Ueber die *Jacobi*sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades.

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.)

Herr *O. Hermes* hat im 73. Bande dieses Journals, S. 179, durch die Veröffentlichung von Bruchstücken aus den hinterlassenen Papieren *Jacobis**) uns mit dessen interessanter Erzeugung der Flächen zweiten Grades bekannt gemacht, welche folgendermassen lautet:

Wenn zweimal drei Punkte A, B, C; A', B', C' gegeben sind und zu jedem Punkte P' einer Ebene die beiden Punkte P construirt werden, für welche

$$AP = A'P', \quad BP = B'P', \quad CP = C'P',$$

so ist deren Ort eine Fläche zweiten Grades.

Herr *Hermes* hat eine ausführliche eigene Untersuchung über diese Erzeugung in dem nämlichen Bande des Journals S. 209 veröffentlicht, welche sich an *Jacobi*sche Gedankengänge anschliesst. Im Uebrigen scheint dieselbe keine weiteren Arbeiten veranlasst zu haben. Nur *Schröter* kommt in seinem Buche über die Flächen zweiter Ordnung und Raumcurven dritter Ordnung im § 67 auf sie zu sprechen. Er bringt sie mit der *Mac-Cullagh*schen Erzeugungsweise in Verbindung, aber betrachtet nur den speciellen Fall, dass der Punkt P' die Ebene $A'B'C'$, nicht eine beliebige Ebene durchläuft.

Vielleicht rege ich zu weiteren Arbeiten über diesen Gegenstand an, wenn ich kurz erörtere, warum diese nicht so einfache Erzeugung, welche zunächst zu höheren Verwandschaften führt, doch ein Erzeugniss von so niedriger Ordnung liefert, und dazu einen anderen Ausgangspunkt der Betrachtung nehme.

*) *Jacobis* Gesammelte Werke, Bd. 7, S. 42; vergl. auch eine vorläufige Mittheilung in einem Briefe *Jacobis* an *Steiner*, dieses Journal, Bd. 12, S. 137 (Gesammelte Werke, Bd. 7, S. 7) No. 5.

Werden in einer Ebene um zwei Punkte A, B Kreise geschlagen, für deren Radien r, r_1 gilt:

$$r^2 = a + 2bl + cl^2, \qquad r_1^2 = a_1 + 2b_1 l + cl^2,$$

wo l ein veränderlicher Parameter ist und l^2 beidemal *denselben* Coefficienten hat, so schneiden sich diese Kreise in Punktepaaren, welche einen Kegelschnitt erzeugen.

Sind A', B' zwei andere Punkte und bewegt sich P' im Raume auf einer Geraden g', so haben $A'P'^2$, $B'P'^2$ die eben genannte Eigenschaft von r^2, r_1^2; werden daher um A, B die Kugeln mit den Radien $A'P'$, $B'P'$ geschlagen, so erzeugen die Schnittkreise, wenn P' die g' durchläuft, eine Rotationsfläche zweiten Grades.

Wenn C und C' hinzugefügt werden, so ergiebt sich bei A, C; A', C' und der nämlichen Geraden g' eine zweite Rotationsfläche zweiten Grades. Die zu demselben Punkte P' von g' gehörigen Parallelkreise der einen und der anderen liegen in entsprechenden Ebenen zweier perspectiven Parallelebenen-Büschel; die Ebene, welche deren Erzeugniss ist, schneidet beide Flächen in einem gemeinsamen Kegelschnitt, welcher durch die Schnittpunkte-Paare der Kugeln um A, B, C mit den Radien $A'P'$, $B'P'$, $C'P'$ entsteht, wenn P' die Gerade g' durchläuft. Der andere den beiden Flächen gemeinsame Kegelschnitt ergiebt sich durch die Schnitte solcher je auf derselben Kugel um A befindlichen Parallelkreise der beiden Flächen, welche von *verschiedenen* Schnitten der ebenso grossen Kugel von A' mit g' herrühren.

Auf diese Weise entsteht eine zweizweideutige Verwandtschaft zwischen den Punkten P, P' der beiden Räume Σ, Σ' derartig, dass

$$AP = A'P', \qquad BP = B'P', \qquad CP = C'P';$$

durchläuft P' oder P eine Gerade, so beschreibt P oder P' einen Kegelschnitt. Daraus folgt: *Durchläuft P' oder P eine Ebene, so beschreibt P oder P' eine Fläche zweiten Grades.*