Die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen.

(Von Herrn *Paul Schafheitlin* in Berlin.)

Die Nullstellen analytischer Functionen beanspruchen nicht nur vom rein theoretischen Standpunkt aus besonderes Interesse, sondern sie spielen auch in den Anwendungen auf physikalische Probleme eine hervorragende Rolle. Es sind daher auch in neuerer Zeit mehrere Abhandlungen den Nullstellen verschiedener Functionen gewidmet worden; von den Herren *Klein**) und *Hurwitz***) ist für die hypergeometrische Reihe nach zwei verschiedenen Methoden die Anzahl der Nullstellen zwischen 0 und 1 ermittelt worden; von Herrn *Hurwitz****) ist schon früher der Nachweis geliefert worden, dass für positive Indices n die Nullstellen der *Bessel*schen Functionen $J^n_{(x)}$ reell sind. Genaueres über die Lage der einzelnen Nullstellen dieser Functionen ist in einwandfreier Weise, so viel ich gesehen habe, noch nicht ermittelt worden ausser dem schon längst bekannten Resultat, dass für unendlich grosse Werthe von x die Function J^n gegen $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)$ convergirt, woraus in einfacher Weise der Wurzelgrenzwerth sich ergiebt. Von Herrn *Meissel*†) für J^0, und in allgemeinerer Weise von Herrn *McMahon*††) sind Formeln zur Berechnung der einzelnen Nullstellen

*) Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. Bd. 37.

**) Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe. Math. Ann. Bd. 38.

***) Ueber die Nullstellen der *Bessel*schen Function. Math. Ann. Bd. 33.

†) Ueber die *Bessel*schen Functionen J^0_k und J^1_k. Programm der Oberrealschule in Kiel 1890.

††) On the roots of the *Bessel* and certain related functions. Annals of Math. Bd. 9.

angegeben worden; indessen sind nur die ersten Glieder der betreffenden Reihen, nicht aber das allgemeine Glied derselben angegeben, ebensowenig ist über die Convergenz der Entwickelung etwas bemerkt worden. So sind diese Reihen wohl zur praktischen Berechnung nützlich, aber allgemeine Schlüsse über die Grenzen, zwischen denen je eine Nullstelle zu suchen ist, lassen sich nicht daraus ziehen. Ein Versuch in dieser Beziehung ist von Herrn *Rudsky* *) unternommen worden; seine Ergebnisse sind aber, abgesehen davon, dass sie nur auf solche Functionen, deren Indices die Hälften ungerader ganzer Zahlen sind, sich beschränken, insofern unrichtig, als die angegebenen Grenzen nur für die höheren Nullstellen Geltung haben, nicht aber, wie der Verfasser behauptet, für sämmtliche. Eine Reihe interessanter Eigenschaften, speciell über die gegenseitige Lage der Wurzeln benachbarter Functionen, ist von Herrn *Bôcher***) gegeben worden. In einer kürzlich erschienenen neuen Note***) hat derselbe gezeigt, dass das Intervall zweier auf einander folgenden Wurzeln von J^0 kleiner als 4,810 ist, während ich schon früher†) gezeigt habe, dass dieses Intervall kleiner als π ist. Ich glaube daher, dass die folgenden Angaben, wenn sie auch keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben können, einiges Interesse erwecken werden. Auch die *Bessel*schen Functionen zweiter Art werde ich mit besprechen, wobei ich bemerke, dass ich hierunter im Gegensatz zu den Herren *Graf* und *Gubler*††), aber wohl im Einklang mit den meisten Mathematikern die zweite Lösung der *Bessel*schen Differentialgleichung verstehe.

I. Die erste Nullstelle der Function J^n.

Als Hauptformeln aus der Theorie der *Bessel*schen Functionen sind bekannt:

$$\text{I.}\quad \frac{d^2J^n}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ^n}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)J^n=0,$$

---

*) Sur la situation des racines de $J^{n+\frac{1}{2}}=0$. Mém. d. l. Soc. Royale des Sciences de Liége (2). Bd. 18, 1895.

**) On certain methods of *Sturm*. Bull. Americ. Math. Soc. (2). Bd. 3 1897.

***) An elementary proof that *Bessels* functions of the zeroth order have an infinite number of real roots. Bull. Americ. Math. Soc. (2). Bd. 7 1899.

†) Ueber die *Gauss*sche und *Bessel*sche Differentialgleichung. Dieses Journal Bd. 114.

††) Einleitung in die Theorie der *Bessel*schen Functionen. I, II. Bern 1898, 1900.

$$\text{II.}\quad \frac{2n}{x} J^n = J^{n-1} + J^{n+1},$$

$$\text{III.}\quad 2\frac{dJ^n}{dx} = J^{n-1} - J^{n+1},$$

$$\text{IV.}\quad J^{n-1} = \frac{n}{x} J^n + \frac{dJ^n}{dx},$$

$$\text{V.}\quad J^{n+1} = \frac{n}{x} J^n - \frac{dJ^n}{dx},$$

$$\text{VI.}\quad \frac{dJ^{n-1}}{dx} = -\left(1 - \frac{n(n-1)}{x^2}\right) J^n + \frac{n-1}{x}\frac{dJ^n}{dx},$$

$$\text{VII.}\quad \frac{dJ^{n+1}}{dx} = \left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) J^n + \frac{n+1}{x}\frac{dJ^n}{dx},$$

$$\text{VIII.}\quad (n+1) J^{n-2} + 2n\left(1 - \frac{2(n-1)(n+1)}{x^2}\right) J^n + (n-1) J^{n+2} = 0,$$

$$\text{IX.}\quad J^{n-2} = -\left(1 - \frac{2n(n-1)}{x^2}\right) J^n + \frac{2(n-1)}{x}\frac{dJ^n}{dx},$$

$$\text{X.}\quad J^{n+2} = -\left(1 - \frac{2n(n+1)}{x^2}\right) J^n - \frac{2(n+1)}{x}\frac{dJ^n}{dx}.$$

Die Formeln IV.—X. ergeben sich durch einfache Combination der Hauptformeln II. und III.; durch wiederholte Anwendung von II. erhält man die im wesentlichen schon von Herrn *Lommel**) angegebenen Formeln:

$$\text{XI.}\quad J^{n+p} = J^n \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(n+p-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(n+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda}$$
$$- J^{n-1} \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(n+p-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(n+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1},$$

$$\text{XII.}\quad J^{n-p} = J^n \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(n-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(n-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda}$$
$$- J^{n+1} \sum_{\lambda=0} (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(n-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(n-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}.$$

Die Reihen in diesen beiden Formeln, worin p eine positive ganze Zahl bedeutet, brechen von selbst für $\lambda = \frac{p}{2}$ resp. $\frac{p-1}{2}$ ab. In allen Formeln ist der Einfachheit halber das Argument x weggelassen worden; alle 12 Formeln gelten ferner unverändert für Y^n; zwischen den beiden Arten bestehen die Gleichungen:

$$\text{XIII.}\quad Y^n \frac{dJ^n}{dx} - J^n \frac{dY^n}{dx} = \frac{2}{\pi x},$$

$$\text{XIV.}\quad Y^n J^{n-1} - J^n Y^{n-1} = \frac{2}{\pi x};$$

*) Studien über die *Bessel*schen Functionen. Leipzig 1868.

es unterscheidet sich Y^n von dem *Lommel*schen*) durch den Factor $-\frac{\pi}{2}$, von dem *Hankel*schen**) durch den Factor $-\pi$.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf den Fall eines reellen positiven Index n grösser als Null. Die Functionen J^n sind überall im Endlichen selbst endlich und stetig und dasselbe gilt von allen Differentialquotienten, für die letzteren bei gebrochenem n mit Ausnahme des Nullpunktes. Die Variable x soll alle möglichen reellen, positiven Werthe annehmen; für $x = 0$ verschwindet J^n, im folgenden wird diese Nullstelle nicht gezählt.

Aus der bekannten Reihenentwickelung:

$$J^n = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{1}{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}$$

erkennt man, dass für kleine Werthe von x die Function J^n positive Werthe besitzt. Vor der ersten Nullstelle besitzt daher J^n einen positiven Maximalwerth; hierfür ist also J^n positiv, $\frac{dJ^n}{dx} = 0$, $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ negativ; es muss also nach I. für die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$, erst recht also für die erste Nullstelle von J^n das Argument $x > n$ sein. Hieraus wieder folgt aus I., dass $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ für $x = n$ negativ ist. Für $n > 1$ ist $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ für kleine Werthe von x positiv; es liegt also die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ vor $x = n$. Differentiirt man I., so erhält man:

$$\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)\frac{d^3J^n}{dx^3}+\frac{1}{x}\left(1-\frac{3n^2}{x^2}\right)\frac{d^2J^n}{dx^2}+\left(1-\frac{2n^2+1}{x^2}+\frac{n^2(n^2-1)}{x^4}\right)\frac{dJ^n}{dx} = 0.$$

Verschwindet $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ zum ersten Male, so hat $\frac{dJ^n}{dx}$ ein positives Maximum, demnach ist $\frac{d^3J^n}{dx^3}$ negativ und es muss daher der Factor von $\frac{dJ^n}{dx}$ in dieser Differentialgleichung negativ sein; es ist also:

$$x^2 > \frac{2n^2+1-\sqrt{8n^2+1}}{2}.$$

---

*) Zur Theorie der *Bessel*schen Functionen. Math. Ann. Bd. 4.

**) Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Math. Ann. Bd. 1.

Die Wurzel aus diesem Bruch ist eine untere Grenze für die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$; erst recht ist dann $n-1$ kleiner als diese Nullstelle, die also zwischen $n-1$ und n liegt.

Wie schon bemerkt wurde, ist die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ grösser als n. Für diese Stelle ist J^n positiv, der Factor von J^n in VI. negativ, daher $\frac{dJ^{n-1}}{dx}$ negativ; es liegt also die erste Nullstelle von $\frac{dJ^{n-1}}{dx}$ vor der von $\frac{dJ^n}{dx}$; die Functionen $\frac{dJ^{n+p}}{dx}$, wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, sind für alle Werthe von x, die kleiner oder gleich dem ersten Nullwerth von $\frac{dJ^n}{dx}$ sind, positiv.

Durch Differentiation folgt aus X. bei Rücksicht auf I.:

$$\frac{dJ^{n+2}}{dx} = \frac{2(n+1)}{x}\left(1-\frac{n(n+2)}{x^2}\right)J^n - \left(1-\frac{2(n+1)(n+2)}{x^2}\right)\frac{dJ^n}{dx}.$$

Für die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ muss nach der obigen Bemerkung der Factor von J^n positiv, d. h. $x^2 > n(n+2)$ sein.

Ist J^n zum ersten Male Null, so ist $\frac{dJ^n}{dx}$ negativ; es ergiebt sich daher aus IV., dass auch J^{n-1} negativ ist. Die erste Nullstelle von J^{n-1} liegt also vor der von J^n; die Functionen J^{n+p} sind für alle Werthe von x, die kleiner oder gleich der ersten Nullstelle von J^n sind, positiv. Mit Rücksicht hierauf folgt aus X., dass für die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ der Factor von J^n positiv, also $x^2 < 2n(n+1)$ sein muss. Hieraus folgt:

Die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$ *liegt zwischen* $\sqrt{n(n+2)}$ *und* $\sqrt{2n(n+1)}$.

Aus VIII. erkennt man sofort, dass die erste Nullstelle von J^{n-2} vor $x^2 = 2(n-1)(n+1)$ liegt; da ferner die erste Nullstelle von J^n nach der von $\frac{dJ^n}{dx}$ liegt, so folgt:

Die erste Nullstelle von J^n *liegt zwischen* $\sqrt{n(n+2)}$ *und* $\sqrt{2(n+1)(n+3)}$.

Vermöge I. folgt aus V. und VII.

$$\frac{1}{x}J^{n+1} = \left(1-\frac{n(n-1)}{x^2}\right)J^n + \frac{d^2J^n}{dx^2},$$

$$\frac{dJ^{n+1}}{dx} = -n\left(1-\frac{(n+1)(n-1)}{x^2}\right)J^n - (n+1)\frac{d^2J^n}{dx^2}.$$

Da für die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ sowohl J^n, J^{n+1} als auch $\frac{dJ^{n+1}}{dx}$ positiv sind, so ergiebt sich aus diesen beiden Formeln:

Die erste Nullstelle von $\frac{d^2J^n}{dx^2}$ *liegt zwischen* $\sqrt{n(n-1)}$ *und* $\sqrt{(n+1)(n-1)}$.

Aus XI. ergiebt sich für $p = 6$ falls J^n verschwindet:

$$J^{n+6} = -J^{n-1}.\frac{2(n+3)}{x}\left\{3-\frac{16(n+2)(n+4)}{x^2}+\frac{16(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)}{x^4}\right\}.$$

Für die erste Nullstelle von J^n ist J^{n-1} negativ, J^{n+6} positiv; es muss also die Klammer in diesem Ausdruck positiv sein. Für die obere Grenze $\sqrt{2(n+1)(n+3)}$ ist sie negativ; für $x = \sqrt{2(n+1)(n+2)}$ hat sie den Werth $-\frac{n^2+3n-22}{(n+1)(n+2)}$ und ist also für $n \geqq 3\frac{1}{2}$ auch negativ; daher liegt die erste Nullstelle von J^n für $n \geqq 3\frac{1}{2}$ vor $\sqrt{2(n+1)(n+2)}$.

Herr *Rudski* giebt in der erwähnten Note an, dass die erste Wurzel von $J^{n+\frac{1}{2}}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, zwischen $(n+1)\frac{\pi}{2}$ und $(n+2)\frac{\pi}{2}$ liegt. Es ist dieses Resultat nicht richtig; die erste Wurzel liegt sicher vom Index $8\frac{1}{2}$ an vor dem von Herrn *Rudski* angegebenen Intervall. Denn aus dem obigen Grenzwerth folgt für den Index $8\frac{1}{2}$, dass $x < \sqrt{199{,}5} < 14{,}125$ ist, während $\frac{9}{2}\pi > 14{,}137$ ist. Thatsächlich ist jenes Ergebniss schon vom Index $5\frac{1}{2}$ an unrichtig, wie die von Herrn *Lommel**) berechneten Tabellen für $J^{n+\frac{1}{2}}$ zeigen.

Auf dem hier angedeuteten Wege durch zweckmässige Verbindung der Formeln XI. und XII. mit den anderen Hauptformeln lassen sich die Grenzen für die ersten Nullstellen von J^n und $\frac{dJ^n}{dx}$ wesentlich enger ziehen, wie ich dies in einer späteren Note zu zeigen beabsichtige.

II. Die höheren Nullstellen von J^n und Y^n.

Es ist mir nicht gelungen, ähnliche einfache Grenzen für die zweite und die nächstfolgenden Nullstellen für grössere Werthe des Index n anzugeben; für die höheren Nullstellen habe ich dagegen verhältnissmässig gute

*) Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Abh. d. Akad. d. Wiss. zu München Cl. 2, Bd. 15 Abth. 3, 1886.

Resultate erzielt und zwar im Anschluss an die von mir am angegebenen Orte abgeleitete Integralform von J^n und Y^n. Es ist:

$$J^n(x) = \frac{2^{n+1}x^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(x-\frac{2n-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2n+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\omega.$$

Da für die Nullstellen der Factor des Integrals keine Rolle spielt, so soll dieses selbst nur untersucht und kurz durch K^n bezeichnet werden. Setzt man $x = k\pi + \varepsilon$, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet und $0 < \varepsilon \leqq \pi$ ist, so ist:

$$(1.)\qquad (-1)^k K^n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(\varepsilon-\frac{2n-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2n+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\omega.$$

Zerlegt man dieses Integral in Theilintegrale mit den Grenzen

$$g_0 = 0,\quad g_1 = \frac{2\varepsilon}{2n-1},\quad g_2 = \frac{2\varepsilon+2\pi}{2n-1}\ \cdots\ g_r = \frac{2\varepsilon+2(r-1)\pi}{2n-1},\ \cdots$$

so wird das erste Integral positiv, das zweite negativ sein und alle folgenden Integrale abwechselnd positives und negatives Vorzeichen besitzen; es ist zu untersuchen, welches Vorzeichen die ganze Summe erhält. Bezeichnet man zur Abkürzung die Function unter dem Integralzeichen in (1.) mit φ_n, so ist:

$$\int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \varphi_n d\omega = \frac{2}{2n+1}\int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \operatorname{cotg}^{2n+1}\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}\omega\right)}{\cos^{n+\frac{1}{2}}\omega}$$

$$< \frac{2}{2n+1}\operatorname{cotg}^{2n+1}g_{2r+1}\, e^{-2x\operatorname{cotg} g_{2r+1}}\left\{\frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r+1}\right)}{\cos^{n+\frac{1}{2}}g_{2r+1}} - \frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r}\right)}{\cos^{n+\frac{1}{2}}g_{2r}}\right\}.$$

Benutzt man die obigen Werthe für g, so erhält man:

$$\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r+1}\right) = \cos g_{2r+1},$$

$$\cos\left(\varepsilon-\frac{2n+1}{2}g_{2r}\right) = -\cos g_{2r},$$

folglich ist:

$$\int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \varphi_n d\omega < \frac{2}{2n+1}\operatorname{cotg}^{2n+1}g_{2r+1}\, e^{-2x\operatorname{cotg} g_{2r+1}}\left\{\frac{1}{\cos^{n-\frac{1}{2}}g_{2r+1}} + \frac{1}{\cos^{n-\frac{1}{2}}g_{2r}}\right\}$$

also erst recht:

$$(2.)\qquad \int_{g_{2r}}^{g_{2r+1}} \varphi_n d\omega < \frac{4}{2n+1}\cdot\frac{\cos^{n+\frac{3}{2}}g_{2r+1}\,.\,e^{-2x\operatorname{cotg} g_{2r+1}}}{\sin^{2n+1}g_{2r+1}}.$$

Diese Ungleichheit gilt aber nur unter der Bedingung, dass die Function $\operatorname{cotg}^{2n+1}\omega e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}$ mit wachsendem ω zunimmt und dies ist der Fall, wenn $\operatorname{tg}\omega < \frac{2x}{2n+1}$ oder

$$\omega < \operatorname{arctg}\frac{2x}{2n+1}. \tag{3.}$$

Ferner ist:

$$-\int_{g_{2r+1}}^{g_{2r+2}}\varphi_n d\omega = -\frac{2}{2n-1}\int_{g_{2r+1}}^{g_{2r+2}}\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega}{\sin^{2n+1}\omega}e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}d\cos\left(\varepsilon-\frac{2n-1}{2}\omega\right)$$

$$> \frac{2}{2n-1}\cdot\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}g_{2r+1}}{\sin^{2n+1}g_{2r+1}}e^{-2x\operatorname{cotg}g_{2r+1}}\left\{\cos\left(\varepsilon-\frac{2n-1}{2}g_{2r+1}\right)-\cos\left(\varepsilon-\frac{2n-1}{2}g_{2r+2}\right)\right\},$$

also:

$$-\int_{g_{2r+1}}^{g_{2r+2}}\varphi_n d\omega > \frac{4}{2n-1}\cdot\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}g_{2r+1}\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}g_{2r+1}}}{\sin^{2n+1}g_{2r+1}}. \tag{4.}$$

Diese Ungleichheit gilt solange $\frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega}{\sin^{2n+1}\omega}\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}$ mit wachsendem ω zunimmt, d. h. solange ω kleiner ist als die reelle Wurzel ω_1 der Gleichung

$$4x-2(2n+1)\operatorname{tg}\omega+4x\operatorname{tg}^2\omega-(2n-1)\operatorname{tg}^3\omega = 0. \tag{5.}$$

Diese Gleichung hat für $n \geqq 1$ nur eine reelle Wurzel.

Setzt man $\operatorname{tg}\omega = \frac{4x}{2n+1}$, so erhält die linke Seite von 5. den Werth

$$\frac{4x}{(2n+1)^3}(32x^2-(2n+1)^3).$$

Ist daher

$$x^2 > \frac{(2n+1)^3}{32}, \tag{5^a.}$$

so ist:

$$\omega_1 > \operatorname{arctg}\frac{4x}{2n+1}. \tag{5^b.}$$

Des einfacheren Ausdrucks wegen soll zunächst n ganzzahlig angenommen werden; es muss unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist.

1. Fall. n gerade gleich $2m$. Es besteht $(-1)^k K^{2m}$ aus $m+1$ Theilintegralen; die Grenzen des letzten sind $\frac{2\varepsilon+2(m-1)\pi}{4m-1}$ und $\frac{\pi}{2}$. Ist aber

$\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$, so fehlt das letzte Integral und es besteht alsdann K^{2m} nur aus m Theilintegralen. Ist nun m selbst eine gerade Zahl, der Index der Function J also durch 4 theilbar und ist

$$(6.) \qquad \varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi,$$

so enthält K^{2m} eine gerade Anzahl Integrale. Aus (2.) und (4.) folgt, dass wenn man von vorn anfangend je zwei auf einander folgende Integrale zusammenfasst, diese Summe negativ wird; es ist also die Summe der $m-2$ ersten Theilintegrale negativ, vorausgesetzt dass die Bedingungen (3.), (5^a.) und (5^b.) erfüllt sind.

Das vorletzte, $(m-1)$-te Integral ist

$$(7.) \qquad \int_{g_{m-2}}^{g_{m-1}} \varphi_{2m} d\omega < \frac{4}{4m+1} \cdot \frac{\cos^{2m+\frac{3}{2}} g_{m-1} \cdot e^{-2x \operatorname{cotg} g_{m-1}}}{\sin^{4m+1} g_{m-1}},$$

unter der Bedingung, dass $g_{m-1} < \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{4m+1}$ ist. Da für alle in Frage kommenden Werthe von x der letzte Bruch unecht ist, so ist diese Ungleichheit sicher erfüllt, wenn

$$g_{m-1} = \frac{2\varepsilon + 2(m-2)\pi}{4m-1} < \frac{\pi}{2} - \frac{4m+1}{2x}$$

oder wenn

$$(8.) \qquad x > \frac{(4m-1)(4m+1)}{7\pi - 4\varepsilon}$$

ist. Liegt die Wurzel ω_1 von (5.) innerhalb des letzten Integrals, ist also

$$(9.) \qquad \omega_1 = g_{m-1} + \varrho,$$

wo $\varrho < \frac{2\pi}{4m-1}$ ist, so erhält man für das letzte Integral:

$$(10.) \qquad -\int_{g_{m-1}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{2m} d\omega >$$

$$-\int_{g_{m-1}}^{\omega_1} \varphi_{2m} d\omega > \frac{4}{4m-1} \cdot \frac{\cos^{2m-\frac{1}{2}} g_{m-1} \cdot e^{-2x \operatorname{cotg} g_{m-1}}}{\sin^{4m+1} g_{m-1}} \cdot \sin^2\left(\frac{4m-1}{4}\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ist (5^a.) erfüllt, so ist nach (5^b.)

$$\omega_1 > \operatorname{arc\,tg} \frac{4x}{4m+1}$$

also

$$\omega_1 > \frac{\pi}{2} - \frac{4m+1}{4x}$$

oder nach (9.)

$$\varrho > \frac{\pi}{2} - g_{m-1} - \frac{4m+1}{4x};$$

ist nun die Ungleichheit (8.) erfüllt, so folgt

$$(11.)\qquad \varrho > \frac{7\pi - 4\varepsilon}{4(4m-1)};$$

sobald also (5^a.) und (8.) erfüllt sind, ist ϱ positiv; es liegt also alsdann ω_1 im letzten Integral.

Aus (7.) und (10.) folgt nun, dass auch die beiden letzten Integrale ein negatives Resultat liefern, wenn

$$\frac{1}{4m+1}\cos^2 g_{m-1} < \frac{1}{4m-1}\sin^2\left(\frac{4m-1}{4}\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

also erst recht, wenn mit Rücksicht auf (9.)

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - g_{m-1}\right) < \sin^2\frac{4m-1}{4}\varrho$$

oder

$$\frac{\pi}{2} - g_{m-1} < \frac{4m-1}{4}\varrho$$

oder wenn

$$(12.)\qquad \varrho > \frac{2(7\pi - 4\varepsilon)}{(4m-1)^2}$$

ist; diese Ungleichheit ist aber nach (11.) erfüllt, sobald

$$4m - 1 > 8$$

ist oder

$$(13.)\qquad m > 2\tfrac{1}{4}$$

ist. Sind die Bedingungen (8.) und (13.) erfüllt, so ist von selbst (5^a.) erfüllt; sobald ferner die Formeln (7.) und (10.) Gültigkeit besitzen, sind auch die Bedingungen (3.), (5^a.) und (5^b.) für die ersten $m-2$ Integrale erfüllt. Da m nur ganze Zahlwerthe annehmen kann, so wird die untere Grenze für m in (13.) auf 3 zu erhöhen sein und man erhält den Satz:

I. *Ist m eine gerade Zahl grösser oder gleich* 3 *und* $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m}$ *einen negativen Werth, sobald* $x > \frac{(4m-1)(4m+1)}{7\pi - 4\varepsilon}$ *ist.*

Wenn aber m ungerade ist, also der Index von J congruent 2 (mod. 4) ist, so hat K^{2m} eine gerade Anzahl Integrale, wenn $\varepsilon < \frac{3}{4}\pi$ ist. Völlig die nämliche Betrachtung liefert hier das Ergebniss:

II. *Ist m eine ungerade Zahl grösser oder gleich* 3 *und* $\varepsilon < \frac{3}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m}$ *einen negativen Werth, sobald* $x > \frac{(4m-1)(4m+1)}{3\pi - 4\varepsilon}$ *ist.*

2. Fall. n ungerade gleich $2m+1$. Führt man für K^{2m+1} dieselben Betrachtungen wie oben aus, so erhält man:

III. *Ist m eine gerade Zahl grösser oder gleich* 2 *und* $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$, *so hat* $(-1)^k K^{2m+1}$ *einen negativen Werth, sobald* $x > \frac{(4m+1)(4m+3)}{\pi - 4\varepsilon}$ *ist.*

IV. *Ist m eine ungerade Zahl grösser als* 2 *und* $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$, *so hat* $(-1)^k K^{2m+1}$ *einen negativen Werth, sobald* $x > \frac{(4m+1)(4m+3)}{5\pi - 4\varepsilon}$ *ist.*

Es hat gar keine Schwierigkeit, diese Betrachtungen auf gebrochene Indices zu übertragen. Bezeichnet man den Index mit $n+\nu$, wo n eine ganze Zahl und ν einen echten Bruch bedeutet, der die Bedingung $-\frac{1}{2} < \nu \leqq +\frac{1}{2}$ erfüllt, so hat man wie oben die 4 Fälle für n zu unterscheiden und erhält:

Ia. *Ist m eine gerade Zahl derart, dass* $m \geqq \frac{9-2\nu}{4}$ *ist und ist* $\varepsilon \geqq \frac{3+2\nu}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m+\nu}$ *einen negativen Werth, sobald*

$$x > \frac{(4m+2\nu-1)(4m+2\nu+1)}{(7+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \text{ ist.}$$

IIa. *Ist m eine ungerade Zahl derart, dass* $m \geqq \frac{9-2\nu}{4}$ *ist und ist* $\varepsilon < \frac{3+2\nu}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m+\nu}$ *einen negativen Werth, sobald*

$$x > \frac{(4m+2\nu-1)(4m+2\nu+1)}{(3+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \text{ ist.}$$

IIIa. *Ist m eine gerade Zahl derart, dass* $m \geqq \frac{7-2\nu}{4}$ *ist und ist* $\varepsilon < \frac{1+2\nu}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m+\nu+1}$ *einen negativen Werth, sobald*

$$x > \frac{(4m+2\nu+1)(4m+2\nu+3)}{(1+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \text{ ist.}$$

IVa. *Ist m eine ungerade Zahl derart, dass* $m \geqq \frac{7-2\nu}{4}$ *ist und ist* $\varepsilon \geqq \frac{1+2\nu}{4}\pi$, *so hat* $(-1)^k K^{2m+\nu+1}$ *einen negativen Werth, sobald*

$$x > \frac{(4m+2\nu+1)(4m+2\nu+3)}{(5+2\nu)\pi - 4\varepsilon} \textit{ ist.}$$

Für alle Sätze gilt die Gleichung $x = k\pi + \varepsilon$, wo $0 < \varepsilon \leqq \pi$ ist.

Ist im Index $n+\nu$ die ganze Zahl $n \equiv \mu$ (mod. 4), wo μ eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 bedeutet, so kann man zusammenfassend sagen, dass über das Vorzeichen von $J^{n+\nu}$ in den oben angegebenen Intervallen für ε sich eine bestimmte Aussage machen lässt, sobald $x > \frac{4(n+\nu)^2-1}{(2\mu+2\nu-1)\pi - 4\varepsilon}$ ist.

Des bequemeren Ausdruckes wegen soll in Zukunft vorwiegend von ganzzahligen Indices gesprochen werden; es lassen sich ohne Mühe die Sätze auf gebrochene Indices übertragen.

Ist $x > \frac{4n^2-1}{(2\mu-1)\pi - 4\varepsilon}$, so haben sämmtliche Functionen J^{n-4p}, wo p eine positive ganze Zahl bedeutet, dasselbe Vorzeichen wie J^n.

Um sich in dem Ausdruck für x von ε frei zu machen, kann man demselben seinen grössten Werth beilegen; es geht dies ohne weiteres für $\mu = 3$ und 4; für $\mu = 2$ oder 3 aber wird für den grössten Werth von ε der Nenner Null. Um für $\mu = 2$ zu einem bestimmten Werthe zu gelangen, beschränke man ε auf das Intervall von Null bis $\frac{\pi}{2}$. Es ist dann:

$(-1)^k K^n$ für $n \equiv 0$ (mod. 4) und $x > \frac{4n^2-1}{3\pi}$ negativ für $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$,

„ „ $n \equiv 2$ „ „ $x > \frac{4n^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

„ „ $n \equiv 3$ „ „ $x > \frac{4n^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$.

Bei Benutzung von Formel VIII. folgt hieraus:

$(-1)^k K^n$ ist für $n \equiv 0$ und $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ positiv für $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$,

„ „ $n \equiv 2$ „ $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$,

„ „ $n \equiv 1$ „ $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$ „ „ $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$.

Wählt man des einfacheren Ausdruckes wegen allgemein den grössten der hier vorkommenden Werthe von x, so erhält man:

V. *Ist* $x > \frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $J^n(x)$ *in den Intervallen* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{4})\pi$ *resp.* $k\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Die Möglichkeit für das Auftreten eines Zeichenwechsels von J^n ist hiernach für die höheren Nullstellen auf ein Intervall von $\frac{\pi}{4}$ beschränkt worden; es ist selbstverständlich, dass bei wachsendem x dies Gebiet durch die allgemeineren Formeln, in denen ε enthalten ist, noch erheblich verengert werden kann. Wie schon erwähnt, darf aber für $\mu = 2$ und 3 niemals ε den Maximalwerth $\frac{3}{4}\pi$ oder $\frac{\pi}{4}$ annehmen. Es convergiren also die höheren Nullstellen gegen diese Werthe, *ohne sie aber je zu überschreiten.*

Ferner erkennt man, dass zwei Functionen, deren Indices sich um 2 unterscheiden, entgegengesetzte Vorzeichen haben ausser in den Intervallen $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{4}$ resp. 0 bis $\frac{\pi}{4}$, je nachdem der Index gerade oder ungerade ist. Daraus folgt vermöge Formel III.:

VI. *Ist* $x > \frac{4(n+3)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Maxima und Minima von* $J^n(x)$ *in den Intervallen* $k\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$ *resp.* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Da die hier gegebenen Intervalle für das Auftreten eines extremen Werthes völlig getrennt von den in V. gegebenen Intervallen für das Auftreten der Nullstellen sind, so folgt, dass in den oben gegebenen Intervallen für die Nullstellen auch stets nur eine Nullstelle liegt. Die Differenz zweier auf einander folgenden Wurzeln von J^n ist also für $x > \frac{4(n+3)^2-1}{\pi}$ grösser als $\frac{3\pi}{4}$ und kleiner als $\frac{3\pi}{2}$.

Giebt man in den Sätzen Ia.—IVa. dem Bruche ν den Werth $+\frac{1}{2}$, so erhält man ganz ebenso leicht:

VII. *Ist* $x > \frac{4(n+\frac{5}{2})^2-1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$ *in den Intervallen* $(k+\frac{3}{4})\pi$ *und* π *resp.* $(k+\frac{1}{4})\pi$ *und* $(k+\frac{1}{2})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

Herr *Rudski* giebt in seiner schon erwähnten Abhandlung an, dass sämmtliche Nullstellen von $J^{n+\frac{1}{2}}$ zwischen $(n+2k+1)\frac{\pi}{2}$ und $(n+2k+2)\frac{\pi}{2}$ liegen. Wenn auch, wie oben gezeigt wurde, dieses Resultat für die ersten

Nullstellen unrichtig ist, so bestätigt der letzte Satz die Richtigkeit für die höheren Nullstellen; allerdings geht Satz VII. über die Behauptung des Herrn *Rudski* hinaus; denn während bei diesem das Intervall für das Auftreten einer Wurzel $\frac{\pi}{2}$ beträgt, ist es in VII. auf $\frac{\pi}{4}$ eingeschränkt.

Für die *Bessel*sche Function zweiter Art habe ich*) folgende Definitionsgleichung gegeben:

$$Y^n(x) = \frac{2^{n+1}.x^n}{\sqrt{\pi}\,\Pi(n-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n-\frac{1}{2}}\omega\cos(x-\frac{2n-1}{2}\omega)}{\sin^{2n+1}\omega}e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega.$$

Setzt man hierin $x = (k-\frac{1}{2})\pi+\varepsilon'$, wo $0<\varepsilon'\leqq\pi$ ist, so geht das Integral in $(-1)^k K^n$ über und man erhält daher für Y^n genau dieselben Sätze wie für J^n; will man aber dieselbe Substitution nämlich $x = k\pi+\varepsilon$ anwenden, so braucht man in den oben ermittelten Sätzen nur $\frac{\pi}{2}$ von ε abzuziehen und erhält beispielsweise:

VIII. *Ist* $x>\frac{4(n+2)^2-1}{\pi}$, *so liegen die Nullstellen von* $Y^n(x)$ *in den Intervallen* $k\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$ *resp.* $(k+\frac{1}{2})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{4})\pi$, *je nachdem* n *gerade oder ungerade ist.*

III. Die *Bessel*schen Functionen nullter bis vierter Ordnung.

Bei den Beweisen des vorigen Abschnitts mussten wegen der Ungleichheit (13.) und den entsprechenden für die anderen Fälle die Indices unter $4\frac{1}{2}$ ausgeschlossen werden; es erübrigt noch diese Lücke wenigstens für ganze Indices auszufüllen.

1. Der Fall $n = 0$ ist früher von mir erledigt worden**); es hat sich ergeben:

---

*) Dieses Journ. Bd. 114.

**) Ibid. Der dort gegebene Beweis hat für Y^0 eine kleine Lücke; für die erste mögliche Nullstelle $\left(x\geqq\frac{\pi}{4}\right)$ von Y^0 ist die dort mit (31ª.) bezeichnete Ungleichheit für $\varepsilon = \frac{\pi}{8}$ nicht erfüllt. Es lässt sich (30.) leicht ändern in $\psi>\frac{4\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{\cos 2\varepsilon\sqrt{\sin 2\varepsilon}}\cdot e^{-2x\operatorname{tg}2\varepsilon}$: dann wird (31ª) $x>\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos 2\varepsilon}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$, also für $\varepsilon=\frac{\pi}{8}$: $x>\cos\frac{\pi}{4}$ und diese Ungleichheit ist für $x=\frac{\pi}{4}$ erfüllt.

IX. *Sämmtliche Nullstellen von* $J^0(x)$ *liegen zwischen* $(k+\frac{3}{4})\pi$ *und* $(k+\frac{7}{8})\pi$ *und die von* $Y^0(x)$ *zwischen* $(k+\frac{1}{4})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{8})\pi$, *wo* k *alle positiven ganzen Zahlen mit Einschluss der Null zu durchlaufen hat.*

2. Für den Fall $n = 1$ ergiebt sich für $x = k\pi+\varepsilon$ aus

$$J^1(x) = \frac{8x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\omega}\sin(x-\frac{\omega}{2})}{\sin^3\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega,$$

dass J^1 nur für $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$ verschwinden kann; der Fall $k = 0$ ist nach den Ergebnissen des ersten Abschnitts auszuschliessen, da für die erste Nullstelle $x > \sqrt{3}$ sein muss; es zeigt sich also jetzt, dass die erste Nullstelle grösser als π ist. Es soll nun gezeigt werden, dass für $\varepsilon < \frac{\pi}{8}$ die Function $(-1)^k J^1$ negativ ist. Für diese Werthe von ε ist

$$(-1)^k \frac{\pi}{8x} J^1 = \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sqrt{\cos\omega}\sin(\varepsilon-\frac{\omega}{2})}{\sin^3\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega - \int_{2\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\omega}\sin(\frac{\omega}{2}-\varepsilon)}{\sin^3\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung das erste Integral mit φ_1, das zweite mit ψ_1, so ist

$$\varphi_1 = \int_0^{2\varepsilon} \frac{\sin(\varepsilon-\frac{\omega}{2})}{(2x-\operatorname{tg}\omega)\sqrt{\cos\omega}}\cdot d(\operatorname{cotg}\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}) < \frac{\sin\varepsilon}{(2x-\operatorname{tg}2\varepsilon)\sqrt{\cos 2\varepsilon}}\cdot\operatorname{cotg}2\varepsilon\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}2\varepsilon},$$

$$\varphi_1 < \frac{\sin\varepsilon\sqrt{\cos 2\varepsilon}}{(2x-1)\sin 2\varepsilon} e^{-2x\operatorname{cotg}2\varepsilon}.$$

Ferner ist

$$\psi_1 > 2\int_{2\varepsilon}^{\omega_1} \frac{\sqrt{\cos\omega}}{\sin^3\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\left\{-\cos\left(\frac{\omega}{2}-\varepsilon\right)\right\} > 4\frac{\sqrt{\cos 2\varepsilon}\cdot\sin^2\left(\frac{\omega_1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^3 2\varepsilon} e^{-2x\operatorname{cotg}2\varepsilon},$$

wo ω_1 die Wurzel der aus (5.) für $n = 1$ hervorgehenden Gleichung

$$4x - 6\operatorname{tg}\omega + 4x\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^3\omega = 0$$

ist; setzt man $\omega = \frac{5\pi}{12}$, wofür $\operatorname{tg}\omega = 2+\sqrt{2}$ ist, so erkennt man, dass schon für $x > \frac{5}{4}$ die Wurzel $\omega_1 > \frac{5\pi}{12}$ ist.

Nun ist $(-1)^k J^1$ negativ, wenn $\varphi_1 < \psi_1$ ist, also wenn

$$4\cdot(2x-1)\sin^2\left(\frac{\omega_1}{4}-\frac{\varepsilon}{2}\right) > \sin\varepsilon\sin^2 2\varepsilon$$

ist, und dies ist sicher erfüllt, wenn

$$8(2x-1)\sin^2\frac{\pi}{24} > \sin\frac{\pi}{8},$$

also bei Benutzung von $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, wenn

$$8(2x-1)\sin\frac{\pi}{24} > 3,$$

und diese Ungleichheit ist, wie man bei Benutzung der ersten beiden Glieder der Sinusreihe erkennt, für $x > 3$ erfüllt. Also erhält man, dass $(-1)^k J^1$ für $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{8}$ negativ und für $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$ positiv ist; also:

X. *Sämmtliche Nullstellen von* $J^1(x)$ *liegen zwischen* $(k+\frac{1}{8})\pi$ *und* $(k+\frac{1}{4})\pi$, *wo* k *alle positiven ganzen Werthe mit Ausschluss der Null annehmen kann.*

Wie aus IX. und X. folgt, kann in dem Intervall für die Nullstellen von J^0 die Function J^1, also auch $\frac{dJ^0}{dx}$ nicht verschwinden; daher liegt in den oben angegebenen Intervallen für J^0 stets nur eine Nullstelle. Damit ist erst der völlige Beweis für die von mir aufgestellte Behauptung erbracht, dass die Differenz zweier Wurzelwerthe von J^0 kleiner als π ist, aber mit wachsendem x gegen π convergirt. Die neueren numerischen Berechnungen*) der ersten 40 Wurzeln von J^0 bestätigen dieses Ergebniss.

Nach der über Y^n gemachten Bemerkung am Schlusse des vorigen Abschnitts folgt sofort, dass $(-1)^k Y^1$ für $\varepsilon \leqq \frac{5}{8}\pi$ negativ und für $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$ positiv ist, wo $x = k\pi + \varepsilon$ ist. Also:

XI. *Die Nullstellen von* $Y^1(x)$ *liegen von der zweiten an zwischen* $(k+\frac{5}{8})\pi$ *und* $(k+\frac{3}{4})\pi$, *wo* k *alle positiven ganzen Werthe mit Ausschluss der Null annehmen kann. Die erste Nullstelle liegt zwischen* $\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{3}{4}\pi$.

3. Für den Fall $n = 2$ hat man:

$$(-1)^k J^2(x) = \frac{32x^2}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{3}{2}}\omega \sin(\varepsilon - \frac{3}{2}\omega)}{\sin^5\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega;$$

es ist daher $(-1)^k J^2$ positiv für $\varepsilon \geqq \frac{3}{4}\pi$. Im anderen Falle hat man zwei Theilintegrale mit der Zwischengrenze $\frac{2}{3}\varepsilon$; bezeichnet man die absoluten Werthe beider Integrale mit φ_2 und ψ_2, so ist

$$\varphi_2 = \frac{2}{5}\int_0^{\frac{2}{3}\varepsilon} \operatorname{cotg}^5\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\frac{\cos(\varepsilon - \frac{5}{2}\omega)}{\cos^{\frac{5}{2}}\omega} < \frac{2}{5}\operatorname{cotg}^5\frac{2\varepsilon}{3}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\varepsilon}\left\{\frac{1}{\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\varepsilon} - \cos\varepsilon\right\}.$$

Ist $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{2}$, so ist demnach

$$\varphi_2 < \frac{2}{5}\frac{\cos^{\frac{7}{2}}\frac{2}{3}\varepsilon}{\sin^5\frac{2}{3}\varepsilon} e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\varepsilon},$$

---

*) *Willson u. Peirce.* Bull. of the Amer. Math. Soc. Serie 2, Bd. 3. 1897.

falls $\operatorname{tg}\frac{2}{3}\varepsilon < \frac{2x}{5}$ oder wenn $x > \frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Ferner ist

$$\psi_2 > \frac{2}{3}\int_{\frac{2}{3}\varepsilon}^{\omega_1} \frac{\cos^{\frac{3}{2}}\omega e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}}{\sin^5\omega} d\left\{-\cos\left(\tfrac{3}{2}w-\varepsilon\right)\right\} > \frac{4}{3}\cdot\frac{\cos^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\varepsilon\cdot\sin^2\left(\frac{3}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin^5\frac{2}{3}\varepsilon} e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{3}\varepsilon},$$

wo ω_1 die reelle Wurzel von

$$4x - 10\operatorname{tg}\omega + 4x\operatorname{tg}^2\omega - 3\operatorname{tg}^3\omega = 0$$

ist. Also ist $(-1)^k J^2$ negativ für $\varepsilon \leqq \frac{\pi}{2}$, wenn $\varphi_2 - \psi_2$ negativ ist oder wenn

$$10\sin^2\left(\frac{3}{4}\omega_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\varepsilon\right) > 0$$

ist. Die linke Seite nimmt mit wachsendem ε ab, also ist $\varphi_2 - \psi_2$ negativ, wenn

$$10\sin^2\left(\frac{3}{4}\omega_1 - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{3}{4}$$

oder wenn

$$\sin\frac{3}{2}\omega_1 < \frac{17}{20}$$

ist. Diese Gleichung ist für $\omega_1 \geqq 81\frac{1}{5}^\circ$ erfüllt und ergiebt für x die Bedingung $x \geqq 5{,}2$. Von diesem Werthe an liegen die Nullstellen von J^2 zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{4}\pi$ und die von Y^2 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$.

4. Für den Fall $n = 3$ ist

$$(-1)^k J^3(x) = \frac{2^7\cdot x^3}{15\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{5}{2}}\omega\sin\left(\varepsilon-\frac{5}{2}\omega\right)}{\sin^7\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\omega.$$

Hier zerfällt das Integral in 3 Theilintegrale mit den Grenzen 0, $\frac{2\varepsilon}{5}$, $\frac{2\varepsilon+2\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{2}$; ist $\varepsilon \geqq \frac{\pi}{4}$, so fällt das letzte Integral fort. Bezeichnet man in diesem Fall die absoluten Beträge des ersten und zweiten Integrals mit φ_3 und ψ_3, so ist:

$$\varphi_3 = \frac{2}{7}\int_0^{\frac{2\varepsilon}{5}} \operatorname{cotg}^7\omega e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\frac{\cos\left(\varepsilon-\frac{7}{2}\omega\right)}{\cos^{\frac{7}{2}}\omega} < \frac{2}{7}\frac{\cos^{\frac{9}{2}}\frac{2}{5}\varepsilon\left(1-\cos\varepsilon\cos^{\frac{5}{2}}\frac{2}{5}\varepsilon\right)}{\sin^7\frac{2}{5}\varepsilon} e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{5}\varepsilon},$$

falls $\operatorname{tg}\frac{2}{5}\varepsilon < \frac{2x}{7}$ ist.

$$\psi_3 = \tfrac{2}{5}\int_{\frac{2\varepsilon}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\frac{5}{2}}\omega\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}}{\sin^7\omega}\, d\{-\cos(\varepsilon-\tfrac{5}{2}\omega)\} > \tfrac{4}{5}\cdot\frac{\cos^{\frac{5}{2}}\tfrac{2}{5}\varepsilon\cdot\sin^2(\tfrac{5}{4}\omega_1-\tfrac{\varepsilon}{2})}{\sin^7\tfrac{2}{5}\varepsilon}\cdot e^{-2x\operatorname{cotg}\frac{2}{5}\varepsilon},$$

wo ω_1 die reelle Wurzel der Gleichung

$$4x-14\operatorname{tg}\omega+4x\operatorname{tg}^2\omega-5\operatorname{tg}^3\omega = 0$$

bedeutet; damit $(-1)^k J^3$ negativ sei, ergiebt sich die Bedingung:

$$14\sin^2\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon\right)\left(1-\cos\varepsilon\cos^{\frac{5}{2}}\tfrac{2}{5}\varepsilon\right)>0.$$

Wegen der aus Formel XI. resultirenden Gleichung

$$-J^3 = \left(1-\frac{8}{x^2}\right)J^1+\frac{4}{x}J^0$$

hat J^3 für $x>2\sqrt{2}$ das entgegengesetzte Zeichen von J^0 und J^1, wenn diese dasselbe Zeichen haben, also nach den Sätzen IX. und X. für ε zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ und zwar ist dann $(-1)^k J^3$ negativ. Es bleibt also die obige Ungleichung nur für ε zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und π zu untersuchen. In diesem Falle ist sie sicher erfüllt, wenn:

$$14\sin^2\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon\right)\left(1+\cos^2\frac{6\pi}{20}\right)>0$$

oder

$$\sqrt{7}\sin\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\sqrt{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon\right)\cos\frac{3\pi}{20}>0$$

ist. Wenn ω_1 so gross ist, dass $\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\varepsilon$ ist, so ist diese Ungleichheit erfüllt: hat ω_1 kleinere Werthe, so nimmt die linke Seite mit wachsendem ε ab; es ist also $\varphi_3-\psi_3$ negativ, wenn

$$\sqrt{7}\sin\left(\frac{5}{4}\omega_1-\frac{\pi}{2}\right)>\sqrt{5}\sin\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3\pi}{20}$$

ist. Wenn $\omega_1>82\frac{4}{5}^\circ$ ist, so ist diese Bedingung erfüllt; aus der Gleichung für $\operatorname{tg}\omega_1$ folgt dann, dass $x>9$ sein muss, während die Bedingungsgleichung $\operatorname{tg}\frac{2}{5}\varepsilon = \frac{2x}{7}$ für $x>10\frac{3}{4}$ erfüllt ist. Von diesem Werthe an liegen die Nullstellen von J^3 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$; die von Y^3 zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{4}\pi$.

5. Multiplicirt man Formel II. für $n = 2$:

$$\frac{4}{x}J^2 = J^1+J^3$$

mit $\frac{6}{x}$ und wendet abermals II. an, so folgt:

$$\left(1-\frac{24}{x^2}\right)J^2+\frac{6}{x}J^1 = -J^4.$$

Es ist demnach J^4 negativ, wenn $x > 2\sqrt{6}$ ist und J^1 und J^2 gleichzeitig positiv sind, d. h. wenn ε zwischen $\frac{3}{4}\pi$ und π liegt.

Aus Formel VIII. folgt

$$5J^2+3J^6 = -8\left(1-\frac{30}{x^2}\right)J^4.$$

Nun ist sowohl J^2 als J^6 für ε zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ negativ, sobald $x > \frac{143}{\pi}$ oder $x > 14\frac{1}{2}\pi$ ist; demnach ist hierfür J^4 positiv, also liegen die Nullstellen von J^4 von $x > 14\frac{1}{2}\pi$ an zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ und die von Y^4 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$.

IV. Die erste Nullstelle von Y^n.

Durch die vorangehenden Sätze ist die ungefähre Lage der höheren Nullstellen von Y^n ermittelt worden; es erübrigt noch wie zuerst für J^n nun auch für Y^n die Lage der ersten Nullstelle ungefähr anzugeben. Es ist:*)

$$(14.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\pi}{2}Y^n(x) = \left\{\Psi(n)-\log\frac{x}{2}\right\}J^n(x)+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p}(x) \\ +\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n+p}\right)J^{n+2p}(x), \end{aligned}\right.$$

wo Ψ die bekannte *Gauss*sche Transscendente bedeutet. Der Ausdruck rechts besteht aus 3 wesentlich verschiedenen Theilen. Wendet man auf den mittleren Theil die Formel XII. an, so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} &= \frac{1}{2}J^n\sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^\lambda\frac{\Pi n\,\Pi(p-\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{p\,\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\,\Pi(n-p)\,\Pi(n-p+\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2p-2\lambda} \\ &+\frac{1}{2}J^{n+1}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda=0}^{p-1}(-1)^{\lambda+1}\frac{\Pi n\,\Pi(p-\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda-1)}{p\,\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\,\Pi(n-p)\,\Pi(n-p+\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2p-2\lambda-1}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Factor von $\frac{1}{2}J^n$ mit H^n, so ist

$$\begin{aligned} H^n &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{p}(-1)^{p-\lambda}\frac{\Pi n\,\Pi\lambda\,\Pi(n-p+\lambda)}{p\,\Pi(p-\lambda)\,\Pi(2\lambda-p)\,\Pi(n-p)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda} \\ &= \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\Pi n\,\Pi\lambda}{\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}\sum_{p=\lambda}^{n}(-1)^{p-\lambda}\frac{\Pi(n-p+\lambda)}{p\,\Pi(p-\lambda)\,\Pi(2\lambda-p)\,\Pi(n-p)}. \end{aligned}$$

*) Siehe z. B. Programm des Sophien-Realgymn. Berlin 1895. Es findet sich dort das Versehen, dass $\Psi(0)$ statt $\Psi(n)$ steht.

Bezeichnet man die Summe mit $\varphi(n,\lambda)$, so ist

$$\varphi(n,\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{(p+\lambda)\Pi p\,\Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p)}.$$

Als obere Grenze kann ∞ gewählt werden, da die Summe von selbst abbricht. Hieraus folgt

$$n\varphi(n,\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{(p+\lambda)\Pi p\,\Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p-1)} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p)}$$

$$(n+\lambda)\varphi(n-1,\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{(p+\lambda)\Pi p\,\Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p-1)} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p-1)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p-1)},$$

also:

$$(15.)\quad n\varphi(n,\lambda)-(n+\lambda)\varphi(n-1,\lambda) = \lambda\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p-1)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-p)\Pi(n-\lambda-p)}.$$

Vertauscht man in der zweiten Summe von $(n+\lambda)\varphi(n-1,\lambda)$ den Summationsbuchstaben p mit $p-1$, so erhält man:

$$(16.)\quad n\varphi(n,\lambda)-(n+\lambda)\varphi(n-1,\lambda) = (\lambda+1)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{\Pi(n-p)}{\Pi p\,\Pi(\lambda-p+1)\Pi(n-\lambda-p)}.$$

Die Summe auf der rechten Seite von (16.) geht in die in (15.) über, wenn $n-1$ und $\lambda-1$ an Stelle von n und λ tritt; die Summen bleiben also bei dieser Substitution ungeändert. Man kann daher in (15.) für λ Eins setzen, wenn man gleichzeitig $n-\lambda+1$ an Stelle von n setzt; dann aber reducirt sich die Summe auf ihre beiden ersten Glieder, die zusammen Null ergeben, somit ist

$$n\varphi(n,\lambda)-(n+\lambda)\varphi(n-1,\lambda) = 0$$

$$\varphi(n,\lambda) = \frac{(n+\lambda)(n+\lambda-1)\cdots(2\lambda+1)}{n(n-1)\cdots(\lambda+1)}\varphi(\lambda,\lambda).$$

Nun ergiebt sich aus der Definition von $\varphi(n,\lambda)$, dass

$$\varphi(\lambda,\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

ist, also hat man

$$\varphi(n,\lambda) = \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-1)}{\Pi n\,\Pi 2\lambda},$$

und demnach erhält man

$$H^n = \sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}.$$

Ganz ebenso lässt sich der Factor von J^{n+1} umformen und es ergiebt sich

$$\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{\Pi n}{p\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} = \frac{1}{2}J^n \sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$

$$-\frac{1}{2}J^{n+1}\sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\lambda-1)\,\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda-1}.$$

Hieraus folgt bei Benutzung der Formel V:

$$(17.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} = \frac{1}{4}J^n \sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\Pi\lambda\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda} \\ \qquad +\frac{1}{2}\frac{dJ^n}{dx}\sum_1^n \frac{\Pi(\lambda-1)\Pi(\lambda-1)\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(2\lambda-1)\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda-1}. \end{cases}$$

Aus diesem Werthe erkennt man, dass der mittlere Theil in (14.) für solche Werthe von x, wofür J^n und $\frac{dJ^n}{dx}$ positiv sind, auch positiv ist. Wählt man x kleiner als die erste Nullstelle von $\frac{dJ^n}{dx}$, so sind nach den Sätzen des ersten Abschnitts alle J^{n+p} und $\frac{dJ^{n+p}}{dx}(p \gtreqless 0)$ positiv und es nimmt J^{n+p} mit wachsendem p nach Formel III. ab. In diesem Fall ist der dritte Theil von (14.) sicher negativ; es lässt sich für den absoluten Betrag dieses Theils eine obere Grenze angeben. Man betrachte zunächst den Theil $\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p}$ und fasse je zwei auf einander folgende Glieder zusammen, so erhält man eine Reihe mit lauter negativen Gliedern, deren absoluter Betrag $\frac{1}{p}J^{n+2p} - \frac{1}{p+1}J^{n+2p+2}$ ist, und diese Differenz ist kleiner als $\frac{1}{p(p+1)}J^n$, wenn $x \leqq n+1$ ist. Man hat nämlich

$$J^{n+2p} - J^{n+2p+2} = 2\frac{dJ^{n+2p+1}}{dx},$$

$$J^{n+2p-2} - J^{n+2p} = 2\frac{dJ^{n+2p-1}}{dx}.$$

Ferner erhält man durch Differentiation von Formel III.:

$$2\frac{d^2J^{n+2p}}{dx^2} = \frac{dJ^{n+2p-1}}{dx} - \frac{dJ^{n+2p+1}}{dx}.$$

Da für die angegebenen Werthe von x alle in diesen Formeln auftretenden Functionen mit ihren ersten und zweiten Ableitungen positiv sind, so ergiebt sich aus den drei letzten Gleichungen:

$$J^{n+2p-2} - J^{n+2p} > J^{n+2p} - J^{n+2p+2},$$

also erst recht

$$J^{n+2p-4} - J^{n+2p-2} > J^{n+2p} - J^{n+2p+2},$$

und so fort, schliesslich

$$J^n - J^{n+2} > J^{n+2p} - J^{n+2p+2},$$

vorausgesetzt, dass $\frac{d^2 J^{n+2}}{dx^2}$ positiv ist, und dies ist nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes für $x \gtreqless n+1$ erfüllt. Durch Addition der Ungleichheiten ergiebt sich

$$J^n - J^{n+2p} > p(J^{n+2p} - J^{n+2p+2})$$

oder

$$J^n > (p+1)J^{n+2p} - pJ^{n+2p+2}$$

und diese Ungleichheit ergiebt, durch $p(p+1)$ dividirt, die Behauptung.

Nun ist

$$-\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p} = \sum_0^\infty \left\{\frac{1}{2p+1} J^{n+4p+2} - \frac{1}{2p+2} J^{n+4p+4}\right\},$$

und diese Summe ist wegen der eben bewiesenen Ungleichung kleiner als $J^n \sum_0^\infty \frac{1}{(2p+1)(2p+2)}$ und dies ist $J^n \log 2$; also ist

$$(18.) \qquad -\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p} < J^n \log 2.$$

Auch der Theil $\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p}$ ist negativ; trennt man den ersten Summanden ab, so ist der Rest positiv; folglich ist

$$-\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p} < \frac{1}{n+1} J^{n+2},$$

und bei Benutzung von Formel X.:

$$(19.) \quad -\sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p} < \frac{1}{n+1}\left\{\frac{2n(n+1)}{x^2} - 1\right\} J^n - \frac{2}{x}\frac{dJ^n}{dx} < \left(\frac{2n}{x^2} - \frac{1}{n+1}\right) J^n.$$

Nach einer bekannten *Gauss*schen Formel*) ist:

$$(20.) \qquad \Psi(n) > \log(n+\tfrac{1}{2});$$

setzt man nun in (14.) $x = n+\frac{1}{2}$, so folgt aus (18.) und (20.):

$$\left\{\Psi(n) - \log\frac{x}{2}\right\} J^n + \sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{p} J^{n+2p} > 0.$$

Berücksichtigt man in (17.) nur den ersten Summanden der ersten Summe,

---

*) Werke Bd. 3 S. 154. Formel 66.

so folgt mit Hülfe von (19.):

$$\frac{1}{2}\sum_1^n \frac{\Pi n}{p\,\Pi(n-p)}\left(\frac{2}{x}\right)^p J^{n-p} + \sum_1^\infty (-1)^p \frac{1}{n+p} J^{n+2p} > \left(\frac{n}{x^2} - \frac{2n}{x^2} + \frac{1}{n+1}\right) J^n$$

$$> \left(\frac{1}{n+1} - \frac{n}{x^2}\right) J^n,$$

und diese Differenz ist für $x = n + \frac{1}{2}$ positiv. Aus den letzten Ungleichheiten ergiebt sich, dass $Y^n(x)$ für $x = n + \frac{1}{2}$ positiv ist.

Für die erste Nullstelle von J^n folgt aus Formel XIII., dass Y^n negativ ist. Da für sehr kleine Werthe von x, wie aus (14.) folgt, Y^n positiv ist, so liegt die erste Nullstelle von Y^n vor der von J^n. Für die zweite Nullstelle von Y^n ist $\frac{dY^n}{dx}$ positiv, also folgt aus XIII., dass hierfür J^n negativ ist; es liegt die zweite Nullstelle von Y^n hinter der von J^n.

Die erste Nullstelle von J^n ist grösser als $n + \frac{1}{2}$; da Y^n für $x = n + \frac{1}{2}$ positiv ist, so ist es vorher noch gar nicht oder mindestens zwei Mal schon Null gewesen. Das letztere ist nach dem eben über die zweite Nullstelle von Y^n bewiesenen Satze unmöglich: *die erste Nullstelle von $Y^n(x)$ liegt nach $x = n + \frac{1}{2}$.*

Weitere Ergebnisse über die Lage der Nullstellen hoffe ich in Kürze nachfolgen lassen zu können. Der Minimalwerth von x, von dem an die Sätze des zweiten Abschnittes Geltung haben, lässt sich wesentlich herabsetzen und über die gegenseitige Lage der ersten Nullstelle von Y^n und seiner Ableitungen lassen sich ähnliche Betrachtungen wie für J^n anstellen.
