reelle und imaginäre Elemente mittelst des soeben durch seine Coordinaten-Ebenen und -Bündel definirten räumlichen Systems Σ dargestellt werden sollen. Die Coordinaten der reellen Punkte und Geraden von σ sind reell. Die Gleichung

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

ist, wenn X, Y reelle Constanten sind, die Gleichung der reellen Geraden von σ, die durch die auf den reellen Axen NS und NT liegenden Punkte X und Y der Coordinatenebenen geht, und wenn x, y reelle Constanten sind, die Gleichung des reellen Punktes von σ, in dem die mit x und y bezeichneten Coordinatenstrahlen der Bündel T und S sich schneiden. Die Gleichung

$$Xx + Yy = 0$$

ist die einer durch den Nullpunkt N gehenden Geraden oder eines auf der Nullgeraden ST liegenden Punktes.

Diese bekannten Betrachtungen werden auf die lineare Gleichung mit complexen Coefficienten übertragen. Durch die Gleichung

$$(1.)\qquad aX+bY+1 = 0,$$

wo die Zahlen $a = a_1+a_2 i$, $b = b_1+b_2 i$ vorläufig beide von Null verschieden sein mögen, werden die beiden Coordinatenebenen collinear so auf einander bezogen, dass sie ihre Schnittlinie, die kurz als die *Basis* von Σ bezeichnet werden soll, entsprechend gemein haben, denn einem unendlich grossen X entspricht ein unendlich grosses Y. Wenn nun das Verhältniss $b:a$ reell ist, so haben die auf einander bezogenen Ebenen überdies jeden Punkt der Basis entsprechend gemein und liegen perspectivisch zu einander. Alle Geraden, deren Coordinaten X, Y der Gleichung (1.) genügen, gehen daher durch einen Punkt, und zwar durch den Schnittpunkt der Strahlen a von T und b von S, da z. B. für $Y = 0$ der Werth von $X = -1:a$ wird. Dieser Punkt mit den Coordinaten a, b hat also die Gleichung (1.). Es ist leicht zu sehen, dass den ∞^3 Zahlenpaaren b und a mit reellem Verhältniss die ∞^3 Raumpunkte entsprechen; ausgenommen sind jedoch die Punkte der Basis und die der Nullgeraden ST. Die letzteren gehören zu den homogenen Gleichungen

$$(2.)\qquad aX+bX = 0$$

mit reellem $b:a$ oder auch zu unendlich grossen Werthen von a und b (mit reellem Verhältniss) in der Gleichung (1.). Ein Punkt mit reellem Coordinatenverhältniss, der sich von einem gewöhnlichen Raumpunkt nur durch eine später zu erwähnende Eigenschaft unterscheidet, möge ein *atroper* Punkt genannt werden.

Wenn das Coordinatenverhältniss nicht reell ist, so haben die durch die Gleichung (1.) oder (2.) auf einander bezogenen Coordinatenebenen keinen reellen Punkt der Basis gemeinsam, sondern — wie eine leichte Rechnung zeigt — die Punkte J und J', die in dem Abscissensystem der Basis mit $\pm i$ zu bezeichnen sind. Diese imaginären Punkte werden als nicht zu σ gehörig natürlich nicht durch reale Gebilde von Σ repräsentirt; nach *v. Staudt* werden sie durch die Involution dargestellt, die jedem Punkt der Basis den Punkt mit dem negativen reciproken Werth zuordnet. Der

Punkt J ist, wie später gezeigt wird, der im § 1 erwähnte Hülfspunkt, von dem aus die imaginären Gebilde von σ projicirt werden.

Die Geraden X/Y, die der Gleichung (1.) oder (2.) genügen, bilden jetzt eine nicht zerfallende lineare Congruenz, deren imaginäre Directricen durch die Punkte J und J' der Basis gehen. Eine solche Congruenz, zu deren Strahlen die Basis gehört, und die durch zwei, weder die Basis, noch einander schneidende Strahlen, z. B. die Coordinatenstrahlen a und b eindeutig bestimmt ist, soll ein *Punkt**) genannt werden, und zwar zum Unterschied von den schon erwähnten atropen Punkten, ein *heterotroper* Punkt. Bei einem solchen Punkt kann man nämlich von einer Drehungsrichtung sprechen, insofern zwei benachbarte Strahlen sich entweder wie die Strahlen einer rechts oder einer links gewundenen Regelschar zu einander verhalten. Der eine oder der andere Fall tritt ein, je nachdem $a_1 b_2 - b_1 a_2$ positiv oder negativ ist. Welches Zeichen z. B. einer rechts gewundenen Congruenz entspricht, hängt vom Coordinatensystem ab. Der Ausdruck $p = a_1 b_2 - b_1 a_2$ möge, weil er zu der *Lie*schen Zahl p in enger Beziehung steht, das „Gewicht" des Punktes a/b heissen, und ebenso werde $P = A_1 B_2 - B_1 A_2$ das Gewicht der Geraden A/B genannt. Conjugirte Punkte, d. h. solche, deren gleichnamige Coordinaten conjugirt complex sind, haben entgegengesetztes Gewicht und sind also entgegengesetzt gewunden, wie z. B. die Punkte $X \pm iY = 0$, zu deren Strahlen die Nullgerade ST gehört; sie entsprechen den Kreispunkten einer Ebene, deren Punkte mit Parallelcoordinaten bezeichnet sind. Wenn das Gewicht gleich Null ist, so ist der Punkt atrop.

Es möge gesagt werden, dass ein Punkt auf einer Geraden liege, wenn diese zu seinen Strahlen gehört.

Eine lineare Congruenz mit imaginären Directricen veranschaulicht man sich bekanntlich am besten dadurch, dass man um einen beliebig gewählten Strahl als „Mittelstrahl" herum sich alle übrigen Strahlen zu ∞^1 Regelscharen angeordnet denkt. Bei einem heterotropen Punkt sind die Spuren dieser Regelscharen in den Coordinatenebenen Kegelschnitte, die durch die Punkte J und J' der Basis gehen. Solche Kegelschnitte, die den Kreisen einer *Gauss*schen Ebene entsprechen, sollen nach *v. Staudt* und Herrn *E. Kötter* als *Ketten* bezeichnet werden. Die Coordinaten X_0/Y_0 des Mittelstrahls sind die „Mittelpunkte" der Ketten, d. h. die Pole der Basis in Bezug auf die

*) Vergl. S. 9 des Programms von Herrn *Domsch*.

Ketten. Der Strahl X_0/Y_0 ist für jede Regelfläche, die durch zwei zusammengehörige Ketten der Coordinatenebenen bestimmt ist, die reciproke Polare der Basis. Diese Behauptungen lassen sich leicht beweisen mittelst der Bemerkung, dass, wenn X_0/Y_0 ein Strahl des Punktes a/b ist, die Gleichung des Punktes auf die Form

$$a(X-X_0)+b(Y-Y_0) = 0$$

gebracht werden kann.

Von jedem heterotropen Punkte liegt ein Strahl in der Ebene σ, das ist der Träger des Punktes und seines conjugirten im *v. Staudt*schen Sinne. Nimmt man ihn als Mittelstrahl, so liegen die zu zwei conjugirten Punkten gehörigen Regelscharen auf denselben Regelflächen als deren Leitscharen. Es ist jedoch zweckmässig, als den Mittelstrahl eines heterotropen Punktes a/b den Strahl mit den Coordinaten

$$-\frac{b_2+b_1 i}{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \;\Big|\; \frac{a_2+a_1 i}{2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

zu wählen. Dieser Strahl möge als die *Charakteristik* des Punktes a/b bezeichnet werden.*) Er hat die besondere Eigenschaft, dass zu seinen Regelscharen die gehört, deren Strahlen die Nullgerade ST schneiden. Da diese Strahlen das Gewicht Null haben, so entspricht die eben genannte Regelschar eines heterotropen Punktes der atropen Punktreihe einer Geraden, und da diese letztere zur Veranschaulichung der Geraden dient, so erscheint es angemessen, bei einem heterotropen Punkte die Serie von Regelscharen zu

*) Ausser den Gründen, die für die Bevorzugung dieses Strahles sich später ergeben werden, möge hier noch der folgende erwähnt werden. Gerade so wie man die imaginären Elemente einer reellen Ebene durch reale Gebilde in Σ darstellt, kann man dual entsprechend auch die imaginären Geraden und Ebenen eines reellen Punktes durch die Raumgeraden und gewisse lineare Congruenzen repräsentiren. Wählt man als diesen Punkt den Punkt M der Basis und bringt auch im Uebrigen das betreffende räumliche System in eine geeignete, nahe liegende Beziehung zu Σ, so gilt der Satz, dass die Charakteristiken aller Σ-Punkte einer Geraden eine lineare Congruenz bilden, die eine imaginäre Ebene darstellt, und dass die Gerade die Charakteristik dieser Ebene ist. Dabei ist die Charakteristik der Ebene die Gerade, deren Coordinaten in dem Σ dual entsprechenden System aus den Coordinaten der Ebene ebenso gebildet sind, wie die Coordinaten der Charakteristik eines Σ-Punktes aus den Coordinaten dieses Punktes. Da man nun, wenn man das System Σ benutzen will, um Sätze der Raumgeometrie zu finden, dieses dual entsprechende System nicht gut entbehren kann, so ist es offenbar von Vortheil, unter den Strahlen eines heterotropen Punktes den auszuzeichnen, der eine solche Beziehung zwischen beiden Systemen vermittelt.

bevorzugen, deren Mittelstrahl die Charakteristik des Punktes ist, obgleich sie keine vom Coordinatensystem unabhängige Bedeutung für den Punkt hat. Durch seine Charakteristik ist der Punkt bestimmt; eine Gerade ist nur von einem Punkte die Charakteristik, die Gerade A/B mit von Null verschiedenem Gewicht von dem Punkte

$$-\frac{B_2+B_1 i}{2(A_1B_2-A_2B_1)}\,\Big|\,\frac{A_2+A_1 i}{2(A_1B_2-A_2B_1)}.$$

Die Gewichte des Punktes a/b und seiner Charakteristik A/B stehen in der Beziehung

$$a_1b_2-b_1a_2 = -\frac{1}{4(A_1B_2-A_2B_1)}$$

zu einander.

Die Punkte mit rein imaginären Coordinaten, die alle atrop sind, liegen in der Ebene MST. Ueberhaupt liegen in einer Ebene des Büschels mit der Axe ST die atropen Punkte, bei denen das Verhältniss $a_2:a_1 = b_2:b_1$ einen constanten Werth besitzt.

§ 3. Die Geraden in Σ.

Die Gleichung

$$Ax+By+1 = 0$$

ist die Gleichung der Geraden mit den Coordinaten A/B. Auf ihr liegen ∞^1 atrope Punkte, nämlich die, deren Träger der Strahl A/B im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. Ausserdem liegen auf ihr ∞^2 heterotrope Punkte, nämlich die zu deren Strahlen A/B gehört. Der Strahl A/B dient als Bild der Geraden A/B. Er schneidet die Ebene σ in dem Punkte, der nach *v. Staudt* als Träger der imaginären Geraden A/B bezeichnet wird. Durch denselben Punkt geht die conjugirte Gerade, deren Coordinaten zu denen von A/B conjugirt sind. Die Punkte $A_1 \pm A_2 i$ und $B_1 \pm B_2 i$ sind die Doppelpunkte der Punktinvolutionen, die in den Coordinatenebenen durch die Strahleninvolution bestimmt werden, die nach *v. Staudt* die imaginäre Gerade und ihre conjugirte definirt*).

Die Geraden mit reellem Coordinatenverhältniss oder mit dem Gewicht Null schneiden, wie schon erwähnt wurde, die Nullgerade ST, z. B. liegen in der Ebene MST die Geraden, deren beide Coordinaten rein imaginär sind.

Die Geraden mit einer homogenen Gleichung

$$Ax+By = 0,$$

*) Vergl. *August*: a. a. O. S. 7.

deren Coordinaten also unendlich gross sind, unterscheiden sich wesentlich von den bisher betrachteten Geraden. Sie mögen als uneigentliche Geraden bezeichnet werden. Ist nämlich zunächst $B:A$ reell, so liegen alle Punkte der Geraden auf einer durch die Basis gehenden Ebene, da jede eigentliche Gerade mit einer solchen *„Feldgeraden“* einen atropen Punkt gemeinsam hat. Zu diesen Feldgeraden gehören auch die Coordinatenebenen $y = 0$ und $x = 0$. Allen reellen Verhältnissen $B:A$ entsprechend erhält man ∞^1 Feldgeraden, deren jede einen atropen Punkt von ST mit der Basis verbindet. Bezeichnet man den Punkt von ST mit $B:A$, so erhält man ein Abscissensystem auf ST, dessen Nullpunkt T, dessen Unendlichkeitspunkt S ist. Alle atropen Punkte mit demselben Coordinatenverhältniss $y:x$ liegen auf derselben Feldgeraden; sie führt nach dem Punkt von ST hin, der in diesem Abscissensystem mit dem negativen reciproken Werth von $y:x$ bezeichnet ist.

Die ∞^3 geraden Linien, die auf den Feldgeraden liegen, also die Basis schneiden, sind nicht als Bilder von imaginären Geraden von σ zu betrachten; sie sind keine Geraden von Σ, da auf ihnen nur ∞^1 Punkte liegen.

Jetzt kann der Unterschied zwischen einem gewöhnlichen Raumpunkt und einem atropen Punkte angegeben werden: zu den Geraden eines atropen Punktes gehört eine Feldgerade, er ist eine in ein Strahlenbündel und ein Strahlenfeld zerfallende lineare Congruenz, während ein gewöhnlicher Punkt nur ein Strahlenbündel ist. Ein atroper Punkt hat mit der Ebene σ den Strahl gemeinsam, in dem seine Feldgerade diese Ebene schneidet. Dieser Strahl ist der *v. Staudt*sche Träger des atropen Punktes und seines conjugirten. Ferner kann jetzt auch die Voraussetzung, dass die Coordinaten eines Punktes von Null verschieden sein sollten, fallen gelassen werden. Die mit Null zu bezeichnenden Coordinatenstrahlen sind die beiden Feldgeraden, die zugleich als Coordinatenebenen dienen. Ein Punkt, dessen x-Coordinate gleich Null ist, ist der Schnitt des (eigentlichen) y-Coordinatenstrahls mit der Ebene $x = 0$, d. h. der Y-Ebene. Der Nullpunkt 0/0 ist der Schnittpunkt der beiden Nullstrahlen der Coordinatenbündel; er ist ein Element von Σ, das eine Ausnahmestellung einnimmt anolog der den Punkt ∞ repräsentirenden unendlich fernen Geraden einer gewöhnlichen *Gauss*schen Ebene. Dass bei meiner Darstellung — bei *Lie* ist es anders — nicht etwa die Nullgerade, sondern der Nullpunkt und die durch ihn gehenden Geraden mit unendlich grossen Coordinaten eine derartige Sonderstellung einnehmen, entspricht dem Umstande, dass die Geraden der Ebene σ die

Elemente sind, die bei dieser Verallgemeinerung der *Gauss*schen Darstellung an die Stelle der Punkte einer reellen Geraden treten. Deshalb ist es nach meiner Ansicht zweckmässig, hier die Nullgerade ebensowenig auszuzeichnen, wie in der *Gauss*schen Ebene den Nullpunkt.

Der Nullpunkt kann als durch die Basis repräsentirt angesehen werden; er soll weder zu den atropen, noch zu den heterotropen Punkten gerechnet werden.

Wenn in der Gleichung

$$Ax+By = 0$$

$B:A$ nicht reell ist, so enthält diese uneigentliche Gerade keinen atropen Punkt, sondern ausser dem Nullpunkt nur heterotrope Punkte. Von einer solchen Geraden kann man sich also, wenn auch jeder ihrer Punkte ein reales Strahlengebilde ist, keine anschauliche Vorstellung machen, falls man nicht etwa die von allen Charakteristiken der auf der Geraden liegenden Punkte gebildete lineare Congruenz in Betracht ziehen will. Jede von diesen uneigentlichen Geraden verbindet einen heterotropen Punkt von ST mit dem Nullpunkt, nämlich den, dessen Coordinatenverhältniss $y:x$ gleich $-A:B$ ist. Auf ihr liegen alle heterotropen Punkte mit diesem Coordinatenverhältniss.

§ 4. Ein reelles Coordinatensystem.

Es ist für die leichtere Orientirung in dem System Σ von Vortheil, neben den complexen Coordinaten auch reelle Raumcoordinaten einzuführen. Als Coordinatentetraeder benutzt man am besten das Tetraeder $NMST$ und betrachtet N als Nullpunkt der nicht homogenen projectivischen Coordinaten und die Ebene MST als die Ebene, deren Punkte mit unendlich grossen Coordinaten bezeichnet sind. Der Punkt $\xi|0|0$ möge der Punkt auf NS sein, dessen x-Coordinate gleich ξ ist, ebenso $0|\eta|0$ der Punkt auf NT, dessen y-Coordinate gleich η ist, und endlich $0|0|\zeta$ der Punkt auf NM, der in dem auf der Basis NM durch die Verhältnisse $X_2:X_1 = Y_2:Y_1$ bestimmten Abscissensystem mit ζ bezeichnet ist. Der atrope Punkt $x_1+x_2i|y_1+y_2i$, wo $x_2:x_1 = y_2:y_1$ ist, hat dann die reellen Coordinaten

$$\xi = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1}, \qquad \eta = \frac{y_1^2+y_2^2}{y_1}, \qquad \zeta = -\frac{x_2}{x_1} = -\frac{y_2}{y_1}.$$

Denn der mit x_1+x_2i bezeichnete Coordinatenstrahl trifft die X-Ebene in dem Punkte

$$-\frac{1}{x_1+x_2i} = -\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}i,$$

und die Ebene, die diesen Strahl mit MT verbindet, schneidet NS in dem Punkte $-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ der X-Ebene; der negative reciproke Werth hiervon ist mithin die x- und also auch die ξ-Coordinate des Punktes auf NS. Das Entsprechende gilt von η, und der Werth von ζ folgt daraus, dass der Punkt $x_1+x_2i\,|\,y_1+y_2i$ in der Ebene von ST liegt, die die Basis im Punkte $-x_2:x_1 = -y_2:y_1$ trifft.

Um umgekehrt die x/y-Coordinaten eines Punktes $\xi|\eta|\zeta$ zu finden, benutzt man die Gleichungen

$$x_1-\zeta x_2 = \xi,$$
$$x_1\zeta+x_2 = 0,$$

aus denen man

$$x_1 = \frac{\xi}{1+\zeta^2}, \quad x_2 = -\frac{\xi\zeta}{1+\zeta^2}, \quad x = \frac{\xi}{1+\zeta i}$$

findet. Ebenso ist

$$y_1 = \frac{\eta}{1+\zeta^2}, \quad y_2 = -\frac{\eta\zeta}{1+\zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{1+\zeta i}.$$

Hieraus ergiebt sich z. B., wenn man die Werthe von x und y in die Gleichung der eigentlichen Geraden A/B einsetzt und dann das Reelle und Imaginäre trennt, dass die atropen Punkte einer Geraden auf der Schnittlinie der beiden Ebenen

$$A_1\xi+B_1\eta+1 = 0,$$
$$A_2\xi+B_2\eta+\zeta = 0$$

liegen. Falls das Gewicht $A_1B_2-A_2B_1$ der Geraden gleich Null ist, geht die Gerade durch einen Punkt von ST. Für eine uneigentliche Gerade hat man als Ort ihrer atropen Punkte

$$A_1\xi+B_1\eta = 0,$$
$$A_2\xi+B_2\eta = 0,$$

woraus die oben angegebenen Eigenschaften einer solchen Geraden, die von $A_1B_2-A_2B_1$ abhängen, sich wieder ergeben.

Die eigentliche Gerade X/Y schneidet die X-Ebene in dem Punkte X_1+X_2i, der die Σ-Punktcoordinaten $-\frac{1}{X_1+X_2i}\Big|0$ und also die reellen Coordinaten $-\frac{1}{X_1}\Big|0\Big|\frac{X_2}{X_1}$ hat, die Y-Ebene in dem Punkte $0\Big|-\frac{1}{Y_1}\Big|\frac{Y_2}{Y_1}$. Daraus findet man die 6 reellen Coordinaten der Geraden X/Y gleich

$$Y_1:-X_1:X_1Y_2-Y_1X_2:X_2:Y_2:1.$$

§ 5. Das System Σ in der Auffassung des Art. 410 der Beiträge zur Geometrie der Lage.

Das reelle Coordinatensystem kann benutzt werden, um zu zeigen, dass thatsächlich das System Σ in der im § 1 angegebenen Beziehung zu der Ebene σ steht, die es als eine Verallgemeinerung der *Gauss*schen Ebene charakterisirt. Man hat zu dem Zwecke nur nachzuweisen*), dass die imaginäre Ebene, die den Punkt J oder $0|0|i$ der Basis mit den Punkten $-\frac{1}{X_1}\Big|0\Big|\frac{X_2}{X_1}$ und $0\Big|-\frac{1}{Y_1}\Big|\frac{Y_2}{Y_1}$ verbindet, die also die Σ-Gerade $X_1+X_2i|Y_1+Y_2i$ als reellen Träger hat, die $\xi\eta$-Ebene σ in der Geraden schneidet, die als Gerade dieser Ebene aufgefasst, die Gleichung

$$(X_1+X_2i)\xi+(Y_1+Y_2i)\eta+1=0$$

hat. Statt dessen kann man auch zeigen, dass die conjugirten Ebenen, von denen die eine den Punkt $0|0|i$ mit der eben genannten imaginären Geraden von σ und die andere den Punkt $0|0|-i$ mit der conjugirten Geraden von σ verbindet, sich in der Σ-Geraden $X_1+X_2i|Y_1+Y_2i$ schneiden. Wenn die imaginäre Gerade von σ durch den Nullpunkt geht, so ist der reelle Träger der Ebene, die sie mit $0|0|i$ verbindet, die Basis, und die Ebene wird reell, wenn das Coordinatenverhältniss der Geraden reell ist. Der Träger des imaginären Hülfspunktes J ist also für Σ in analoger Weise ein Ausnahme-Element wie für die *Gauss*sche Ebene.

Ebenso ist der Nachweis zu führen, dass die Gerade, die den Punkt $0|0|i$ mit dem imaginären Punkt $x_1+x_2i|y_1+y_2i|0$ von σ verbindet, wenn $x_1y_2-y_1x_2$ verschwindet, die *v. Staudt*sche Gerade I. Art ist, deren reeller Punkt der atrope Punkt mit den Σ-Coordinaten $x_1+x_2i|y_1+y_2i$, deren reelle Ebene die Feldgerade des atropen Punktes ist.

Wenn das Gewicht des Punktes nicht verschwindet, so ist seine Verbindungslinie mit $0|0|i$ die *v. Staudt*sche Gerade II. Art, deren Träger die lineare Congruenz ist, die als heterotroper Punkt mit den Coordinaten $x_1+x_2i|y_1+y_2i$ bezeichnet wurde. Um wenigstens für diesen Fall die einfache Rechnung, die diese Behauptung bestätigt, durchzuführen, berechne man die 6 Coordinaten der Verbindungslinie von $0|0|i$ und $x|y|0$. Man findet sie gleich

$$x:y:-i:-yi:xi:0.$$

Damit der Strahl, der die Σ-Gerade $X|Y$ repräsentirt, dessen 6 Coordinaten also

$$Y_1:-X_1:X_1Y_2-Y_1X_2:X_2:Y_2:1$$

*) Vergl. hierzu *Klein*: Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie Bd. I, S. 72.

sind, die imaginäre Verbindungslinie schneide, muss bekanntlich die Gleichung

$$x\cdot X_2+y\cdot Y_2-i-yi\cdot Y_1-xi\cdot X_1+0\cdot(X_1Y_2-Y_1X_2)=0$$

oder

$$x\cdot X+y\cdot Y+1=0$$

erfüllt sein. Das ist aber gerade die Gleichung des Σ-Punktes $x|y$.

Die *v. Staudt*sche Gerade ist die eine imaginäre Directrice des heterotropen Punktes, die andere ist die conjugirte Gerade, die den Punkt $0|0|-i$ mit dem imaginären Punkt $x_1-x_2i|y_1-y_2i|0$ von σ verbindet. Die beiden conjugirten Geraden II. Art schneiden sich in dem heterotropen Punkt, der als ihr gemeinsamer realer Träger anzusehen ist.

Es möge ausdrücklich hervorgehoben werden, dass, während zwei conjugirten *v. Staudt*schen Geraden dieselbe lineare Congruenz als Träger dient, zwei conjugirte heterotrope Punkte — ebenso wie zwei conjugirte Σ-Gerade — vollständig von einander getrennte Gebilde sind, die nur die Basis und einen Strahl der σ-Ebene gemeinsam haben. Die Trennnng conjugirter Elemente ergiebt sich also in Σ ebenso naturgemäss wie in der *Gauss*schen Ebene.

§ 6. Die Geometrie des Punktes und der Geraden in Σ.

Der Punkt und die Gerade stehen sich in Σ dual gegenüber. Zwei Punkte bestimmen eine Gerade, ihre Verbindungslinie, deren Coordinaten sich aus den Gleichungen der Punkte eindeutig ergeben. Liegen beide Punkte auf derselben Feldgeraden, so ist diese ihre Verbindungslinie. Es steht natürlich nichts im Wege, in diesem Falle den Strahl, der die Punkte im gewöhnlichen Sinne des Wortes verbindet, als Bild der Feldgeraden zu betrachten, oder auch, besonders wenn es sich um zwei conjugirte Punkte handelt, den Strahl, in dem die Feldgerade die σ-Ebene schneidet, d. h. den *v. Staudt*schen Träger der beiden Punkte.

Ebenso bestimmen zwei Gerade einen Punkt, ihren Schnittpunkt; er ist im allgemeinen heterotrop und nur dann atrop, wenn sich die Geraden im gewöhnlichen Sinne des Wortes schneiden. Eine Feldgerade wird von jeder eigentlichen Geraden in einem atropen Punkte geschnitten. Jede Gerade hat einen Punkt mit unendlich grossen Coordinaten, nämlich ihren Schnittpunkt mit der Nullgeraden ST. Für eine Feldgerade ist dies ein atroper Punkt von ST, z. B. für die Gerade $y=0$ der Punkt S, sodass die Coordinatenebenen, als Σ-Geraden betrachtet, einen Punkt ∞ besitzen in

Uebereinstimmung mit der in der Functionentheorie benutzten *Gauss*schen Ebene. Jeder Punkt hat eine Gerade mit unendlich grossen Coordinaten, nämlich seine Verbindungslinie mit dem Nullpunkt; für einen atropen Punkt ist diese Gerade die Feldgerade, auf der er liegt.

Die Geraden $X|Y$, deren Gewicht $X_1Y_2 - Y_1X_2 = 0$ ist, schneiden die Nullgerade ST in atropen Punkten, sie bilden also einen speciellen linearen Complex. Alle Geraden, für die $X_1Y_2 - Y_1X_2$ gleich einer constanten reellen Zahl P ist, bilden, weil $X_1Y_2 - Y_1X_2$ zu den 6 reellen Coordinaten von $X|Y$ gehört, einen nicht speciellen linearen Complex. Dieser hat mit einem heterotropen Punkt im allgemeinen eine Regelschar gemeinsam, die zu der Serie von Regelscharen gehört, deren Mittelstrahl die Charakteristik des Punktes ist. Für alle reellen Werthe von P erhält man einen Büschel von linearen Complexen, dessen specielle Complexe aus den die Nullgerade und den die Basis schneidenden Strahlen bestehen. Zwei lineare Complexe, die zu entgegengesetzten Werthen von P gehören, liegen in Involution.

Jeder lineare Complex, der zu einem von Null und unendlich verschiedenen P gehört, besteht zugleich aus den Charakteristiken aller der heterotropen Punkte, deren Gewicht $p = x_1y_2 - y_1x_2$ den constanten Werth $-1:4P$ besitzt, denn aus

$$X = -\frac{y_2 + y_1 i}{2p}, \qquad Y = \frac{x_2 + x_1 i}{2p}$$

folgt

$$P = -1:4p.$$

Die Coordinaten $X|Y$ aller Geraden eines nicht auf ST liegenden von $0|0$ verschiedenen Punktes $a|b$ erhält man mit Hülfe eines complexen Parameters $\varkappa$, indem man

$$X = -\frac{1}{a + b\varkappa}, \qquad Y = -\frac{\varkappa}{a + b\varkappa}$$

setzt. Für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \infty$ ergeben sich die Coordinaten des Punktes, für $\varkappa = -a:b$ seine Verbindungslinie mit dem Nullpunkt, für $\varkappa = -(a_1 - a_2 i):(b_1 - b_2 i)$ seine Charakteristik. Für $\varkappa = 1$ wird

$$X = Y = -\frac{1}{a + b};$$

dieser Strahl steht auf den beiden Coordinatenebenen senkrecht, wenn man mit *Weierstrass* als solche zwei parallele congruente *Gauss*sche Ebenen nimmt, deren Nullpunkte auf einer auf beiden Ebenen senkrechten Geraden liegen.

Das Doppelverhältniss (*DV*) von 4 Geraden eines Punktes wird definirt als das *DV* ihrer *X*-Coordinaten oder ihrer *Y*-Coordinaten. Diese beiden *DV* haben gleichen Werth und denselben Werth hat auch das aus den Parameterwerthen der 4 Geraden gebildete *DV*.

Zwei Punkte werden dadurch projectisch auf einander bezogen, dass man die Geraden beider Punkte durch Parameter $\varkappa$ und $\varkappa'$ darstellt und diese durch eine Gleichung von der Form

$$\varkappa' = \frac{\nu + \varkappa n}{\mu + \varkappa m}$$

von einander abhängen lässt, wo $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$, etc. ist. Die zu entsprechenden Werthen von $\varkappa$ und $\varkappa'$ gehörigen Geraden sind einander zugeordnet. Je 4 Gerade des einen Punktes haben dann dasselbe *DV* wie die entsprechenden Geraden des anderen.

Die projectivische Beziehung ist bestimmt, wenn man drei Geraden des einen Punktes drei beliebige Gerade des anderen Punktes zuweist, denn dadurch sind die Verhältnisse $\mu : m : \nu : n$ bestimmt.

Bezeichnet man den zu $\varkappa$ conjugirten Werth mit $\bar{\varkappa}$ und setzt

$$\varkappa' = \frac{\nu + \bar{\varkappa} n}{\mu + \bar{\varkappa} m},$$

so sind die Punkte, deren Gerade durch die Parameter $\varkappa$ und $\varkappa'$ bestimmt werden, nach einem Ausdruck des Herrn *Segre* antiprojectivisch auf einander bezogen. Die *DV* von entsprechenden Geradenquadrupeln sind dabei conjugirt complex.*)

Wenn das *DV* von 4 Geraden eines Punktes einen reellen Werth hat, z. B. -1 bei harmonischer Lage der Geraden, so sagt man nach *v. Staudt*, dass sie zu derselben *Kette***) des Punktes gehören. Bei projectivisch auf einander bezogenen Punkten entspricht also einer Kette des einen eine Kette des anderen. Von einer Kette können drei Gerade eines Punktes beliebig angenommen werden; sie besteht aus den Geraden der

---

*) An die Anmerkung auf Seite 234 anknüpfend, möge hier bemerkt werden, dass 4 Punkte einer Geraden und ihre Charakteristiken antiprojectivisch auf einander bezogen sind. Die 4 Charakteristiken haben nämlich als Gerade des dem System Σ dual entsprechenden Systems betrachtet ein *DV*, weil sie zu derselben „Ebene“ gehören, und dieses *DV* hat den conjugirt complexen Werth zu dem *DV* der 4 Punkte.

**) Beiträge zur Geometrie der Lage. § 15.

Regelschar, die durch diese Geraden bestimmt wird. Die Regelschar geht in einen Kegel über, wenn der Punkt atrop ist.

Alle Geraden $X|Y$ einer beliebigen Kette des Punktes $a|b$ erhält man, wenn man in

$$X = -\frac{\mu+km}{(\mu+km)a+(\nu+kn)b}, \quad Y = -\frac{\nu+kn}{(\mu+km)a+(\nu+kn)b}$$

den Parameter k alle reellen Werthe durchlaufen lässt.

Da $(\nu+kn):(\mu+km)$ und damit X und Y von k unabhängig wären, wenn $\nu m-\mu n = 0$ wäre, so möge dieser Ausdruck — die Determinante der Kette — von Null verschieden vorausgesetzt werden. Die Eigenschaften der Kette hängen hauptsächlich von den Werthen der Grössen

$$\mu_1 m_2-\mu_2 m_1 = \alpha, \qquad \nu_1 n_2-\nu_2 n_1 = \beta,$$

$$\mu_1 n_2-\mu_2 n_1+\nu_1 m_2-\nu_2 m_1 = \gamma, \qquad \mu_1 n_1+\mu_2 n_2-\nu_1 m_1-\nu_2 m_2 = \delta$$

ab; $\gamma^2+\delta^2-4\alpha\beta$ ist die Norm der Determinante, also eine positive Zahl.

Dass 4 Gerade, deren Coordinaten durch die angegebenen Functionen des reellen Parameters k bestimmt werden, zu einer Kette gehören, folgt daraus, dass ihr DV gleich dem ihrer Parameterwerthe ist.

Die Spuren der zu einer Kette gehörenden Geraden in den Coordinatenebenen liegen, wie man durch Trennung des Reellen und Imaginären und Elimination von k findet, auf einem durch die Punkte J und J' der Basis gehenden Kegelschnitt, der in Uebereinstimmung mit der hier gebrauchten Benennung schon im § 2 als Kette bezeichnet wurde.

Eine Gerade, deren Coordinaten

$$-\frac{1}{a+b\varkappa} \Big| -\frac{\varkappa}{a+b\varkappa}$$

sind, liegt auf der einen oder der anderen Seite der Kette, je nachdem in der Gleichung

$$\varkappa = \frac{\nu+Kn}{\mu+Km}$$

die complexe Zahl K, oder auch je nachdem das DV, das die Gerade mit 3 festen Geraden der Kette bestimmt, einen positiven oder einen negativen imaginären Bestandtheil hat.

Durch einen Punkt der Nullgeraden, der die Gleichung

$$aX+bY = 0$$

hat, gehen alle Geraden mit den Coordinaten

$$b\varkappa | -a\varkappa.$$

Eine Kette eines solchen Punktes besteht aus den Geraden

$$b\cdot\frac{\nu+kn}{\mu+km}\;\Big|\;-a\cdot\frac{\nu+kn}{\mu+km}.$$

Eine Kette des Nullpunktes endlich wird von Geraden gebildet, deren Gleichungen die Form

$$(\nu+kn)x-(\mu+km)y=0$$

haben. Wenn in diesem Falle die Constanten der Kette so beschaffen sind, dass $(\nu+kn):(\mu+km)$ für alle reellen Werthe von k reell ist, so erhält man insbesondere die Kette der Feldgeraden.

Alles, was über die Parameterdarstellung der Geraden eines Punktes und die von ihnen gebildeten Ketten gesagt ist, überträgt sich dual entsprechend auf die Punkte einer Geraden. Nur kann man sich die aus ∞^1 Punkten bestehenden Ketten einer Geraden natürlich nicht durch Regelscharen unmittelbar veranschaulichen, sondern erst durch Vermittelung der Charakteristiken.

Es liegt nahe, den Complex zu bestimmen, der aus den ∞^3 Geraden der die Kette bildenden Punkte besteht. Wenn die Gerade nicht durch den Nullpunkt geht, ist dieser Complex ein *tetraedaler* oder *Reye*scher Complex, dessen Haupttetraeder von zwei Ebenen der ζ-Axe (der Basis) und den conjugirt imaginären Ebenen

$$(A_1\pm A_2 i)\xi+(B_1\pm B_2 i)\eta\pm i\zeta+1=0$$

gebildet wird, die die Punkte J und J' der Basis mit der Geraden $A|B$ verbinden. Das DV der Schnittpunkte eines beliebigen Complexstrahles mit den Tetraederebenen ergiebt sich gleich

$$\frac{\delta-\sqrt{4\alpha\beta-\gamma^2}}{\delta+\sqrt{4\alpha\beta-\gamma^2}},$$

ist also von $A|B$ unabhängig.

Wenn $A|B$ die Nullgerade ist und zugleich die Kette dahin specialisirt wird, das $\alpha=\beta=\delta=0$, $\gamma\gtrless 0$ ist, so erhält man den Complex

$$X_1Y_1+X_2Y_2=0$$

aller Geraden mit rein imaginärem Coordinatenverhältniss. Das Haupttetraeder besteht in diesem Falle aus den beiden Coordinatenebenen und den Ebenen $\zeta=\pm i$, das DV ist gleich -1. Auch der specielle lineare Complex

$$X_1Y_2-Y_1X_2=0$$

der die Nullgerade in atropen Punkten schneidenden Geraden mit reellem Coordinatenverhältniss ist als besonderer Fall in dem allgemeinen Kettencomplex enthalten.

Eine eigentliche Gerade besitzt eine ausgezeichnete Kette, nämlich die ihrer atropen Punkte, die sich ergiebt, wenn $(\nu + kn):(\mu + km)$ für alle reellen Werthe von k reell ist.

Wenn die Gerade, deren Ketten betrachtet werden, eine Feldgerade ist, so gehen die Ketten in die früher schon so benannten Kegelschnitte über, und wenn zu den Punkten der Kette der Nullpunkt gehört, in die geraden Linien der Feldgeraden.

Die Verbindungslinien der Punkte einer auf einer Geraden liegenden Kette mit einem Punkt ausserhalb der Geraden bilden eine Kette; die Geraden einer Kette eines Punktes schneiden eine nicht zu dem Punkt gehörende Gerade in einer Kette, wie das für den Fall, dass die Gerade eine der Coordinatenebenen ist, schon erwähnt wurde.

Statt die Parameterdarstellung zu benutzen, die ich hier bevorzugt habe, weil die Coordinaten des Grundgebildes darin vorkommen, hätte man auch z. B. alle Punkte der Verbindungslinie der Punkte $a|b$ und $a'|b'$ durch

$$a + \lambda(a' - a) \mid b + \lambda(b' - b)$$

oder durch

$$\frac{a + \lambda a'}{1 + \lambda} \,\Big|\, \frac{b + \lambda b'}{1 + \lambda}$$

darstellen können, wo λ ein complexer Parameter ist. Auch hierbei ist das DV von 4 Elementen gleich dem DV ihrer Parameterwerthe.

Auf die lineare Transformation der Σ-Coordinaten will ich hier nicht eingehen, weil das zu weit führen würde. Es möge jedoch bemerkt werden, dass natürlich, auch wenn man die Punkte und Geraden von Σ durch eine lineare Transformation mit neuen Coordinaten bezeichnet, der ursprüngliche Nullpunkt und die Geraden des Nullpunktes geometrisch ausgezeichnete Elemente bleiben, da ja die Punkte von Σ zerfallende oder nicht zerfallende Congruenzen sind, zu deren Strahlen immer die Basis gehört. Wenn man statt des ausgezeichneten Coordinatendreiecks, von dem zwei Seiten Feldgeraden sind, ein beliebiges Coordinatendreieck mit drei eigentlichen Geraden als Seiten einführt, so bietet es natürlich keinen Vortheil mehr, eine Seite vor den anderen auszuzeichnen, und man wird deshalb in diesem Falle homogene Coordinaten benutzen. Ich werde aber das bisherige Coordinatensystem auch im Folgenden beibehalten, weil die atropen Punkte in diesem auf die einfachste Weise, nämlich durch ihr reelles Coordinatenverhältniss gekennzeichnet sind.

§ 7. Die Curven und Congruenzen in Σ.

Eine Σ-Curve wird ebenso definirt wie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie der Ebene, indem man z. B. die Coordinaten eines Punktes der Curve als Functionen eines Parameters darstellt, der aber hier alle complexen Werthe durchläuft. Alle elementaren Fragen der projectivischen Geometrie einer ebenen Curve werden auf die Geometrie von Σ übertragen und in bekannter Weise beantwortet. Eine algebraische Curve n-ter Ordnung z. B. hat mit jeder Geraden n, mit einer Curve m-ter Ordnung mn Punkte gemeinsam, die alle reale Gebilde sind, und zwar im allgemeinen heterotrope Punkte. Mit einer Feldgeraden hat die Curve n Punkte gemeinsam, die — eventuell mit Ausnahme des Nullpunktes — alle atrop sind. Eine beliebige Curve n-ter Ordnung hat deshalb ∞^1 atrope Punkte, die den *Weg* der atropen Punkte oder kurz den atropen Weg der Curve bilden; er entspricht dem *Lie*schen „Nullstreifen". Nur wenn die Σ-Curve aus lauter Geraden des Nullpunktes besteht, fehlt ihr der atrope Weg; dieser Fall soll im Folgenden ausgeschlossen bleiben. Der atrope Weg, eine Raumcurve im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes, ist ein bequemes Mittel, um die Curve zur Anschauung zu bringen, gerade so wie bei einer eigentlichen Geraden ja auch die Kette der atropen Punkte dazu dient. Wenn eine Curve, wie dies vorausgesetzt werden möge, durch analytische Functionen definirt ist, so stimmen die Curven mit demselben atropen Weg auch in ihren ∞^2 heterotropen Punkten überein.

Ist die Σ-Curve durch eine Gleichung mit reellen Coefficienten definirt, so liegt, falls sie nicht etwa nulltheilig ist, der atrope Weg oder ein Zweig von ihm in der Ebene σ und bildet die durch die Gleichung bestimmte ebene Curve, auf die man gewöhnlich allein Rücksicht nimmt. Ein Zweig des atropen Weges, der die Ebene σ in einem nicht auf der eben erwähnten Curve liegenden Punkte schneidet, bestimmt als seinen Schnittpunkt einen isolirten Punkt der Curve, der also in Σ nicht isolirt ist.

Die Grenzlage, der die Verbindungslinie eines nicht singulären Punktes der Σ-Curve mit einem benachbarten Punkte, d. h. einem solchen, dessen Coordinaten sich von denen des festen Punktes nur wenig unterscheiden, zustrebt, ist unabhängig davon, wie sich der Nachbarpunkt dem festen Punkt nähert. Das folgt aus der Fundamentaleigenschaft des Differentialquotienten einer Function complexen Arguments. Die Tangente einer Σ-Curve hat deshalb dieselbe Gleichung wie die einer reellen ebenen Curve. Sind $x|y$ die Coordinaten des Berührungspunktes und $X|Y$ die der Tangente, so ist, wenn die Ableitung nach dem Parameter durch einen Strich bezeichnet wird,

$$y':x' = -X:Y$$

oder, wenn x die unabhängige Variabele ist,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{X}{Y}.$$

Der Differentialquotient ist also gleich dem negativen reciproken Werth des Coordinatenverhältnisses der Tangente oder auch gleich dem Coordinatenverhältniss des Punktes der Nullgeraden, der von der Tangente getroffen wird, ganz analog wie in der reellen Geometrie der Ebene.

Wenn der Berührungspunkt atrop ist, so hat er im allgemeinen zwei benachbarte atrope Punkte. Die atrope Kette der Tangente ist in diesem Falle die Tangente im gewöhnlichen Sinne des Wortes an dem atropen Weg, der durch den Punkt geht. Ist die Tangente eine Feldgerade, wobei der Berührungspunkt — wenn es nicht der Nullpunkt ist — atrop ist, so ist die Feldgerade nach gewöhnlicher Ausdrucksweise eine Tangentialebene des atropen Weges und eine — oder wenn der atrope Weg sich in dem Punkte verzweigt — mehrere gerade Ketten der Feldgeraden sind die gewöhnlichen Tangenten des atropen Weges. Dabei hat aber die Curve thatsächlich nur eine Tangente in dem Punkte, nämlich die Feldgerade, und ein solcher Punkt ist auch in dem Falle der Verzweigung des atropen Weges im allgemeinen nicht ein Doppelpunkt der Σ-Curve und entspricht auch keineswegs einem *Riemann*schen Verzweigungspunkt der durch die Gleichung der Curve definirten Function complexen Arguments.

Von einem beliebigen Punkt aus kann man eine bestimmte Zahl von Tangenten an eine algebraische Σ-Curve legen. Diese Zahl N, die Klasse der Curve, und ebenso auch die Singularitäten der Curve und das von ihnen abhängige Geschlecht werden in bekannter Weise bestimmt. Alle N Tangenten sind real. Dagegen können die Tangenten, die in einer beliebigen Ebene liegen, zum Theil oder alle nicht real sein, denn bei ihrer Bestimmung verlässt man das Gebiet von Σ. Soll nämlich die Gerade $X|Y$ — genau genommen ihre atrope Kette — in der Ebene mit den reellen

Coordinaten $u|v|w$ liegen, so müssen die Gleichungen

$$X_1 + wX_2 = u,$$
$$Y_1 + wY_2 = v$$

erfüllt sein. Diese linearen Gleichungen zusammen mit den beiden Gleichungen N-ten Grades, in die man die Gleichung N-ten Grades in $X|Y$ der die Curve einhüllenden Tangentencongruenz zerlegen kann, bestimmen die Coordinatenbestandtheile X_1 etc. derartig, dass man N^2 Werthsysteme bekommt, die aber nicht alle reell zu sein brauchen. Die Tangentencongruenz ist also vom Bündelgrad N (alle Tangenten eines Punktes sind real) und vom Feldgrad N^2 (die Tangenten einer Ebene sind nicht immer alle real).

Die Anzahl der Punkte, die der atrope Weg mit einer beliebigen Ebene gemeinsam hat, oder die Ordnung dieser Raumcurve im gewöhnlichen Sinne, kann folgendermassen bestimmt werden. Man führe in die Gleichung der Curve statt der $x|y$-Coordinaten die reellen Coordinaten $\xi|\eta|\zeta$ ein, multiplicire mit dem Generalnenner $(1+\zeta i)^n$ und trenne das Reelle vom Imaginären. So erhält man zwei Gleichungen n-ten Grades in ξ, η, ζ, die zwei Flächen n-ter Ordnung bestimmen. Diese schneiden sich in einer Raumcurve n^2-ter Ordnung, dem atropen Weg der Σ-Curve, der also mit einer beliebigen Ebene n^2 Punkte gemeinsam hat. Diese Punkte sind nicht alle real, denn sobald man eine beliebige Ebene in Betracht zieht, geht man über das Gebiet von Σ hinaus. Auch ist ein Ebenenbüschel von vornherein bekannt, in dessen Ebenen, wenn die Curve nicht durch den Nullpunkt geht, genau n immer reale Punkte des atropen Weges liegen, nämlich das Büschel der Feldgeraden, als Σ-Gerade hat jede Feldgerade n reale Punkte mit der Curve gemeinsam.

Der atrope Weg kann auch als die reelle Curve des imaginären Kegels betrachtet werden, der den Punkt J der Basis mit der in der Ebene σ liegenden imaginären Curve verbindet, oder als Schnitt dieses Kegels mit seinem conjugirten.

Die Berührungspunkte der Tangenten, die vom Mittelpunkt T des x-Coordinatenbündels aus an die Σ-Curve gelegt werden können, entsprechen den nicht singulären *Riemann*schen Verzweigungspunkten, wenn y als Function von x betrachtet wird. Sie unterscheiden sich geometrisch natürlich im allgemeinen nicht von einem beliebigen Curvenpunkte. Die n Schnittpunkte eines beliebigen x-Coordinatenstrahles mit der Curve ergeben als die zugehörigen y-Coordinaten die n Werthe der Function y von x. Man kann sich diese Schnittpunkte z. B. durch ihre Charakteristiken kenntlich gemacht denken; wenn von den n Charakteristiken zwei oder mehrere zusammenfallen, ist der Punkt ein Verzweigungspunkt. Darüber, ob der Punkt ein singulärer Punkt ist, giebt dann die Bestimmung der Tangente weiteren Aufschluss.

Alles, was über die Σ-Curven ausgesagt ist, gilt dual entsprechend von den Σ-Congruenzen, die in derselben Weise durch Geradencoordinaten bestimmt werden wie die Curven durch Punktcoordinaten. Hierbei haben die den atropen Punkten entsprechenden, die Nullgerade schneidenden Geraden der Congruenz kein besonderes geometrisches Interesse. Um sich eine Congruenz vorzustellen, bedarf man aber auch eines dem atropen Weg analogen Hülfsmittels nicht, da jede Gerade der Congruenz, abgesehen von der bei einer algebraischen Congruenz endlichen Zahl von uneigentlichen Geraden, durch ihre atrope Kette in der Vorstellung vertreten wird.

Die Congruenz, die eine gegebene Curve umhüllt, kann sehr gut dazu benutzt werden, den ganzen Verlauf der Curve, der ja durch den atropen Weg zwar bestimmt, aber nicht vollständig veranschaulicht wird, der Vorstellung zugänglich zu machen. Zu demselben Zweck kann man auch die Congruenz verwenden, die von den Charakteristiken der heterotropen Punkte der Curve gebildet wird.

§ 8. Die Kegelschnitte in Σ.

Die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung sei

$$u \equiv ax^2+by^2+c+2fy+2gx+2hxy = 0,$$

wo die Coefficienten $a = a_1+a_2 i$ etc. zunächst ganz allgemein vorausgesetzt werden. Der atrope Weg ist der Schnitt der beiden nach der Vorschrift des vorigen Paragraphen bestimmten reellen Flächen zweiten Grades

$$P \equiv a_1\xi^2+b_1\eta^2-c_1\zeta^2+c_1-2f_2\eta\zeta-2g_2\xi\zeta+2h_1\xi\eta+2g_1\xi+2f_1\eta-2c_2\zeta = 0,$$
$$Q \equiv a_2\xi^2+b_2\eta^2-c_2\zeta^2+c_2+2f_1\eta\zeta+2g_1\xi\zeta+2h_2\xi\eta+2g_2\xi+2f_2\eta+2c_1\zeta = 0,$$

also eine Raumcurve 4. Ordnung, 1. Art. Die Flächen schneiden die ζ-Axe in den realen Punkten

$$(-c_2\pm\sqrt{c_1^2+c_2^2}):c_1 \quad \text{und} \quad (c_1\pm\sqrt{c_1^2+c_2^2}):c_2,$$

die sich harmonisch trennen. Daraus folgt, was ja auch aus den allgemeinen

Betrachtungen des § 7 schon bekannt war, dass der atrope Weg immer real ist.

Von den vier Kegeln zweiter Ordnung, die sich durch die Curve vierter Ordnung legen lassen, haben zwei ihre Scheitelpunkte in den Punkten J und J' der Basis. Wenn $c = 0$ ist, so fallen auch die Scheitel der beiden anderen Kegel mit diesen Punkten zusammen, und der atrope Weg zerfällt in die Basis und eine Raumcurve dritter Ordnung, die durch J und J' geht.

Wenn die Coefficienten von $u = 0$ alle reell sind, bleibt die Fläche $P = 0$ im allgemeinen eine nicht singuläre Fläche, $Q = 0$ dagegen geht über in

$$2f_1\eta\zeta+2g_1\xi\zeta+2c_1\zeta = 0$$

und zerfällt in die beiden Ebenen

$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \nu \equiv g_1\xi+f_1\eta+c_1 = 0.$$

Die erste Ebene ist die Ebene σ, die zweite ist die Polarebene des Nullpunktes N von σ in Bezug auf $P = 0$ und geht durch den Punkt M oder $0|0|\infty$. Die Fläche $P = 0$ schneidet die ζ-Axe in den Punkten $0|0|\pm 1$. Wenn $P = 0$ nicht geradlinig ist, so liegt entweder N oder M im Innern der Fläche, und je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, schneidet $\nu = 0$ oder $\zeta = 0$ die Fläche nicht, während bezw. $\zeta = 0$ oder $\nu = 0$ die Fläche in einem realen Kegelschnitt schneidet, der also in diesem Falle allein den atropen Weg von $u = 0$ bildet. Jede Feldgerade hat mit diesem Kegelschnitt, der die Basis umschliesst, zwei reale Punkte gemeinsam. Im ersten Falle ist der in der Ebene σ liegende reelle Kegelschnitt

$$w \equiv a_1\xi^2+b_1\eta^2+c_1+2f_1\eta+2g_1\xi+2h_1\xi\eta = 0$$

die reelle ebene eintheilige Curve, die in der elementaren analytischen Geometrie allein berücksichtigt zu werden pflegt. Im zweiten Falle ist diese Curve nulltheilig, aber in $\nu = 0$ liegt dann ein realer Kegelschnitt.*)

Ist $P = 0$ eine geradlinige Fläche, so schneidet sowohl $\zeta = 0$, als auch $\nu = 0$ die Fläche in einem realen Kegelschnitt,*) der erstere ist der gewöhnlich allein in Betracht gezogene. Die beiden Kegelschnitte durchschneiden sich auf der Polaren von N in Bezug auf den ersten von ihnen. Diese Schnittpunkte sind zugleich die Berührungspunkte der vom Nullpunkt aus an $u = 0$ gelegten Tangenten, die also jetzt Feldgerade sind.

---

*) Der in $\nu = 0$ liegende Kegelschnitt entspricht der „reellen Nebencurve“ des Herrn *Suhle,* dessen Arbeiten ich in § 1 citirt habe.

Auf die weitere Behandlung der Gleichung $u = 0$ muss ich hier verzichten; ich verweise auf die in dieser Beziehung ausführlichere Abhandlung von *Lie* bezw. auf die Bearbeitung von Herrn *Domsch.* Nur auf einen Punkt möchte ich hinweisen, in dem ich mich mit *Lie* (oder Herrn *Domsch*) im Widerspruch befinde, weil er mir von principieller Bedeutung zu sein scheint. *Lie* ist nämlich der Ansicht, dass die projectivische Erzeugung eines reellen Kegelschnittes sich nicht auf die Σ-Kegelschnitte im allgemeinen übertragen liesse, sondern dass bei projectivischer Beziehung der Strahlen zweier Punkte immer ein solcher Kegelschnitt erzeugt würde, dessen atroper Weg (Nullstreifen) eine Raumcurve dritter Ordnung wäre. Das ist nicht zutreffend, wenigstens wenn man die von mir gegebene Definition der projectivischen Beziehung zu Grunde legt, bei der man genau wie in der reellen Geometrie der Ebene einen durch 5 beliebige Punkte gegebenen, also vollkommen allgemeinen Σ-Kegelschnitt durch projectivische Beziehung der Strahlen von zwei der 5 Punkte erhält. Dieser Unterschied zwischen den Resultaten, zu denen die Methode *Lies* und die meinige führt, erklärt sich wohl nicht daraus, dass das von mir definirte System Σ mit dem räumlichen System von *Lie* und also der atrope Weg mit dem Nullstreifen allerdings nicht identisch sind, sondern wahrscheinlich aus einer verschiedenen Auffassung der Projectivität, die bei Herrn *Domsch* nicht ausführlich definirt ist. Es wird nämlich (Seite 16) behauptet, die Strahlen zweier projectivisch auf einander bezogenen Punkte erzeugten in einer beliebigen Ebene zwei collineare Punktfelder. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall, wenn die projectivische Beziehung so definirt wird, wie ich es gethan habe.

§ 9. Maassbestimmungen in Σ.

Bis jetzt sind nur die von jeder Maassbestimmung unabhängigen Eigenschaften des Systems Σ betrachtet worden. Um auch metrische Sätze der reellen Geometrie der Ebene auf Σ zu übertragen, kann man als fundamentale Maassfunctionen den Dreiecksinhalt und dessen duales Analogon zu Grunde legen. Der „Punktinhalt“ eines Dreiecks wird mittelst der Coordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ebenso definirt wie in der elementaren analytischen Geometrie der Ebene; ein Dreieck im gewöhnlichen Sinne des Wortes, das auf einer Feldgeraden liegt, hat dabei natürlich den Inhalt Null, weil seine drei Ecken auf derselben Geraden liegen. Der „Strahleninhalt“ eines Dreiseits wird aus den Coordinaten der drei Seiten ebenso abgeleitet wie der Punktinhalt aus den Coordinaten dreier Punkte. Nimmt man zu diesen Maassfunctionen, die durch die gegenseitige Lage dreier Elemente bestimmt sind, noch die Differenzen zwischen den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Geraden hinzu, so kann man viele Sätze der ebenen Maassgeometrie auf Σ übertragen.*)

Wenn man jedoch verlangt, dass die Maassfunctionen bei ∞^3 Collineationen (bezw. ∞^6, da jeder Coefficient einer linearen Transformation ∞^2 complexe Werthe annehmen kann), die den Bewegungen einer reellen Ebene entsprechen, unverändert bleiben, so muss man eine *Cayley*sche Maassbestimmung anwenden.**) Eine solche erhält man, wenn man eine Curve zweiten Grades $u = 0$ als absolutes Gebilde einführt, das bei den als Bewegungen bezeichneten Collineationen in sich selbst übergeht. Der Abstand zweier Punkte ist dann bekanntlich der mit einer Constanten multiplicirte Logarithmus des *DV*, das die beiden Punkte mit den Punkten bestimmen, in denen ihre Verbindungslinie die Curve $u = 0$ schneidet. Ebenso ist der Winkel zweier Geraden der mit einer Constanten multiplicirte Logarithmus des *DV*, das die Geraden mit den von ihrem Schnittpunkt aus an die absolute Curve gelegten Tangenten bestimmen. Der Dreiecksinhalt wird jetzt selbstverständlich anders definirt als bei der elementaren Maassbestimmung, die die Coordinaten benutzt, ohne einen Kegelschnitt als absolutes Gebilde zu betrachten.

Wenn die Curve $u = 0$ complexe Coefficienten hat, so eignet sich diese *Cayley*sche Maassbestimmung übrigens nicht mehr dazu, als eine Veranschaulichung der Nicht-Euklidischen Geometrie zu dienen. Jede Gerade hat zwei — wenn sie Tangente von $u = 0$ ist, zusammenfallende — unendlich ferne Punkte, ihre Schnittpunkte mit $u = 0$, aber sie wird von jeder anderen Geraden in einem Punkte geschnitten, obgleich durch jeden Punkt zwei

---

*) Es möge hier darauf hingewiesen werden, dass Herr *Minkowski* in seiner „Geometrie der Zahlen" allgemeine homogene Functionen der Coordinatendifferenzen als Verallgemeinerungen des elementaren Distanzbegriffes einführt, und dass auch bei ihm das Volumen als fundamentale Maassfunction benutzt wird. Dem Gedanken, dass man in der oben angedeuteten Richtung die Euklidische Maassbestimmung verallgemeinern kann, habe ich in der Arbeit „Ueber den Dreiecksinhalt und sein duales Analogon" im 114. Bande dieses Journals Ausdruck zu geben versucht.

**) Vergl. die Arbeiten des Herrn *Klein*: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", Math. Ann. Bd. 4 und 6, sowie „Vorlesungen über die Nicht-Euklidische Geometrie" und die Einleitung zu *Fricke-Klein*'s „Theorie der automorphen Functionen", ferner *Clebsch-Lindemann*: „Vorlesungen über Geometrie", Bd. II.

„Parallelen" zu der Geraden gezogen werden können, die sie nämlich in ihren unendlich fernen Punkten schneiden. Wenn $u = 0$ reelle Coefficienten hat, bleibt für die reellen Gebilde der Ebene σ der Unterschied zwischen hyperbolischer und elliptischer Geometrie bestehen, und wenn z. B. insbesondere die Curve, als Klassencurve betrachtet, die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = 0$$

hat, d. h. wenn sie in die beiden auf der Nullgeraden ST liegenden „Kreispunkte" $X \pm iY = 0$ zerfällt, so wird die Maassbestimmung parabolisch und geht in die Euklidische über, wenn noch die Nullgerade unendlich fern angenommen wird.

Bei der parabolischen Maassbestimmung bleibt die Definition des Winkels zweier Geraden ohne weiteres gültig; als die Constante, mit der der Logarithmus des DV der beiden Geraden und der Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten zu multipliciren ist, nimmt man jetzt bekanntlich $-\frac{1}{2}i$. Die Bedingung dafür, dass zwei Gerade $X|Y$ und $X'|Y'$ einen rechten Winkel einschliessen, oder zu einander normal sind, ist dann

$$XX' + YY' = 0,$$

da zwei Gerade, deren Coordinaten diese Bedingung erfüllen, die Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten harmonisch trennen, so dass also ihr Winkel $= -\frac{1}{2}i \log(-1) = \frac{1}{2}\pi$ ist. Zwei Gerade sind parallel, wenn sie durch denselben Punkt der Nullgeraden ST gehen; der Winkel, den zwei solche Linien einschliessen, ist nämlich gleich Null, oder das entsprechende DV gleich 1, weil ja die Kreispunkte auf der Nullgeraden liegen. Durch einen Punkt geht jetzt zu einer Geraden nur eine Parallele, nämlich der durch den Punkt gehende Strahl des durch die Gerade und die Nullgerade bestimmten Punktes.

Die Entfernung zweier Punkte kann bei der parabolischen Maassbestimmung nicht unmittelbar mittelst des Ausdrucks $k \log DV$ definirt werden. Das DV ist jetzt constant gleich 1, weil die undualistisch specialisirte absolute Curve $u = 0$, als Ordnungscurve betrachtet, die doppelt zu nehmende Nullgerade ist. Nach Annahme eines unendlich grossen k kann man jedoch mittelst eines Grenzüberganges, wie Herr ***Klein*** gezeigt hat, den bekannten elementaren Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte ableiten. Zu demselben Ausdruck gelangt man auch durch die folgende Ueberlegung. Zwei parallele Gerade sind zu derselben dritten Geraden normal;

die Entfernung der Schnittpunkte der parallelen Geraden mit einer zu ihnen normalen Geraden soll nun so definirt werden, dass sie unverändert bleibt, welche dritte Gerade auch die beiden festen Parallelen normal schneidet, und dass sie verschwindet, wenn die beiden Parallelen zusammenfallen. Diese beiden Bedingungen führen durch eine einfache Rechnung zu dem Resultat, dass die Entfernung der beiden Punkte $x|y$ und $x'|y'$ eine Function von $(x'-x)^2+(y'-y)^2$ sein muss. Man setzt sie gleich $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$, um einen Ausdruck zu erhalten, der in eine Coordinatendifferenz übergeht, wenn die beiden Punkte auf demselben Coordinatenstrahl liegen. Hieraus folgt dann auch unmittelbar, dass der Abstand des Punktes $x'|y'$ von der Geraden $A|B$ gleich

$$\frac{Ax'+By'+1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ist, wenn man als diesen Abstand die Entfernung des Punktes $x'|y'$ von dem Fusspunkt der von $x'|y'$ auf $A|B$ gefällten Normalen definirt.

§ 10. Zahlentheoretische Anwendungen.

Die *Gauss*sche Function $[\gamma]$ kann bekanntlich definirt werden als die Anzahl von positiven ganzen Zahlen, deren absoluter Betrag $\overline{\overline{<}}\,|\gamma|$ ist. Diese Auffassung von $[\gamma]$ kann man auf einen complexen Werth von γ übertragen und mit Hülfe des Systems Σ gewisse Sätze der Zahlentheorie, in denen die Function $[\gamma]$ auftritt, auf complexe Zahlen ausdehnen. Schwieriger scheint es zu sein, auch die andere Bedeutung von $[\gamma]$, wonach dieser Ausdruck die grösste ganze Zahl bezeichnet, die $\overline{\overline{<}}\,\gamma$ ist, mit Erfolg im Gebiete der complexen Zahlen zu verwenden*); gerade diese Bedeutung von $[\gamma]$ kommt aber, wie ich glaube, bei dem von *Gauss* nicht veröffentlichten Beweis des biquadratischen Reciprocitätsgesetzes in erster Linie in Betracht. Da sich jedoch der *Eisenstein*sche geometrische Beweis des Reciprocitätsgesetzes so umformen lässt, dass dabei die Function $[\gamma]$ nur in der zweiten Bedeutung vorkommt, so hoffe ich, dass das System Σ sich auch bei der zweiten Bedeutung der Function $[\gamma]$ mit complexem Argument nützlich erweisen wird. Hier beschränke ich mich darauf, mit $[\gamma]$ eine gewisse Anzahl von ganzen Zahlen zu bezeichnen.

Die Function $y=f(x)$ erfülle in dem Bereich $\mathfrak{b}$ folgende Bedingungen:

---

*) Vergl. meine Arbeit „Ueber die Function $E(x)$ mit complexem Argument" im 110. Band dieses Journals und die Ergänzung dazu im III. Bande der Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.

$f(x)$ habe für jeden in $\mathfrak{b}$ liegenden Werth von x einen einzigen, endlichen Werth, und auch die inverse Function $x = F(y)$ habe für jeden in dem Bereich $\mathfrak{B}$, der durch $\mathfrak{b}$ bestimmt ist, liegenden Werth von y einen einzigen, endlichen Werth. Ferner möge aus der Beziehung

$$|y| \gtreqless |f(x)|$$

folgen

$$|F(y)| \gtreqless |x|.$$

Aus diesen Beziehungen, von denen die erste auch eine Folge der zweiten ist, ergiebt sich, dass $f(x)$ und $F(y)$ Functionen sind, deren absoluter Betrag nicht abnimmt, wenn der ihres Argumentes wächst.

Bezeichnet man dann mit $[f(x), \mathfrak{B}]$ die Anzahl der ganzen Zahlen, deren absoluter Betrag nicht grösser als $|f(x)|$ ist und die zugleich dem Bereich $\mathfrak{B}$ angehören, und mit $[F(y), \mathfrak{b}]'$ die Anzahl der zu $\mathfrak{b}$ gehörenden ganzen Zahlen, deren absoluter Betrag kleiner als $|F(y)|$ ist, sind ferner $[\mathfrak{b}]$, $[\mathfrak{B}]$ die Anzahlen der den Bereichen $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$ angehörenden ganzen Zahlen, *so ist*

$$(1.) \qquad \sum_{x=(\mathfrak{b})} [f(x), \mathfrak{B}] + \sum_{y=(\mathfrak{B})} [F(y), \mathfrak{b}]' = [\mathfrak{b}] \cdot [\mathfrak{B}],$$

wenn in der ersten Summe x alle ganzen Zahlen des Bereiches $\mathfrak{b}$, in der zweiten y alle ganzen Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}$ durchläuft.

Beweis. Unter einem Gitterpunkt verstehe ich, indem ich den von *Eisenstein* für reelle Punkte der Ebene aufgestellten und von Herrn *Minkowski**) verallgemeinerten Begriff auf das System Σ übertrage, einen Punkt, dessen beide Coordinaten ganze Zahlen sind. Dann bestimmen alle von T ausgehenden Coordinatenstrahlen mit ganzzahligen Werthen, die dem Bereich $\mathfrak{b}$ angehören, mit allen von S ausgehenden ganzzahligen Coordinatenstrahlen, die zu $\mathfrak{B}$ gehören, $[\mathfrak{b}] \cdot [\mathfrak{B}]$ Gitterpunkte. Diese Gitterpunkte werden nun nach der *Eisenstein*schen Methode noch auf eine zweite Weise abgezählt, indem man die von ihnen gebildete Mannigfaltigkeit durch die Curve $y = f(x)$ in zwei Theile zerlegt. Zu dem ersten werden die Punkte $x|y$ gerechnet, für die

$$|y| \lesseqgtr |f(x)|$$

ist, zu dem zweiten die, für die $|y| > |f(x)|$ ist. Die Anzahl aller Gitterpunkte des ersten Theiles ist gleich $\sum_{(\mathfrak{b})} [f(x), \mathfrak{B}]$, und weil nach der Voraus-

*) Geometrie der Zahlen, S. 73.

setzung für den zweiten Theil auch $|x| < |F(y)|$ ist, so ist die Anzahl aller Gitterpunkte des zweiten Theiles gleich $\sum_{(\mathfrak{B})}[F(y), \mathfrak{b}]'$.

Beispiel. Setzt man $f(x) = \frac{px}{q}$, wo $p = p_1 + p_2 i$ und $q = q_1 + q_2 i$ relative Primzahlen ohne reellen, von 1 verschiedenen, Theiler sein mögen, und $\mathfrak{b}$ gleich dem Bereich k_q, dem in einer gewöhnlichen *Gauss*schen Ebene das Quadrat mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}q$, $\frac{1}{2}(1+i)q$, $\frac{1}{2}iq$ entspricht, so ist $F(y) = \frac{qy}{p}$ und dem Bereich $\mathfrak{B}$ entspricht das Quadrat k_p mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}(1+i)p$, $\frac{1}{2}ip$. Die Voraussetzungen, denen $f(x)$ genügen muss, sind erfüllt. Es ist $[k_q] = \frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2-1)$, $[k_p] = \frac{1}{4}(p_1^2+p_2^2-1)$, wenn die Zahl Null von beiden Bereichen ausgeschlossen wird. Auf dem Rande von k_q und k_p kommen keine ganzen Zahlen vor. Die Gleichung (1.) geht jetzt über in

$$(2.) \qquad \sum_{(k_q)}\left[\frac{px}{q}, k_p\right] + \sum_{(k_p)}\left[\frac{qy}{p}, k_q\right]' = \frac{1}{16}(p_1^2+p_2^2-1)(q_1^2+q_2^2-1).$$

Diese Gleichung ist ein Analogon zu der Formel, auf die Gauss seinen dritten Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes gründet, und die Herleitung ist dem *Eisenstein*schen geometrischen Beweis dieses Satzes genau nachgebildet. Auf einem ganz anderen Wege habe ich dieselbe Gleichung — nachdem ich sie zuerst mittelst des Systems Σ gefunden hatte — im III. Bande der Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, S. 333 abgeleitet.

Für $p = 4+i$, $q = 3+2i$ z. B. enthält der Bereich k_q die Zahlen i, $1+i$, $2i$, der Bereich k_p die Zahlen i, $1+i$, $2i$, $1+2i$. Es ist $\left[\frac{pi}{q}, k_p\right] = 1$, da die Zahl i die einzige dem Bereich k_p angehörende ganze Zahl ist, deren absoluter Betrag $\overline{\gtrless} \left|\frac{(4+i)i}{3+2i}\right|$ ist. Ebenso findet man $\left[\frac{p(1+i)}{q}, k_p\right] = 2$, $\left[\frac{p\cdot 2i}{q}, k_p\right] = 4$ und ferner $\left[\frac{qi}{p}, k_q\right] = 0$, $\left[\frac{q(1+i)}{p}, k_q\right] = 1$, $\left[\frac{q\cdot 2i}{p}, k_q\right] = 2$, $\left[\frac{q\cdot(1+2i)}{p}, k_q\right] = 2$. Die linke Seite von (2.) ist also in diesem Falle gleich $7+5 = 12$ und die rechte ist $\frac{1}{16}\cdot 16\cdot 12 = 12$.

§ 11. Fortsetzung: die *Möbius*sche Factorentafel in Σ.

Eine zweite Anwendung des Systems Σ knüpft an die *Möbius*sche Abhandlung „Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel“ (dieses Journal, Band 22, und Gesammelte Werke, Bd. IV) an. Ich benutze jedoch die

Bezeichnung, die ich im 104. Bande dieses Journals in der Arbeit „Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie" gebraucht habe. Dort habe ich, ohne damals die *Möbius*sche Abhandlung zu kennen, die räumliche Anordnung der Theiler der natürlichen Zahlenreihe angegeben*) und zur Herleitung eines zahlentheoretischen Satzes benutzt, den ich hier auf complexe Zahlen übertragen will. Ich bemerke, dass von *Möbius* nur geometrische Eigenschaften der Factorentafel betrachtet werden, die sich ebenfalls auf das complexe Gebiet übertragen lassen.

Auf den x-Coordinatenstrahlen, wo x alle ganzen Zahlen durchläuft, mögen die Punkte als Theilerpunkte irgendwie markirt gedacht werden, deren y-Coordinate ein Theiler von x ist. Diese Theilerpunkte fallen dann offenbar andererseits zusammen mit den Punkten, die man erhält, wenn man auf den ganzen y-Coordinaten die Vielfachen der Zahl y markirt, mit der der Coordinatenstrahl bezeichnet ist. Die ganzen Punkte der Feldgeraden $x=0$ gehören alle zu den Theilerpunkten, nur nicht der Nullpunkt, der ebenso wie die übrigen auf $y=0$ liegenden ganzen Punkte nicht zu den Theilerpunkten zu rechnen ist. Die Theilerpunkte befinden sich auch sämmtlich auf den Geraden des Nullpunktes mit einer Gleichung

$$x = \varkappa y,$$

wo $\varkappa$ eine endliche ganze Zahl ist. Legt man durch den Gitterpunkt $a|0$ eine Gerade mit der Gleichung

$$x = \varkappa y + a,$$

so liegen auf ihr so viele Theilerpunkte wie a Theiler hat; denn ist y ein Theiler von a, so ist das zugehörige x ein Vielfaches von y, $x|y$ also ein Theilerpunkt, ist aber y kein Theiler von a, so ist x kein Vielfaches von y, also $x|y$ kein Theilerpunkt. Für $\varkappa = 0$ erhält man den Coordinatenstrahl $x = a$, auf dem die Theiler von a ursprünglich markirt waren.

Das Theilerpunktsystem ist eine im allgemeinen eindeutige (quadratische) Abbildung des Σ-Gitterpunktsystems, denn wenn $x'|y'$ ein Theilerpunkt ist und $x|y$ der entsprechende Gitterpunkt, so ist

$$x' = xy, \quad y' = y.$$

Allen Punkten von $y=0$ entspricht also der Punkt $0|0$, dessen Ausnahmestellung schon dadurch hervorgehoben wurde, dass er nicht zu den eigent-

*) Auch Herr *E. Schröder* hat in seiner „Note über die Algebra der binären Relative" (Math. Annalen, Bd. 46) dasselbe Princip unabhängig von *Möbius* und von mir aufgestellt.

lichen Theilerpunkten gerechnet wurde. Der Geraden $x = a$ entspricht die Gerade $x' = ay'$, der Geraden $y = b$ die Gerade $y' = b$. Die Punkte der Geraden $y = 1$ sind beiden Systemen entsprechend gemeinsam. Einer beliebigen Geraden in Σ entspricht in der Abbildung ein Kegelschnitt und ebenso einer Geraden der Abbildung ein Kegelschnitt in Σ, z. B. der Geraden $x' = n$ der Kegelschnitt $xy = n$.

Eine allgemeine Methode, um mit Hülfe des Theilerpunktsystems Lehrsätze über Theileranzahlen abzuleiten, besteht nun darin, dass man eine durch gegebene Bedingungen abgegrenzte Anzahl von Theilerpunkten auf doppelte Weise abzählt, nämlich erstens auf den x-Coordinatenstrahlen und zweitens auf den y-Coordinatenstrahlen. Die erste Abzählung liefert unmittelbar eine Theilerzahl der Zahlen x eines gegebenen Bereiches und zwar eine Anzahl von Theilern, die eine vorgeschriebene Bedingung erfüllen, die zweite Abzählung liefert eine Anzahl, die sich auf eine Summe von Anzahlen von ganzen Zahlen innerhalb gegebener Bereiche zurückführen lässt.

Es möge z. B. der Bereich der Zahlen x, deren Theiler gezählt werden sollen, aus den Zahlen (excl. Null) gebildet werden, deren absoluter Betrag nicht grösser als $|n|$ ist, wo n eine ganze complexe Zahl ist, und zwar sollen die Theiler y von x gezählt werden, die die Bedingung

$$|y| \overline{\overline{<}} |\varphi(x)|$$

erfüllen. Dabei sei $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x, die für $|x| > 0$ endlich und von solcher Beschaffenheit ist, dass aus

$$|y| \overline{\overline{>}} |\varphi(x)|$$

folgt

$$|\Phi(y)| \overline{\overline{<}} |x|,$$

wo Φ die inverse Function von φ bedeutet. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass $|\varphi(x)|$ und $|\Phi(y)|$ mit wachsendem Argument nicht zunehmen. Damit die aufzustellende Formel möglichst einfach werde, möge noch vorausgesetzt werden, dass $|\varphi(x)| < 1$ ist für $|x| > |n|$.

Jetzt soll mit $[\gamma]$ bezw. $[\gamma]'$ die Anzahl der Zahlen (excl. Null) bezeichnet werden, deren absoluter Betrag nicht grösser bezw. kleiner ist als $|\gamma|$. *Dann ist die Anzahl τ_φ der die Bedingung*

$$|y| \overline{\overline{<}} |\varphi(x)|$$

erfüllenden Theiler y aller von Null verschiedenen Zahlen, deren absoluter

Betrag $\overline{\gtrless} |n|$ *ist,*

$$(1.) \qquad \tau_\varphi = \sum_y \left[\frac{\Phi(y)}{y}\right],$$

wo die Summation über alle von Null verschiedenen Zahlen y zu erstrecken ist.

Beweis. Durch die Bedingungen $|x| \overline{\gtrless} |n|$ und $|y| \overline{\gtrless} |\varphi(x)|$ wird eine endliche Zahl von Gitterpunkten abgegrenzt. Die Abzählung der Theilerpunkte unter ihnen auf den x-Coordinatenstrahlen liefert die Anzahl τ_φ, die Abzählung der auf dem mit y bezeichneten Coordinatenstrahl liegenden Theilerpunkte liefert als die Anzahl der Theiler, die gleich y sind, die Anzahl der Zahlen x, die durch y theilbar sind und die Bedingung

$$|x| \leqq |\Phi(y)|$$

erfüllen. Dass diese auf y liegenden Gitterpunkte $x|y$ wirklich alle zu der durch die Bedingungen abgegrenzten endlichen Zahl gehören, folgt daraus, dass nach Voraussetzung die Beziehung

$$|y| \overline{\gtrless} |\varphi(x)|$$

zu

$$|x| \overline{\gtrless} |\Phi(y)|$$

führt. Die Anzahl der durch y theilbaren Zahlen x, für die $|x| \overline{\gtrless} |\Phi(y)|$ ist, ist aber gleich $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$. Dass bei der Abzählung auf den y-Coordinatenstrahlen ein Theiler y von x, dessen absoluter Betrag $> |\varphi(x)|$ ist, nicht mitgezählt wird, folgt daraus, dass die Beziehung

$$|y| > |\varphi(x)|$$

die andere

$$|\Phi(y)| < |x|$$

nach sich zieht, ein Theilerpunkt, der auf diesem x-Coordinatenstrahl liegt, befindet sich also nicht mit unter den Theilerpunkten, deren Anzahl soeben gleich $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ gefunden wurde.

Die Summation kann über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen y erstreckt werden, weil für jedes $|y|$, das grösser ist als das grösste in Betracht kommende $|\varphi(x)|$, der Ausdruck $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ verschwindet.

Aus der Voraussetzung, dass $|\varphi(x)| < 1$ sein sollte für $|x| > |n|$ folgt, dass auch für kleine Werthe von $|y|$ die rechte Seite der Gleichung (1.) die angegebene Form behält. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, und wenn dann etwa $|\varphi(n)| = |N|$ wäre, so müsste für $|y| \overline{\overline{<}} |N|$ der Ausdruck $\left[\frac{n}{y}\right]$ an die Stelle von $\left[\frac{\Phi(y)}{y}\right]$ treten.

Ist z. B. $\varphi(x) = n$, *so erhält man die Gleichung*

$$T = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

wo T die Anzahl aller Theiler der Zahlen ist, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als n sind. Diese Formel stimmt ihrer Form und ihrem Inhalt nach mit der bekannten auf reelle Zahlen bezüglichen Gleichung überein, mit der *Dirichlet* sich so viel beschäftigt hat. Da man für $[\gamma]$ angenähert $\pi|\gamma|^2$ setzen darf, so kann man die *Dirichlet*schen Untersuchungen über den asymptotischen Werth der durchschnittlichen Theileranzahl*) auch auf complexe Zahlen übertragen, was ich jedoch hier nicht unternehmen will.

§ 12. Fortsetzung.

Nach der ausführlichen Herleitung der Formel (1.) des vorigen Paragraphen kann ich mich bei der folgenden Gleichung, die sich auf eine Function $f(x)$ von der Beschaffenheit der im § 10 betrachteten bezieht, kürzer fassen. Ueber $f(x)$ möge der Einfachheit wegen noch die Voraussetzung gemacht werden, dass $f(0) = 0$ ist. *Bezeichnet man, wenn x eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, die einen absoluten Betrag* $\overline{\overline{<}} |n|$ *hat, die Anzahl aller der Theiler y von x, die der Bedingung*

$$|y| < |f(x)|$$

genügen, mit τ'_f, *so ist*

$$(1.) \qquad \tau'_f + \sum_y \left[\frac{F(y)}{y}\right] = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right].$$

Die Summationen beziehen sich beide auf alle von Null verschiedenen Werthe von y, deren absoluter Betrag $\overline{\overline{<}} |f(n)|$ *ist.*

Das Glied τ'_f ergiebt sich durch Abzählung der auf den x-Coordinaten liegenden Theilerpunkte, für die der absolute Betrag ihrer y-Coordinate kleiner ist als der absolute Betrag der y-Coordinate des Schnittpunktes der Curve $y = f(x)$ mit dem betreffenden x-Coordinatenstrahl. Die erste über y erstreckte Summe liefert durch Abzählung auf den y-Coordinaten die Theilerpunkte, die den Bedingungen

$$|f(x)| \overline{\overline{<}} |y| \overline{\overline{<}} |f(n)|$$

*) *Dirichlet*: Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie (Ges. Werke Band II, S. 49). Vergl. auch *Bachmanns* Analytische Zahlentheorie, S. 400 ff.

genügen, denn aus

$$|f(x)| \overline{\gtreqless} |y|$$

folgt

$$|x| \overline{\gtreqless} |F(y)|,$$

und die Anzahl der durch y theilbaren Zahlen x, die diese Bedingung erfüllen, ist $\left[\frac{F(y)}{y}\right]$. Die rechte Seite endlich wird durch Abzählung auf den y-Coordinaten gefunden als die Anzahl aller Theiler y der Zahlen x, für die

$$y \overline{\gtreqless} |f(n)|$$

ist; sie umfasst also die beiden Anzahlen der linken Seite.

Lautet die den Theilern auferlegte Bedingung

$$|y| \overline{\gtreqless} |f(x)|,$$

so tritt an Stelle der Gleichung (1.) die Gleichung

$$(1'.) \qquad \tau_f + \sum_y \left[\frac{F(y)}{y}\right]' = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

wo die Summation über dieselben Werthe zu erstrecken ist wie in (1.).

Setzt man z. B., wobei alle Voraussetzungen über $f(x)$ erfüllt sind,

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{also} \quad \frac{F(y)}{y} = y,$$

so erhält man die beiden Gleichungen:

$$(2.) \qquad \tau'_f + \sum_y [y] = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

$$(2'.) \qquad \tau_f + \sum_y [y]' = \sum_y \left[\frac{n}{y}\right],$$

wo y beidemal alle $[\sqrt{n}]$ von Null verschiedenen Zahlen durchläuft, deren absoluter Betrag $\overline{\gtreqless} |\sqrt{n}|$ ist.

Nun ist $\tau'_f + \tau_f = T$, d. h. gleich der Anzahl *aller* Theiler der Zahlen (excl. Null), deren absoluter Betrag $\overline{\gtreqless} |n|$ ist, da jedem Theiler von x, der seinem Betrage nach $< |\sqrt{x}|$ ist, ein solcher entspricht, dessen absoluter Betrag $> |\sqrt{x}|$ ist, sodass man, um die Anzahl beider Arten von Theilern zu erhalten, die ersteren zweimal zählen kann. In der Anzahl τ_f sind aber auch die Theiler mitgezählt, deren absoluter Betrag $= |\sqrt{x}|$ ist. Ferner ist nach der Formel (1.) des § 10, die auf die Function $y = x$ anwendbar ist,

$$\sum_y [y] + \sum_y [y]' = [\sqrt{n}]^2.$$

Die Bereiche, die in der angegebenen Formel mit $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnet waren, brauchen hier in der Klammer nicht hinzugefügt zu werden, weil jedes y, das bei der Bestimmung von $[y]$ und $[y]'$ gezählt wird, in dem Bereiche der von Null verschiedenen Zahlen, deren absoluter Betrag $\overline{\gtreqless} |\sqrt{n}|$

ist, enthalten ist. Dieser Bereich tritt aber im vorliegenden Falle an die Stelle sowohl von $\mathfrak{b}$ als von $\mathfrak{B}$.

Durch die Addition der Gleichungen (2.) und (2'.) erhält man also folgenden Satz: *Die Anzahl der Theiler aller Zahlen, deren absoluter Betrag den von n nicht übersteigt, ist*

$$(3.)\qquad T = 2\sum_y \left[\frac{n}{y}\right] - [\sqrt{n}]^2,$$

wo y alle von Null verschiedenen Zahlen durchläuft, deren absoluter Betrag $\overline{\gtrless} |\sqrt{n}|$ *ist.*

Der entsprechende Satz für reelle Zahlen ist zuerst von *Dirichlet* a. a. O. aufgestellt worden, allerdings in einer etwas abweichenden Form. Auch die Herren *Hermite* und *Cesàro* haben Beweise für den auf reelle Zahlen bezüglichen Satz gegeben.*)

Um den Satz durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern, bemerke ich, dass man sich bei der wirklichen Abzählung sowohl der Theiler als auch der Ausdrücke $[\gamma]$ auf Zahlen mit positivem reellen und nicht negativem imaginären Bestandtheil beschränken darf. Diese Zahlen mögen kurz als positive Zahlen bezeichnet werden. Die Zahl T ist dann einfach das 16-fache der so gefundenen Zahl T_+, ebenso ist die durch diese abgekürzte Zählung erhaltene Summe $\sum_y{}_+ \left[\frac{n}{y}\right]_+$ der 16-te Theil der in (3.) vorkommenden Summe, wenn mit $[\gamma]_+$ die Anzahl der positiven Zahlen bezeichnet wird, deren absoluter Betrag $\overline{\gtrless} |\gamma|$ ist, denn es ist $[\gamma]_+ = \frac{1}{4}[\gamma]$ und von je 4 associirten Zahlen y, die denselben Werth von $\left[\frac{n}{y}\right]$ liefern, wird nur die positive berücksichtigt. Endlich ist auch $[\sqrt{n}]^2_+ = \frac{1}{16}[\sqrt{n}]^2$.

Ist nun z. B. $n = 5+3i$, so kommt bei der Bestimmung von T_+ der Theiler 1, da $[5+3i]_+ = 27$ ist, 27-mal vor. Ferner ist zu zählen: 14-mal der Theiler $1+i$, 6-mal 2, 5-mal $1+2i$, und $2+i$, 3-mal $2+2i$, 2-mal 3, $1+3i$, $3+i$, $3+2i$, $2+3i$, 4, $4+i$, $1+4i$ und $27-14 = 13$-mal kommt ein Theiler 1-mal vor, so dass $T_+ = 89$ ist.

Die Werthe, die y durchläuft, sind die $[\sqrt{5+3i}]_+ = 5$ Zahlen 1, $1+i$, 2, $2+i$, $1+2i$, und die zugehörigen Werthe von $\left[\frac{5+3i}{y}\right]_+$ sind 27, 14, 6, 5, 5. Die doppelte Summe dieser Anzahlen ist 114, und wenn man hiervon $[\sqrt{5+3i}]^2_+ = 25$ subtrahirt, erhält man ebenfalls 89.

*) Vergl. *Bachmann* a. a. O. S. 407 ff.