Ueber die singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit n abhängigen Variablen.

(Von Herrn *M. Hamburger* in Berlin.)

Im 121. Bande dieses Journals S. 265*) sind die singulären Lösungen einer einzigen algebraischen Differentialgleichung n-ter Ordnung, soweit sie die ersten Integrale derselben betreffen, behandelt worden. Wiewohl die Differentialgleichungssysteme mit n abhängigen Variablen stets auf eine einzige Differentialgleichung n-ter Ordnung zurückgeführt werden können, so schien es doch von Interesse, die Frage nach den singulären Lösungen der ersteren Systeme, ohne Hülfe dieser Reduction zu untersuchen. Die Entwickelungen geschehen nach der gleichen Methode, die in der angeführten Abhandlung angewandt ist, und zwar wird zuerst von den Differentialgleichungen, dann von den vollständigen Integralen ausgegangen. Die Ergebnisse stimmen in beiden Betrachtungen überein. Die Frage nach den singulären Lösungen eines algebraischen Differentialgleichungssystems erster Ordnung hat Herr *Picard* in seinem Traité d'Analyse t. III, p. 52ff. behandelt, sich jedoch auf den Fall beschränkt, dass die darin auftretende Irrationalität durch eine Quadratwurzel darstellbar ist. Ein Kriterium dafür, ob die durch Nullsetzung des Radicanden erhaltene Gleichung, falls sie mit dem Differentialgleichungssystem verträglich ist, ein singuläres oder particuläres Integral darstellt, findet sich a. a. O. nicht angegeben. Das dort eingeschlagene Verfahren, aus dem nicht ersichtlich ist, wie es auf den Fall einer beliebigen algebraischen Irrationalität auszudehnen sei, ist von dem hier befolgten

*) Es sei mir gestattet, bei dieser Gelegenheit einige Berichtigungen zu der genannten Abhandlung anzumerken.

S. 266, Zeile 9 von unten lies abhängigen statt unabhängigen Variablen, S. 269, Zeile 4 von unten lies η_0 statt σ_0.

wesentlich verschieden. Dieses beruht, wie in der zu Anfang angeführten Arbeit, auf der Erweiterung der von Herrn *Fuchs**) eingeführten Methode der Zerlegung der Discriminante einer Differentialgleichung in ihre linearen Theiler auf Systeme von Differentialgleichungen.

I.

Wir betrachten das System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(A.)\qquad f_i\left(x, y_1, \ldots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}\right) = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

wo die f ganze rationale Functionen der eingeschlossenen Argumente bedeuten. Durch Einführung von

$$z = u_1\frac{dy_1}{dx} + u_2\frac{dy_2}{dx} + \cdots + u_n\frac{dy_n}{dx},$$

wo $u_1, \ldots, u_n$ unbestimmte Grössen bedeuten, können die vorstehenden Differentialgleichungen nach einem bekannten Satze durch das System

$$(1.)\qquad \frac{dy_i}{dx} = R_i(x, y_1 \ldots y_n, z), \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

ersetzt werden, wo die R_i rationale Functionen von $x, y_1, \ldots, y_n, z$ bedeuten und z durch eine algebraische Gleichung

$$(2.)\qquad f(x, y_1 \ldots y_n, z) = 0$$

definirt ist. Die Function f sei vom m-ten Grade in z mit Coefficienten, die in $x, y_1, \ldots, y_n$ rational und ohne gemeinsamen Theiler sind. Die Gleichung $f = 0$ wird in dem Sinne irreductibel vorausgesetzt, dass sie nicht in Gleichungen niedrigeren Grades in Bezug auf z mit Coefficienten gleicher Beschaffenheit zerlegbar sei. Im Falle der Reductibilität von (2.) würden so viele Systeme (1.) zu betrachten sein, als es irreductible Factoren von f giebt.

Durch Elimination von z aus den Gleichungen

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z)}{\partial z} = 0$$

gehe die Discriminantengleichung

$$(3.)\qquad \Delta(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0^{**})$$

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884, Bd. 32, S. 699ff.

**) Zur Discriminantengleichung kann man auch unmittelbar von den Gleichungen hervor, welche die Bedingung dafür liefert, dass mehrere Wurzeln z der Gleichung (2.) einander gleich werden. $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ sei eine Wurzel der Gleichung (3.). Wir können für die Variablen $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ Bereiche festsetzen, in denen η endlich und stetig bleibt und sich nicht verzweigt. Ist $x_0, y_0, y_{1,0}, \dots, y_{n-1,0}$ ein willkürliches Werthsystem innerhalb eines solchen Bereiches, so lässt sich in der Umgebung desselben η in eine convergente nach ganzen positiven Potenzen von

$$x-x_0,\ y-y_0,\ y_1-y_{1,0},\ \dots,\ y_{n-1}-y_{n-1,0}$$

fortschreitende Reihe entwickeln. Setzt man diese Reihe η in die Gleichung (2.) für y_n ein, so werden durch die Gleichung

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta, z) = 0$$

m Functionen z von $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ definirt, von denen mehrere mit einander zusammenfallen werden. Es mögen nun p Wurzeln dieser Gleichung in z gleich ζ werden, wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen ist, dass ζ nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe von $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ unendlich sei; im anderen Falle brauchte man nur $z' = \frac{1}{z}$ statt z einzuführen. Es giebt dann p Functionen z, die die Gleichung (2.) befriedigen und für $y_n = \eta$ in den gemeinsamen Werth ζ übergehen. Diese Functionen z werden im allgemeinen in Gruppen von zusammenhängenden Zweigen zerfallen und eine Gruppe von $\alpha(\leqq \beta)$ Zweigen wird die Darstellung haben*):

$$(4.)\qquad z-\zeta = g_0(y_n-\eta)^{\frac{\varkappa}{\alpha}} + g_1(y_n-\eta)^{\frac{\varkappa+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo $\varkappa$ und α von Null verschiedene positive ganze Zahlen bedeuten. Denkt man sich das willkürliche Werthsystem $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n-1,0}$ so gewählt, dass ζ für dasselbe nicht unendlich wird, so sind $\zeta, g_0, g_1, \dots,$ ebenso wie η durch Reihen darstellbar, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$,

---

(A.) aus gelangen, indem man aus den $n+1$ Gleichungen

$$f_1 = 0,\quad f_2 = 0, \dots, f_n = 0,\quad \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial \frac{dy_1}{dx}},\quad \frac{\partial f_2}{\partial \frac{dy_2}{dx}} \ \cdots\ \frac{\partial fn}{\partial \frac{dy}{dx_n}} = 0$$

die Ableitungen $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx}$ eliminirt. Das Eliminationsresultat liefert die Gleichung $\Delta = 0$.

*) Vergl. *Fuchs*, Berl. Ber. 1884, S. 701ff.

$y_1-y_{10}, \dots, y_{n-1}-y_{n-1,0}$ fortschreiten, und in der Umgebung von $x_0, y_{10} \dots y_{n-1,0}$ convergiren. Da $\frac{\varkappa}{\alpha}$ als Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n-\eta$ in der Entwickelung (4.) angenommen ist, so darf g_0 nicht identisch verschwinden. Durch Einsetzen der Reihe für z in das Gleichungssystem (1.) erhält man, indem man noch $y_n = \eta+u^\alpha$ setzt

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta+u^\alpha, \zeta+g_0u^\varkappa+g_1u^{\varkappa+1}+\cdots) & (i=1,2,\dots,n-1) \\ \dfrac{d(y_n-\eta)}{dx} = \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = R_n(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta+u^\alpha, \zeta+g_0u^\varkappa+\cdots)-\dfrac{\partial\eta}{\partial x} \\ \qquad -\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta+u^\alpha, \zeta+g_0u^\varkappa+\cdots). \end{cases}$$

Nehmen wir zunächst an, dass keine der rationalen Functionen $R_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, z)$ $i = 1, 2 \dots n$ für $y = \eta$, $z = \zeta$ unendlich wird, dann erhält man folgende Entwickelungen

$$(6.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(\eta, \zeta)+\alpha_i u+\beta_i u^2+\cdots, & (i=1,2,\dots,n-1) \\ \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = R_n(\eta, \zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2+\cdots, \end{cases}$$

wo zu zur Abkürzung $R(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \eta, \zeta) = R(\eta, \zeta)$ und

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i(\eta, \zeta) = \sigma$$

gesetzt ist.

Für die weitere Behandlung ist es wesentlich zu unterscheiden, ob $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ein Integral des Systems (1.) ist oder nicht. Im ersten Falle muss $R_n(\eta, \zeta) = \frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i(\eta, \zeta)$, also $R_n(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta, \zeta)-\sigma$ identisch gleich Null sein, wenn ζ einer der Werthe ist, in den z für $y_n = \eta$ übergeht.

Wir nehmen zunächst an, dass $y_n = \eta$ kein Integral des Systems (1.) sei, also $R_n(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta, \zeta)-\sigma$ nicht identisch verschwinde, und denken uns das willkürliche Werthsystem $x_0, y_0, y_{1,0}, \dots, y_{n-1,0}$, für welches η in η_0 und ζ in ζ_0 übergehe, so gewählt, dass auch für dieses $R_n(x, y_1, \dots, y_{n-1}, \eta, \zeta)-\sigma$ von Null verschieden ist, dann erhalten wir aus (6.), indem u als unabhängige Variable eingeführt wird, folgendes System von n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{dn}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}}{R_n(\eta, \zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2}, \\ \dfrac{dy_i}{du} = \dfrac{\alpha u^{\alpha-1}\{R_i(\eta, \zeta)+\alpha_i u+\beta_i u^2+\cdots\}}{R_n(\eta, \zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2+\cdots} & (i=1,2,\dots,n-1) \end{cases}$$

durch welches die n Variablen $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ als Functionen von u bestimmt werden. Die rechten Seiten stellen nach den gemachten Voraussetzungen Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, u$ dar, die für $x = x_0$, $y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $u = 0$ endlich sind und in der Umgebung dieses Werthsystems in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y_1-y_{1,0}$, $y_2-y_{2,0}, \ldots, y_{n-1}-y_{n-1,0}$ und u entwickelt werden können. Die den Differentialgleichungen (7.) genügenden Functionen $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, die für $u = 0$ bez. die Werthe $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ annehmen, lassen sich daher in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von u darstellen, die die Form erhalten

$$(8.)\quad \begin{cases} x-x_0 = \dfrac{1}{R_{n,0}-\sigma_0}u^\alpha+\beta u^{\alpha+1}+\cdots, \\ y_i-y_{i0} = \dfrac{R_{i_0}}{R_{n,0}-\sigma_0}u^\alpha+\gamma_i u^{\alpha+1}+\cdots \qquad (i=1,2,\ldots,n-1), \end{cases}$$

wo der Index 0 bei σ, R_n und R_i, wie überall im Folgenden, bedeutet, dass in den mit ihm behafteten Grössen

$$x = x_0,\quad y_1 = y_{10},\quad y_2 = y_{20},\quad \ldots,\quad y_{n-1} = y_{n-1,0}$$

und somit $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$ zu setzen ist. Durch Umkehrung der ersten der Gleichungen (8.) entsteht

$$u = (y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = (R_{n,0}-\sigma_0)^{\frac{1}{\alpha}}(x-x_0)^{\frac{1}{\alpha}}+\delta(x-x_0)^{\frac{2}{\alpha}}$$

und hieraus

$$(9.)\quad \begin{cases} y_n-\eta = (R_{n,0}-\sigma_0)(x-x_0)+\varepsilon_1(x-x_0)^{1+\frac{1}{\alpha}}+\varepsilon_2(x-x_0)^{1+\frac{2}{\alpha}}+\cdots \\ y_i-y_0 = R_{i,0}(x-x_0)+a_i(x-x_0)^{1+\frac{1}{\alpha}}+\cdots \qquad (i=1,2,\ldots,n-1). \end{cases}$$

Betrachtet man $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ als Coordinaten eines Punktes im $(n+1)$-dimensionalen Raume, so stellen die Gleichungen (9.) eine Gruppe von α-Zweigen einer Integralcurve des Systems (1.) dar, die dadurch bestimmt ist, dass sie durch den Punkt $x = x_0$, $y_1 = y_{10}, \ldots y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $y_n = \eta_0$ hindurchgeht. Die Zweige berühren sich sämmtlich in diesem Punkte, da in ihm die Ableitungen $\frac{dy_i}{dx}$ für alle Zweige denselben Werth haben. Es ist nämlich für $i=1, 2, \ldots, n-1$, $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)^0 = R_{i,0}$ und $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0}+R_{n,0}-\sigma_0 = R_{n,0}$ für alle Zweige.

Die Gleichung $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ stellt in dem gedachten Raume eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit dar, die den Punkt $x=x_0$, $y_1 = y_{1,0}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $y_n = \eta_0$ enthält. Keine der durch diesen Punkt gehenden Curven, die in der Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ verläuft, berührt die durch den nämlichen Punkt gehenden Zweige der Integralcurve. Denn wählt man die Curve auf der Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ so, dass $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0 = R_{i,0}$, für $i = 1, 2, \dots, n-1$, dann wird

$$\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0} = \sigma_0,$$

also in dem vorliegenden Falle wesentlich verschieden von $R_{n,0}$, dem Werthe von $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0$ in den Zweigen der Integralcurve.

Ist also $y_n = \eta$ kein Integral des Systems (1.), so ist die Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ der Ort für die Punkte, durch welche Gruppen von einander berührenden Zweigen der Integralcurven des Systems (1.) hindurchgehen, die aber von keiner auf der Mannigfaltigkeit verlaufenden Curven in dem Schnittpunkte berührt werden. Die Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ beginnt mit der ersten Potenz.

Die Gültigkeit dieser Sätze setzt *willkürliche* Werthe von x_0, $y_{1,0}$, $y_{2,0}, \dots, y_{n-1,0}$ voraus, sie erleidet eine Ausnahme, wenn $R_{n0} = \sigma_0$ ist oder einige der $R_{i,0} (i = 1, 2, \dots, n)$ unendlich werden, was nach unserer Annahme gewisse Bedingungsgleichungen zwischen den genannten Anfangswerthen erfordert.

Wir gehen jetzt zu der Betrachtung des Falles über, dass $y_n = \eta$ ein Integral des Differentialgleichungssystems (1.) ist und behalten die Annahme bei, dass keine der n Functionen $R_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n, z)$ für $y_n = \eta$, $z = \zeta$ unendlich werde. Da jetzt $R_n(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta, \zeta) - \sigma$ identisch gleich Null ist, so erhält man aus (6.) die Entwickelungen

$$\text{(10.)} \quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(\eta, \zeta) + \alpha_i u + \beta_i u^2 + \cdots & (i=1,2,\dots,n-1) \\ \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = h_\mu u^\mu + h_{\mu+1}u^{\mu+1} + \cdots, \end{cases}$$

wo h_μ als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt wird. Hier sind zwei weitere Fälle zu unterscheiden:

1. $\mu < \alpha$.

Dieser Fall kann, da μ und α von Null verschiedene positive ganze Zahlen sind, nur eintreten, wenn $\alpha > 1$ ist. Es gelten dann die Darstellungen

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-\mu-1}}{h_\mu + h_{\mu+1}u + \cdots},$$

$$\frac{dy_i}{du} = \frac{\alpha u^{\alpha-\mu-1}}{h_\mu + h_{\mu+1}u + \cdots}\{R_i(\eta, \zeta) + \alpha_i u + \beta_i u^2 + \cdots\} \qquad (i=1,2,\dots,n-1)$$

Wählt man das willkürliche Werthsystem $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n-1,0}$ in dem Eindeutigkeitsbereich von η so, dass für dasselbe h_μ nicht verschwindet, so lassen sich die rechten Seiten des vorstehenden Differentialgleichungssystems in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, $y_1-y_{10}, \ldots, y_{n-1}-y_{n-1,0}$ und u entwickeln und die Integrale desselben, die für $u=0$ bez. die Werthe $x_0, y_{10}, y_{2,0}, \ldots, y_{n-1,0}$ annehmen, lassen sich daher in Reihen nach ganzen posiven Potenzen von u darstellen, die die Form erhalten:

$$x-x_0 = \frac{\alpha}{(\alpha-\mu)h_{\mu,0}} u^{\alpha-\mu} + b u^{\alpha-\mu+1} + \cdots,$$

$$y_i - y_{i0} = \frac{\alpha}{(\alpha-\mu)h_{\mu,0}} \cdot R_{i,0} u^{\alpha-\mu} + c u^{\alpha-\mu+1} + \cdots \qquad (i=1,2,\ldots,n-1).$$

Durch Umkehrung der ersten Gleichung ergiebt sich

$$u = (y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha-\mu}{\alpha}\cdot h_{\mu,0}\right)^{\frac{1}{\alpha-\mu}} (x-x_0)^{\frac{1}{\alpha-\mu}} + \beta (x-x_0)^{\frac{2}{\alpha-\mu}}$$

und durch Erhebung in die α-te Potenz

$$(11.)\quad \begin{cases} y_n - \eta = \left(\frac{\alpha-\mu}{\alpha} h_{\mu,0}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\mu}} (x-x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha-\mu}} + \beta (x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-\mu}} + \cdots, \\ y_i - y_0 = R_{i,0}(x-x_0) + \gamma (x-x_0)^{1+\frac{1}{\alpha-\mu}} + \cdots \qquad (i=1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen wird eine Gruppe von $\alpha-\mu$ im Punkte $x=x_0$, $y_1=y_{1,0}, \ldots, y_{n-1}=y_{n-1,0}$, $y_n=\eta_0$ zusammenhängenden Zweigen einer Integralcurve von (1.) dargestellt, die sich in demselben Punkte, falls $\alpha-\mu>1$ ist, berühren. Denn für alle Zweige ist

$$\left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0 = R_{i,0} (i=1,2,\ldots,n-1), \quad \left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0} = \sigma_0.$$

Aber jeder dieser Zweige hat in dem gedachten Punkte auch eine Berührung mit der Mannigfaltigkeit $y_n=\eta$. Denn bestimmt man auf ihr die Richtung eines Linienelements im Durchgangspunkte durch die Bedingungen $\left(\frac{dy_i}{dx}\right)_0 = R_{i,0}$ für $i=1,2,\ldots,n-1$, so wird $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0} = \sigma_0$, gleich dem Werthe von $\left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0$ in den Zweigen der Integralcurve. Da dies für jeden willkürlichen Punkt $x=x_0$, $y_1=y_{10}, \ldots, y_{n-1}=y_{n-1,0}$, $y_n=\eta_0$ auf der Mannigfaltigkeit $y_n=\eta$ gilt, so können wir sagen, dass der Ort $y_n=\eta$ eine Enveloppe der Integralcurven des Systems (1.) ist, und wir nennen in diesem Falle $y_n=\eta$ ein singuläres Integral des Systems (1.), welche Bezeichnung im folgenden Abschnitt gerechtfertigt wird. Ist $\mu=\alpha-1$, so reducirt sich die Anzahl der Zweige der aus der Entwickelung (4.) hervorgehenden Integralcurve auf 1, und der Ort $y_n=\eta$ bildet für die Integralcurve, die von ihm daselbst berührt wird, keinen Verzweigungspunkt. Den entsprechenden Complex der Integralcurven, die eine Enveloppe je einer Schar der particulären Integralcurven bilden, erhält man durch Einsetzen von $y_n = \eta(x, y_1, \dots, y_{n-1})$ in die $n-1$ ersten Differentialgleichungen des Systems (1.) und Integration derselben; die letztere ergiebt $y_1, \dots, y_{n-1}$ als Function von x mit $n-1$ willkürlichen Constanten, die im Verein mit $y_n = \eta$ den erwähnten Complex darstellen.

Charakteristisch für den betrachteten Fall ist, dass in der Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ der Exponent der niedrigsten Potenz *grösser* als Eins ist.

Die aufgestellten Sätze erleiden eine Ausnahme, wenn das willkürliche Werthsystem $x = x_0$, $y_1 = y_{10}, \dots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$ so gewählt wird, dass einer der Ausdrücke $R_i(x_0, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}\eta_0, \zeta_0)$ unendlich wird, oder $h_{\mu,0}$ verschwindet, wodurch Continuen $(n-1)$-ter Dimension in der n-fachen Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ ausgeschlossen werden.

2. $\mu > \alpha - 1$.

In diesem Falle ist nach (10.)

$$(12.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i(\eta, \zeta) + \alpha_i u + \beta_i u^2 + \cdots, & (i = 1, 2, \dots, n-1) \\[2ex] \dfrac{du}{dx} = \dfrac{h_\mu}{\alpha} u^{\mu-\alpha+1} + \dfrac{h_{\mu+1}}{\alpha} u^{\mu-\alpha+2} + \cdots. \end{cases}$$

Die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen sind holomorphe Functionen von $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, u$ in der Umgebung des Werthsystems $x = x_0$, $y_1 = y_{1,0} \dots y_{n-1} = y_{n-1,0}$, $u = 0$, in der Voraussetzung, dass $x_0, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}$ willkürlich angenommen sind. Es giebt also ein den Gleichungen (12.) genügendes System von Functionen $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, u$, die nach ganzen positven Potenzen von $x - x_0$ fortschreiten und für $x = x_0$ beziehlich die Werthe $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n-1,0}$, 0 annehmen. Die Einsetzung dieser Reihen ergiebt die Integrale in der Form

$$u = 0,$$
$$y_i - y_{i,0} = R_{i,0}(x - x_0) + a_i(x - x_0)^2 + \cdots \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

und da $u = (y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}$, so ergiebt sich daraus, dass $y_n = \eta$ *particuläres* Integral des Systems (1.) ist. Ausserdem kann die Gleichung $y_n = \eta$ zugleich ein singuläres Integral sein, wenn es Zweige von z als algebraischer Function von y_n giebt, für welche ebenfalls $\sigma = R_n$ und in der entsprechenden Entwickelung von $\alpha u^{\alpha-1} \dfrac{du}{dx}$ in (10.) $\mu < \alpha$ ist.

Charakteristisch für das particuläre Integral ist, dass eine oder mehrere der Entwickelungen von $y_n-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ sich auf $y_n-\eta=0$ reduciren.

Es ist nun der bisher ausgeschlossene Fall zu betrachten, dass einige der Functionen $R_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \eta, \zeta)$ $(i=1,2,\dots,n)$ unendlich werden. Es mögen dann die rechten Seiten von (6.), nach ganzen Potenzen von u entwickelt, die folgende Gestalt annehmen:

$$(13.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = R_i = g_i u^{-\lambda_i} + h_i u^{-\lambda_i+1} + \cdots, & (i=1,2,\dots,n-1) \\ \dfrac{d(y_n-\eta)}{dx} = \alpha u^{\alpha-1}\dfrac{du}{dx} = R_n - \dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i = g u^{-\lambda} + h u^{-\lambda+1} + \cdots, & \end{cases}$$

wo die Coefficienten $g_i, h_i, \dots, g, h \dots$ holomorphe Functionen von $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ in der Umgebung von $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $y_{n-1}=y_{n-1,0}$ bedeuten und die g_i und g nicht identisch verschwinden. Der jetzigen Voraussetzung nach ist mindestens eine der Zahlen $\lambda_i (i=1,2,\dots,n-1)$ und λ positiv. Wir unterscheiden hier folgende zwei Hauptfälle:

1. $\lambda_i < \lambda+\alpha$ für $i=1,2,\dots,n-1$.

Hier muss $\lambda+\alpha$ positiv sein, denn sonst würden, da $\alpha \geqq 1$, sämmtliche λ_i und λ negativ sein, gegen die Voraussetzung. Aus (13.) folgt

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \dfrac{\alpha u^{\lambda+\alpha-1}}{g+hu+\cdots}, & \\ \dfrac{dy_i}{du} = \dfrac{\alpha u^{\lambda+\alpha-\lambda_i-1}(g_i+h_i u+\cdots)}{g+hu+\cdots} & (i=1,2,\dots,n-1). \end{cases}$$

Indem wir annehmen, dass g auch für $x=x_0$, $y_1=y_{1,0}$, $\dots$, $y_{n-1}=y_{n-1,0}$ nicht verschwindet, stellen die rechten Seiten der vorstehenden Differentialgleichungen Functionen von $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, u$ dar, die in der Umgebung von $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $\dots$, $y_{n-1}=y_{n-1,0}$, $u=0$ holomorph sind. Die Lösungen der Gleichungen (14.), die für $u=0$ beziehlich in $x_0, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}$ übergehen, haben daher die Form

$$(15.)\quad \begin{cases} x-x_0 = \dfrac{\alpha}{(\lambda+\alpha)g_0}u^{\lambda+\alpha} + b u^{\lambda+\alpha+1}, \\ y_i - y_{i,0} = \dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha-\lambda_i}\left(\dfrac{g_i}{g}\right) u^{\lambda+\alpha-\lambda_i} + c_i u^{\lambda+\alpha-\lambda_i+1}. \end{cases}$$

Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen folgt durch Umkehrung

$$u = \left(\frac{(\lambda+\alpha)g_0}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\lambda+\alpha}}(x-x_0)^{\frac{1}{\lambda+\alpha}} + \gamma(x-x_0)^{\frac{2}{\lambda+\alpha}} + \cdots$$

und hieraus

$$
(16.)\quad \begin{cases} y_n - \eta = u^\alpha = \left(\dfrac{(\lambda+\alpha)g_0}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}} (x-x_0)^{\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}} + \delta(x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{\lambda+\alpha}} + \cdots \\[2ex] y_i - y_{i,0} = \dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha-\lambda_i}\left(\dfrac{g_i}{g}\right)_0 \left(\dfrac{\lambda+\alpha}{\alpha} g_0\right)^{\frac{\lambda+\alpha-\lambda_i}{\lambda+\alpha}} (x-x_0)^{\frac{\lambda+\alpha-\lambda_i}{\lambda+\alpha}} + \varepsilon(x-x)^{\frac{\lambda+\alpha-\lambda_i+1}{\lambda+\alpha}} + \cdots \end{cases}
$$

Ist nun $\lambda \geqq 0$, so ist $y_n = \eta$ *kein* Integral des Systems (1.), denn da $u^{-\lambda}$ die Anfangspotenz von u in der Entwickelung der rechten Seite der letzten Gleichung von (5.) ist, so wird diese für $u = 0$ im ersten Falle unendlich, im zweiten Falle $= g_0$, also in beiden Fällen $R_n - \sigma$ von Null verschieden.

Aus (16.) folgt, dass der Exponent der Anfangspotenz in der Entwickelung von $y_n - \eta$ nach Potenzen von $x - x_0$ nicht grösser als Eins ist.

Ist dagegen λ negativ, dann ist, da $R_n - \sigma = 0$ ist, $y_n = \eta$ ein Integral. Da in dem hier betrachteten Hauptfall $\lambda + \alpha$ positiv ist, so ist $\dfrac{\alpha}{\lambda+\alpha} > 1$. Bestimmt man nun in der Mannigfaltigkeit $y_n = \eta$ die Richtung eines durch den Punkt $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}, \eta$ gehenden Linienelements durch die Bedingung, dass $\left(\dfrac{dy_i}{dx}\right)_0 = R_{i,0} (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — wobei einige der Werthe unendlich sein können —, dann wird $\left(\dfrac{dy_n}{dx}\right)_0 = \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)_0 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}\right)_0 R_{i,0}$ gleich dem Werthe von $\left(\dfrac{dy_n}{dx}\right)_0$ in der Integralcurve, wie aus (16.) hervorgeht. Der Ort $y_n = \eta$ ist daher eine Enveloppe der Integralcurve des Systems (1.) oder ein singuläres Integral. Charakteristisch ist dafür, dass wiederum wie in (11.) der Exponent der Anfangspotenz von $y_n - \eta$ in der Entwickelung nach Potenzen von $x - x_0$ grösser als 1 ist.

2. $\lambda_i \geqq \lambda + \alpha$ für mindestens einen der Indices i.

Hier wird es eine Zahl $\lambda_\varkappa$ geben, die nicht kleiner als die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{\varkappa-1}, \lambda_{\varkappa+1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda + \alpha$ ist. Diese Zahl $\lambda_\varkappa$ muss positiv sein, da sonst sämmtliche λ_i und λ Null oder negativ sein müssten gegen die Voraussetzung, dass mindestens eine der Zahlen λ_i und λ positiv sei. In diesem Falle ist $y_n = \eta$ ein Integral des Systems (1.), wie man erkennt, wenn man $y_\varkappa$ als unabhängige Variable einführt, denn dann wird nach (13.)

$$
\frac{d(y_n - \eta)}{dy_\varkappa} = \frac{R_n - \dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\eta}{\partial y_1} R_1 - \cdots - \dfrac{\partial\eta}{\partial y_{n+1}} R_{n-1}}{R_\varkappa} = \frac{g}{g_\varkappa} u^{\lambda_\varkappa - \lambda} \mathfrak{P}(u),
$$

wo $\mathfrak{P}(u)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreitende Reihe bedeutet. Da $\lambda_\varkappa - \lambda$ hier > 0 ist, so verschwindet $\frac{d(y_n-\eta)}{dy_\varkappa}$ mit u, also auch mit $y_n - \eta$. Aus (13.) folgt ferner

$$(17.)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dy_\varkappa} = \dfrac{u^{\lambda_\varkappa}}{g_\varkappa + h_\varkappa u + \cdots}, \quad \dfrac{dy_i}{dy_\varkappa} = u^{\lambda_\varkappa - \lambda_i} \dfrac{g_i + h_i u + \cdots}{g_\varkappa + h_\varkappa u + \cdots}, \quad (i = 1, 2, \ldots \varkappa-1, \varkappa+1, \ldots, n-1) \\ \dfrac{du}{dy_\varkappa} = \dfrac{1}{\alpha} u^{\lambda_\varkappa - (\lambda+\alpha)+1} \dfrac{g + hu + \cdots}{g_\varkappa + h_\varkappa u + \cdots}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten sind in der Umgebung des willkürlichen Werthsystems $x = x$, $y_1 = y_{10}, \ldots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$ und $u = 0$ holomorphe Functionen von x, $y_1, \ldots, y_{n-1}, u$. Es giebt also ein System von Lösungen $x, y_1, y_2, \ldots, y_{\varkappa-1}, y_{\varkappa+1}, \ldots, y_{n-1}, u$ als Functionen von $u_\varkappa$, die sich in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $y_\varkappa - y_{\varkappa,0}$ entwickeln lassen und für $y_\varkappa = y_{\varkappa,0}$ beziehlich in $x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{\varkappa-1,0}, y_{\varkappa+1,0}, \ldots, y_{n-1,0}, 0$ übergehen. Die Reihe für u reducirt sich hier auf $u = 0$, woraus hervorgeht, dass $y_n = \eta$ ein ***particuläres*** Integral ist. Gleichzeitig ergiebt die erste der Gleichungen (17.), dass $x = x_0$ ein Integral ist. Dadurch erklärt sich der anscheinende Widerspruch, dass mit $u = 0$, wie aus (17.) hervorgeht, $\frac{du}{dx}$ von Null verschieden, ja unendlich sein kann, da hier $-\lambda - \alpha + 1$ jeden beliebigen Werth haben darf.

Die erlangten Ergebnisse fassen wir in folgenden Sätzen zusammen: Ist $y_n = \eta(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ eine Wurzel der aus

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(f x, y_1, y_2, \ldots, y_n, z)}{\partial z} = 0$$

hervorgehenden Discriminantengleichung

$$\Delta(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0,$$

so sind drei Fälle möglich:

1. $y_n = \eta$ ist ***kein*** Integral des vorgelegten Differentialgleichungssystems (1.), dann gilt für alle Integralsysteme, die die Eigenschaft haben, dass für einen willkürlichen Werth x_0 die Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ die willkürlich gegebenen Werthe $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ annehmen und y_n den Werth $\eta_0 = \eta(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0})$ erhält, die folgende Entwickelung

$$(18.)\qquad y_n - \eta = \mathfrak{P}(x - x_0),$$

wo $\mathfrak{P}$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, in der der Exponent der niedrigsten Potenz nicht grösser als 1 ist.

2) $y_n = \eta$ ist ein singuläres Integral, dann giebt es Integralsysteme obiger Beschaffenheit, für welche ebenfalls die Entwickelung (18.) gilt, bei denen aber der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ grösser als 1 ist.

3. $y_n = \eta$ ist ein particuläres Integral; dann reduciren sich einige Darstellungen von $y_n - \eta$ auf $y_n - \eta = 0$. Für den Fall, dass es ausserdem Darstellungen der Form (18.) giebt, in denen der Exponent der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ grösser als 1 ist, ist $y_n = \eta$ zugleich ein singuläres Integral.

1. Bemerkung. In allen Fällen, wo $y_n = \eta$ ein singuläres Integral ist, gilt, wie aus (10.) ($\mu < \alpha$) und (13.) (λ negativ, $\lambda + \alpha$ positiv, also $-\lambda < \alpha$) hervorgeht, die Entwickelung

$$\alpha u^{\alpha-1}\frac{du}{dx} = h_0 u^k + h_1 u^{k+1} + \cdots,$$

wo $h_0, h_1 \ldots$ Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind, h_0 nicht identisch Null und k positiv und kleiner als α ist. Die Substitution $u = (y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ ergiebt

$$\frac{d(y_n - \eta)}{dx} = h_0 (y_n - \eta)^{\frac{k}{\alpha}} + h_1 (y_n - \eta)^{\frac{k+1}{\alpha}} + \cdots \qquad \left(\tfrac{k}{\alpha} < 1\right).$$

Da $\eta, h_0, h_1 \ldots$ Functionen von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sind, also y_n nicht enthalten, so erkennt man, dass $\dfrac{\partial\left(\frac{dy_n}{dx}\right)}{\partial y_n} = \infty$ für $y_n = \eta$ ist.

Bemerkung 2. Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die Integrale des Systems (1.) in allen Fällen nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar sind, also in x_0 algebraische Singularitäten aufweisen. Ausnahmen treten nur ein, wenn zwischen den willkürlichen Werthen $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1,0}$ gewisse angebbare Bedingungsgleichungen bestehen, wodurch Continuen $(n-1)$-ter Dimension ausgeschlossen werden.

II.

Es sei

$$(18.) \qquad \varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{const.}$$

ein Integral des vorgelegten Systems (1.). Wir suchen für F eine Entwickelung von $y_n - \eta$ mit von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ abhängigen Coefficienten. Aus (18.) folgt durch Differentiation nach x und Einsetzen der Werthe von $\frac{dy_i}{dx}$

$$(19.) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + R_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \cdots + R_n \frac{\partial\varphi}{\partial y_n} = 0.$$

Setzen wir hierin wieder $y_n = \eta + u^\alpha$, $z = \zeta + g_0 u^\varkappa + g_1 u^{\varkappa+1} + \cdots$ und bezeichnen φ als Function von $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, u$ mit $\bar\varphi$, so wird

$$\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\bar\varphi}{\partial y_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\frac{\partial\bar\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\cdot \alpha u^{\alpha-1},$$

und die Gleichung (19.) geht über in

$$(20.)\qquad \alpha u^{\alpha-1}\left\{\frac{\partial\bar\varphi}{\partial x}+R_1\frac{\partial\bar\varphi}{\partial y_1}+\cdots+R_{n-1}\frac{\partial\bar\varphi}{\partial y_{n-1}}\right\}+\frac{\partial\bar\varphi}{\partial u}\left\{R_n-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i\right\}=0,$$

wo in den R_i überall die erwähnten Substitutionen für y_n und z zu machen sind.

Wir nehmen zunächst an, dass keine der Functionen R unendlich wird und $R_n-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i$ für $y_n=\eta$, $z=\zeta$ nicht identisch verschwindet, also $y_n=\eta$ kein Integral des Systems (1.) ist. Dann kann der Gleichung (20.) nach dem Satze der Frau *von Kowalewsky* durch eine Reihe von der Form

$$(21.)\qquad \bar\varphi=\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(x,y_1,y_2,\ldots,y_{n-1})\frac{u^\nu}{\nu!}$$

genügt werden, wo φ_0, $\varphi_1\ldots$ nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihen sind, von denen φ_0 willkürlich angenommen werden kann und die übrigen sich aus der identischen Gleichung bestimmen, die sich durch die Einsetzung des Ausdruckes (21.) für $\bar\varphi$ in (20.) ergiebt:

$$(22.)\qquad \begin{cases}\left(\varphi_1+\varphi_2u+\varphi_3\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)\left(R_n(\eta,\zeta)-\sigma+h_1u+h_2u^2+\cdots\right)\\ \qquad=-\alpha u^{\alpha-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_1}R_1+\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}\right)\frac{u_\nu}{\nu!}.\end{cases}$$

Aus dieser Identität fliesst, wenn man in $R_1,\ldots,R_{n-1}$ die Substitutionen $y_n=\eta+u^\alpha$, $z=\zeta+g_0u^\varkappa+\cdots$ macht, eine Folge von recurrenten Gleichungen, durch welche die Reihen φ_1, $\varphi_2\ldots$ successive eindeutig bestimmt werden. Insbesondere erhält man

$$\varphi_1=0,\quad \varphi_2=0,\ldots,\varphi_{\alpha-1}=0,$$

$$\frac{\varphi_\alpha}{(\alpha-1)!}(R_n(\eta,\zeta)-\sigma)=-\alpha\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_1}R_1(\eta,\zeta)+\cdots\frac{\partial\varphi_0}{\partial y_{n-1}}R_{n-1}(\eta,\zeta)\right).$$

Demnach wird

$$\bar\varphi=\varphi_0+\varphi_\alpha\frac{u^\alpha}{\alpha!}+\varphi_{\alpha+1}\frac{u^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}+\cdots.$$

Die Anzahl der von einander functionalunabhängigen Functionen $\bar\varphi$ kann nicht grösser als n sein; denn wenn $n+1$ Functionen $\bar\varphi_1$, $\bar\varphi_2$, …, $\bar\varphi_{n+1}$ der linearen partiellen Differentialgleichung (20.) genügen, so muss die Determinante $\frac{\partial(\bar\varphi_1,\ldots,\bar\varphi_{n+1})}{\partial(x,y_1,\ldots,y_{n-1},u)}$ verschwinden. Man erhält n von einander unabhängige Functionen $\bar\varphi$ von x, $y_1,\ldots,y_{n-1}$, u, wenn man für die willkürliche Function φ_0 der Reihe nach x, $y_1,\ldots,y_{n-1}$ nimmt. Denn n solche Functionen können nur dann von einander abhängig sein, wenn die Functionaldeterminante derselben nach je n der Variablen verschwinden. Nun verschwindet aber die Functionaldeterminante der gewählten Functionen nach $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ nicht identisch, da ihr Werth für $u = 0$ gleich 1 ist, folglich sind die so bestimmten Functionen φ von einander unabhängig.

Indem wir für u seinen Werth $(y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ wieder einsetzen, erhalten wir n von einander unabhängige Integrale mit je einer willkürlichen Constanten in der Form

$$\varphi_0 + \frac{\varphi_\alpha}{\alpha!}(y_n - \eta) + \frac{\varphi_{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}(y_n - \eta)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{\varphi_{\alpha+2}}{(\alpha+2)!}(y_n - \eta)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}} + \cdots = \text{const.},$$

wo für φ_0 der Reihe nach $x, y_1, \dots, y_{n-1}$ zu nehmen ist, und $\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1} \dots$ mittels obiger recurrirender Gleichungen durch φ_0 eindeutig bestimmt sind, und zwar sind sie, da sie aus den $R_i(\eta, \zeta)$ rational zusammengesetzt sind und im Nenner nur Potenzen von $R_n(\eta, \zeta) - \sigma$ auftreten, in der Umgebung von $x = x_0$, $y_1 = y_{10}, \dots, y_{n-1} = y_{n-1,0}$ holomorph. Der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ ist überall nicht kleiner als 1.

Nehmen wir jetzt an, dass $y_n - \eta$ ein Integral des Systems (1.) sei, dass also

$$R_n - \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \eta}{\partial y_i} R_i$$

für $y_n = \eta$, $z = \zeta$ identisch verschwinde, und zwar laute, wie im vorigen Abschnitt die Entwickelung dieses Ausdrucks nach Potenzen von u, wenn $y_n = \eta + u^\alpha$, $z = \zeta + g_0 u^\varkappa + \cdots$, gesetzt wird

$$h_\mu u^\mu + h_{\mu+1} u^{\mu+1} + \cdots,$$

wo h_μ von Null verschieden ist, dann erhält man aus (22.), wenn

1. $\mu < \alpha$,

$$(23.)\quad \begin{cases} \left(\varphi_1 + \varphi_2 u + \varphi \frac{u^2}{2!} + \varphi_4 \frac{u^3}{3!}\right)(h_\mu + h_{\mu+1} u + \cdots) \\ \qquad = -\alpha u^{\alpha-1-\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_1} R_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial y_{n-1}} R_{n-1}\right) \frac{u_\nu}{\nu!}. \end{cases}$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von u liefert:

$$(24.)\quad \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_{\alpha-1-\mu} = 0,\ h_\mu \frac{\varphi_{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu-1)!} \\ \qquad = -\alpha \left\{\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_1} R_1(\eta, \zeta) + \cdots + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y_{n-1}} R_{n-1}(\eta, \zeta)\right\}, \end{cases}$$

wobei zu bemerken, dass, wenn $\mu = \alpha - 1$, schon φ_1 von Null verschieden ist, so dass $\overline{\varphi}$ die Gestalt erhält

$$\overline{\varphi} = \varphi_0 + \frac{\varphi_{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!} u^{\alpha-\mu} + \frac{\varphi_{\alpha-\mu+1}}{(\alpha-\mu+1)!} u^{\alpha-\mu+1} + \cdots.$$

Es giebt also im vorliegenden Falle n von einander unabhängige Integrale des Systems (1.) von der Form

$$\varphi_\varkappa = \varphi_0 + \frac{\varphi_{\alpha-\mu}}{(\alpha-\mu)!}(y_n - \eta)^{\frac{\alpha-\mu}{\alpha}} + \frac{\varphi_{\alpha-\mu+1}}{(\alpha-\mu+1)!}(y_n - \eta)^{\frac{\alpha-\mu+1}{\alpha}} = \text{const.},$$

wo für φ_0 der Reihe nach $x, y_1, y_2 \dots, y_{n-1}$ zu nehmen ist, und $\varphi_{\alpha-\mu}$, $\varphi_{\alpha-\mu+1} \dots$, nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, $y_1 - y_{1,0} \dots$, $y_{n-1} - y_{n-1,0}$ fortschreitende Reihen sind, die mittelst der aus der Identität (23.) folgenden recurrenten Gleichungen successiv eindeutig bestimmt werden. Da der Ausdruck auf der linken Seite obiger Gleichung für $y_n = \eta$ gleich φ_0, also nicht constant wird, so ist $y_n = \eta$ ein *singuläres* Integral, insofern es nicht durch Specialisirung der Constanten aus den allgemeinen Integralen $\varphi_\varkappa = \text{const.}$ erhalten werden kann. Der Coefficient von $(y_n - \eta)^{\frac{\alpha-\mu}{\alpha}}$ ist gemäss (24.) jedenfalls von Null verschieden, wenn $\varphi_0 = x$ ist. Wir haben also unter der Voraussetzung, dass keine der Grössen $R(\eta, \zeta)$ unendlich wird, den Satz:

Ist $y_n = \eta$ ein *singuläres* Integral, so giebt es n von einander unabhängige Integrale des Systems (1.) von der Form

$$h_0 + h_r (y_n - \eta)^{\frac{r}{\alpha}} + h_{r+1} (y_n - \eta)^{\frac{r+1}{\alpha}} + \cdots = \text{const.}, \tag{25.}$$

wo für die h_0 der Reihe nach $x, y_1, \dots, y_{n-1}$ zu nehmen ist, und $h_r, h_{r+1}, \dots$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, $y_1 - y_{1,0}, \dots, y_{n-1} - y_{n-1,0}$ fortschreitende Reihen sind, der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ in demjenigen Integrale, wo $h_0 = x$ genommen wird, *kleiner* als 1 ist.

Specialisirt man die Constanten auf der rechten Seite in den Integralen (25.) durch die Bedingung, dass $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ für $x = x_0$ beziehlich die Werthe $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n-1,0}, \eta_0$ annehmen, so erhalten wir, indem wir wieder $y_n - \eta = u^\alpha$ setzen, und die Coefficienten $h_r, h_{r+1}, \dots$, in der $\varkappa$-ten Gleichung mit $h_{r,\varkappa}, h_{r,\varkappa+1}, \dots$, bezeichnen, die n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x - x_0 + h_{r,1} u^r + h_{r+1,1} u^{r+1} + \cdots &= 0, \\
y_1 - y_{10} + h_{r,2} u^r + h_{r+1,2} u^{r+1} + \cdots &= 0, \\
&\vdots \\
y_{n-1} - y_{n-1,0} + h_{r,n} u^r + h_{r+1,n} u^{r+1} + \cdots &= 0,
\end{aligned}$$

wo $h_{r,1}$ von Null verschieden ist. Diese Gleichungen lassen sich, da die Functionaldeterminante der Functionen auf der linken Seite nach den

Variablen $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ für $u=0$ gleich 1, also von Null verschieden ist, durch Reihen für $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ befriedigen, die nach ganzen positiven Potenzen von u fortschreiten, und zwar erhält man für x die Entwickelung

$$x-x_0 = -(h_{r1})_0 u^r + \beta u^{r+1} + \cdots,$$

wo

$$(h_{r1})_0 = h_{r1}(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}).$$

Die Umkehrung ergiebt

$$(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}} = u = \Big(-\frac{1}{(h_{r1})_0}\Big)^{\frac{1}{r}}(x-x_0)^{\frac{1}{r}} + \gamma(x-x_0)^{\frac{2}{r}},$$

mithin

$$y_n-\eta = \Big(-\frac{1}{(h_{r1})_0}\Big)^{\frac{\alpha}{r}}(x-x_0)^{\frac{\alpha}{r}} + \delta(x-x_0)^{\frac{\alpha+1}{r}} + \cdots.$$

Da in dem hier betrachteten Falle $\frac{r}{\alpha} < 1$ ist, so ist $\frac{\alpha}{r} > 1$. Die Entwickelung von $y_n-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ beginnt also mit einer höheren als der ersten Potenz. Dies war, wie im ersten Abschnitt gezeigt ist, das Kriterium dafür, dass der Ort $y_n = \eta$ eine Enveloppe sämmtlicher Integralcurven des Systems (1.) darstellt. Hier aber erkennen wir die Gleichung $y_n = \eta$ auch in dem Sinne als ein *singuläres* Integral, dass es, wie oben bemerkt, aus den vollständigen Integralen $\varphi_x = \text{const.}$, soweit sie aus der Zweiggruppe (4.) hervorgehen, nicht erhalten werden kann.

In dem vorher betrachteten Falle, wo $y_n = \eta$ kein Integral darstellt, war $\frac{r}{\alpha} = 1$, folglich beginnt da die Entwickelung von $y_n-\eta$ mit der ersten Potenz von $x-x_0$, in Uebereinstimmung mit dem Ergebniss des ersten Abschnitts.

Ist

2. $$\mu > \alpha - 1,$$

dann erhält man aus (20.) durch Division mit $u^{\alpha-1}$

$$\alpha\left\{\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + R_1\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + R_{n-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}}\right\} + u^{\mu-\alpha+1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\{h_\mu + h_{\mu+1}u + \cdots\} = 0.$$

Also wird für $u=0$

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + R_1\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + R_{n-1}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + R_1\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \cdots + R_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n-1} R_i\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right\} = 0,$$

für $y_n = \eta$.

Dies bedeutet aber, dass das totale Differential von φ nach x

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x},$$

für $y_n=\eta$ verschwindet, also $\varphi(x, y_2, \ldots, y_n)$ für $y_n=\eta$ constant wird. Mithin ist in diesem Falle $y_n=\eta$ ein particuläres Integral des Systems (1.), in Uebereinstimmung mit dem Ergebniss des ersten Abschnittes S. 329.

Betrachten wir jetzt den Fall, dass einige der R für $y_n=\eta$ unendlich werden, und zwar mögen gemäss den Gleichungen (13.) die Entwickelungen gelten

$$(26.)\quad \begin{cases} R_i=g_i u^{-\lambda_i}+h_i u^{-\lambda_i+1}+\cdots, \\ R_n-\dfrac{\partial\eta}{\partial x}-\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial\eta}{\partial y_i}R_i=g u^{-\lambda}+h u^{-\lambda+1}+\cdots. \end{cases}$$

Dann erhält man aus (20.), wenn

1. $\lambda_i<\lambda+\alpha$ für $i=1, 2, \ldots, n-1$ (also $\lambda+\alpha>0$)

durch Multiplication mit u^λ und Einsetzung des Ausdrucks (21.) für $\bar\varphi$

$$\left(\varphi_1+\varphi_2 u+\varphi_1\frac{u^2}{2!}+\varphi_4\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)(g+h_1 u+\cdots)$$

$$=-\alpha\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x}u^{\alpha+\lambda-1}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_1}(g_1 u^{\lambda+\alpha-\lambda_1-1}+\cdots)+\cdots+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial y_{n-1}}(g_{n-1}u^{\lambda+\alpha-\lambda_{n-1}-1}+\cdots)\right\}\frac{u^\nu}{\nu!}.$$

Die Gleichsetzung der gleich hohen Potenzen von u auf beiden Seiten liefert eine Folge von recurrenten Gleichungen zur successiven Bestimmung von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ durch die willkürliche Function φ_0. Setzt man $\varphi_0=x$, dann wird

$$\varphi_1=\varphi_2=\cdots=\varphi_{\alpha+\lambda-1}=0$$

und man erhält

$$\bar\varphi=x+\varphi_{\alpha+\lambda}\frac{u^{\alpha+\lambda}}{(\alpha+\lambda)!}+\cdots.$$

Für $\varphi_0=y_i$

$$\bar\varphi=y_i+\varphi_{\alpha+\lambda-\lambda_i}\frac{u^{\alpha+\lambda-\lambda_i}}{(\alpha+\lambda-\lambda_i)!}+\cdots.$$

Demnach erhalten die n unabhängigen Integrale die Form:

$$(27.)\quad \begin{cases} x+\varphi_{\alpha+\lambda}\dfrac{(y_n-\eta)^{\frac{\alpha+\lambda}{\alpha}}}{(\alpha+\lambda)!}+\cdots=\text{const.} \\ y_i+\varphi_{\alpha+\lambda-\lambda_i}\dfrac{(y_n-\eta)^{\frac{\alpha+\lambda-\lambda_i}{\alpha}}}{(\alpha+\lambda-\lambda_i)!}+\cdots=\text{const.} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1.) \end{cases}$$

Ist λ positiv, also $y_n=\eta$ kein Integral, dann ist der Exponent der der Anfangspotenz von $y_n-\eta$ in der Entwickelung der ersten Gleichung grösser als 1. Specialisirt man die Constanten durch die Bedingung, dass

$y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ für $x = x_0$ beziehlich in $y_{1,0}, \dots, y_{n-1,0}, \eta_0$ übergehen, so erhält man

$$x - x_0 + \varphi_{\alpha+\lambda} \frac{u^{\alpha+\lambda}}{(\alpha+\lambda)!} + \cdots = 0,$$

$$y_i - \eta_{i0} + \varphi_{\alpha+\lambda-\lambda_i} \frac{u^{\alpha+\lambda-\lambda_i}}{(\alpha+\lambda-\lambda_i)!} + \cdots = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

und durch dieselben Schlüsse, wie oben, die Entwickelung

$$y_n - \eta = -\frac{(\alpha+\lambda)!}{(\varphi_{\alpha+\lambda})_0} (x - x_0)^{\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}} + \cdots,$$

also in Uebereinstimmung mit dem Satze des ersten Abschnitts, wonach, falls $y_n = \eta$ kein Integral des Systems (1.) ist, der Exponent der niedrigsten Potenz von $(x - x_0)$ in der Entwickelung von $y_n - \eta$ kleiner als Eins ist.

Ist λ negativ, aber so, dass $\lambda + \alpha > 0$ und $> \lambda_i$, dann ist $y_n = \eta$ ein Integral des Systems (1.). Da die Ausdrücke auf der linken Seite der Integrale (27.) für $y_n = \eta$ nicht constant werden, so ist $y_n = \eta$ ein ***singuläres*** Integral. In diesem Falle ist der Exponent $\frac{\alpha+\lambda}{\alpha}$ der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ in der Reihe auf der linken Seite der ersten Gleichung (27.) kleiner als 1, und demgemäss der Exponent $\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}$ der niedrigsten Potenz von $x - x_0$ in der Entwickelung von $y_n - \eta$ grösser als 1, conform mit dem Ergebniss des ersten Abschnitts.

Ist

2. $$\lambda_i \geqq \lambda + \alpha$$

für mindestens einen der Indices i, und zwar sei $\lambda_\varkappa$ nicht kleiner als die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\varkappa-1}, \lambda_{\varkappa+1}, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda + \alpha$, wobei dann $\lambda_\varkappa$ positiv sein muss (vgl. S. 331). Dann folgt aus (20.) durch Division mit $u^{\alpha-1} \cdot R_\varkappa$ mit Rücksicht auf (26.)

$$\alpha \left\{ \frac{1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{R_1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}} \right\}$$
$$= -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u} \left\{ \frac{g}{g_\varkappa} u^{\lambda_\varkappa - \lambda - \alpha + 1} + \text{Gl. mit höheren Potenzen von } u \right\}.$$

Die Coefficienten von $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}}$ sind sämmtlich endlich für $u = 0$ oder $y_n = \eta$, da die Exponenten der Anfangspotenzen von u in ihnen resp. $\lambda_\varkappa, \lambda_\varkappa - \lambda_1, \dots, \lambda_\varkappa - \lambda_{n-1}$, also nach unserer jetzigen Voraussetzung positiv oder Null sind. Aber $\lambda_\varkappa - \lambda - \alpha + 1$ ist > 0, daraus folgt, dass die rechte Seite für $u = 0$ verschwindet, mithin ist auch

$$\frac{1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{R_1}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_1} + \cdots + \frac{R_{n-1}}{R_\varkappa} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y_{n-1}} = 0 \text{ für } u = 0$$

oder

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{R_1}{R_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\cdots+\frac{R_{n-1}}{R_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y_{n-1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}\frac{\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n-1}R_i\frac{\partial\eta}{\partial y_i}\right\}}{R_x}=0,$$

und da hier

$$\frac{R_n}{R_x}-\frac{\partial\eta}{\partial x}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{R_i}{R_x}=0 \text{ für } u=0 \text{ (vgl. S. 331),}$$

so wird

$$\frac{1}{R_x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{R_1}{R_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\cdots+\frac{R_n}{R_x}\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dy_x}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dy_x}=\frac{d\varphi}{dy_x}=0 \text{ für } y_n=\eta.$$

Folglich wird $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ für $y_n=\eta$ constant, $y_n=\eta$ also ein *particuläres* Integral in Uebereinstimmung mit dem Ergebniss des ersten Abschnitts (S. 331).

III.

Für die Function φ in dem Integrale

$$\varphi(x, y_1, \dots, y_n) = \text{const.}$$

haben wir im vorigen Abschnitt, der Zweiggruppe (4.) von z als Function von y_n entsprechend, für φ Ausdrücke abgeleitet, die, falls keine der Grössen R unendlich wird, was wir hier der Einfachheit wegen voraussetzen, auf die gemeinsame Form

$$\varphi = L_0+L_1(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}+L_2(y_n-\eta)^{\frac{2}{\alpha}}+\cdots+L_{\alpha-1}(y_n-\eta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

gebracht werden können, wo $L_0, L_1, \dots, L_{\alpha-1}$ Reihen bedeuten, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{1,0}, \dots, y_{n-1}-y_{n-1,0}, y_n-\eta$ fortschreiten. Den α verschiedenen Werthen von $(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}$ entsprechen α verschiedene Ausdrücke für die L und ebensoviele für die φ, die wir mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\alpha$ bezeichnen. Die Coefficienten der Potenzen von C in dem Producte

$$(C-\varphi_1)(C-\varphi_2)\dots(C-\varphi_\alpha)$$

sind als symmetrische Functionen von $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ durch Reihen darstellbar, die nach ganzen positiven Coefficienten der obigen Grössen fortschreiten, und da η eine Reihe von der Form $\eta=y_{n,0}+\mathfrak{P}(x-x_0, y_1-y_{1,0}, \dots, y_{n-1}-y_{n-1,0})$ ist, schliesslich durch Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{1,0}, \dots, y_n-y_{n,0}$ fortschreiten.

Die Gleichung

$$(C-\varphi_1)(C-\varphi_2)\dots(C-\varphi_\alpha)=0$$

stellt ein Integral des Differentialgleichungssystems (1.) dar, entsprechend den α Zweigen von z als algebraischer Function von y_n, die der Gruppe

(4.) angehören. Stellt man ebenso die Gleichungen auf, die den übrigen Zweiggruppen von z entsprechen, so erhält man, da die algebraische Gleichung (2.) in z vom m-ten Grade ist, als Integral des Differentialgleichungssystems (1.) eine Gleichung m-ten Grades in C von der Form

$$(28.)\qquad F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, C) = 0,$$

worin der Coefficient von C^m gleich 1 und die Coefficienten der übrigen Potenzen von C in der Umgebung eines willkürlichen Werthsystems x_0, $y_{1,0}, \dots, y_{n,0}$ in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0, y_1-y_{10}, \dots, y_n-y_{n,0}$ entwickelt werden können. Die auszuschliessenden Werthsysteme sind durch gewisse Bedingungsgleichungen zwischen $x_0, y_{10}, \dots, y_{n,0}$ gegeben, erfüllen also Continuen $(n-1)$-ter Dimension. Indem man für die bei der Herstellung der Gleichung (28.) auftretende willkürliche Function φ_0 der Reihe nach $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ wählt, erhält man n von einander unabhängige Integrale in der Form

$$F_1(x, y_1, \dots, y_n, C_1) = 0, \quad \dots, \quad F_n(x, y_1, \dots, y_n, C_n) = 0$$

wo die Functionen F_i die Beschaffenheit der Function F in (28.) hat, und wo jeder Wurzel z der Gleichung (2.) $f(x, y_1, \dots, y_n, z) = 0$ ein bestimmtes System der Wurzeln $C_1, \dots, C_n$ zugeordnet ist. — Gehen wir jetzt von dem System der primitiven Gleichungen aus

$$(29.)\qquad \varphi_1(x, y_1, \dots, y_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

deren linke Seiten Polynome der Constanten $C_1, \dots, C_n$ sind, mit Coefficienten, die eindeutige Functionen von $x, y_1, \dots, y_n$ seien. Die Elimination von je $n-1$ der Constanten, möge die n Gleichungen

$$(30.)\qquad F_1(x, y_1, \dots, y_n, C_1) = 0, \quad \dots, \quad F_n(x, y_1, \dots, y_n, C_n) = 0$$

ergeben, die in Beziehung auf die Constanten vom m-ten Grade sein mögen. Damit die Gleichungen (30.) und (29.) völlig äquivalent sind, ist noch die Combination der Wurzeln für $C_1, \dots, C_n$ anzugeben, die zu wählen ist, damit sie Lösungen des Gleichungssystems (29.) sind. Bezeichnet man die m Wurzeln der $\varkappa$-ten Gleichung von (30.) mit $C_\varkappa^1, C_\varkappa^2, \dots, C_\varkappa^m$, so mögen C_1^λ, $C_2^\lambda, \dots, C_n^\lambda$ zusammengehörige Wurzeln sein.

Differentiirt man die Gleichungen (30.) total nach x, so erhält man entsprechend den m Wurzelgruppen m Systeme von Differentialgleichungen

$$(31.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \dots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{dy_n}{dx} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x} + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \dots + \dfrac{\partial F_n}{\partial y_n}\dfrac{dy_n}{dx} = 0, \end{cases}$$

denen die Gleichungen (29.) als Integrale genügen.

Setzt man $u_1 C_1 + u_2 C_2 + \cdots + u_n C_n = z$, wo $u_1, \ldots, u_n$ unbestimmte Coefficienten bedeuten, so genügt z einer Gleichung m-ten Grades $f(x, y_1, \ldots, y_n, z) = 0$, und $C_1, \ldots, C_n$ sind rationale Functionen von z, so dass jeder Wurzel z eine bestimmte Combination von Wurzel $C_1^\lambda, \ldots, C_n^\lambda$ entspricht; aus den Gleichungen (31.) folgt dann, dass auch $\frac{dy_1}{dx}, \ldots \frac{dy_n}{dx}$ rationale Functionen von z sind, so dass die m Systeme (31.) ersetzt werden können durch

$$(32.)\qquad \frac{dy_i}{dx} = R_i(x, \eta_1, \ldots, \eta_2, z), \; (i = 1, 2, \ldots, n), \quad f(x, y_1, \ldots, y_n, z) = 0,$$

denen die Gleichungen (30.) als Integrale genügen.

Differentiirt man eine der Gleichungen (30.), die wir kurz mit $F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0$ bezeichnen, total nach x, indem wir C als durch diese Gleichung bestimmte Function von $x, y_1, \ldots, y_n$ betrachten und berücksichtigen (32.), so erhält man

$$(33.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial y_1} R_1(x, y_1, \ldots, y_n, z) + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial y_{n-1}} R_{n-1}(x, y_1, \ldots, y_n, z) + \dfrac{\partial F}{\partial y_n} \dfrac{dy_n}{dx} \\ \qquad\qquad = -\dfrac{\partial F}{\partial C} \dfrac{dC}{dx}, \end{cases}$$

wo

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y_1} R_1 + \cdots + \frac{\partial C}{\partial y_{n-1}} R_{n-1} + \frac{\partial C}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx}.$$

Die linke Seite von (33.), gleich Null gesetzt, muss übereinstimmen mit der Gleichung

$$\frac{dy_n}{dx} = R_n(x, y_1, \ldots, y_n, z),$$

woraus folgt, dass identisch

$$(34.)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - R_n(x, y_1, \ldots, y_n, z)\right) = -\frac{\partial F}{\partial C} \frac{dC}{dx},$$

wobei jeder Wurzel z der Gleichung $f(x, y_1, \ldots, y_n, z) = 0$ eine bestimmte Wurzel C der Gleichung $F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0$ entspricht. Aus (34.) geht zunächst hervor, dass die Differentialgleichungen (32.) durch $C = \text{const.}$ befriedigt werden, da der Factor $\frac{\partial F}{\partial y_n}$, der keine Constanten enthält, nicht für einen beliebigen Werth der Constanten verschwinden kann, demnach ist $F(x, y_1, \ldots, y_n, C) = 0$ ein Integral des Systems (32.) mit willkürlicher Constante. Aber die Gleichungen (32.) können auch erfüllt werden, wenn $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ gleichzeitig mit $F = 0$ wird. Bezeichnet man mit

$$D(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$$

die Discriminantengleichung, die durch Elimination von C aus den Gleichungen

$$F(x, y_1, \dots, y_n, C) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y_1, \dots, y_n, C)}{\partial C} = 0$$

hervorgeht, und wird dieser Gleichung durch $y_n = \eta(x, y_1, \dots, y_{n-1})$ genügt, so stellt die letztere Gleichung, falls sie die Gleichungen (32.) befriedigt und für $y_n = \eta$ keine der Wurzeln C einen constanten Werth erhält, ein *singuläres* Integral, im Falle einige der Wurzeln C constant werden, zugleich ein singuläres und particuläres Integral und endlich, falls alle Wurzeln C constant werden, nur ein particuläres Integral dar. Aber wie aus (34.) hervorgeht, kann $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$ werden, ohne dass $\frac{dy_n}{dx} - R_n = 0$ wird, indem nämlich nur der Factor $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ verschwindet. In diesem Falle ist $y_n = \eta$ überhaupt kein Integral des Differentialgleichungssystems (32.). Es ist nun festzustellen, unter welcher Bedingung dies eintritt.

Da für $y_n = \eta$ mehrere Wurzeln C der Gleichung $F(x, y_1, \dots, y_n, C) = 0$ einander gleich werden, so mögen p Wurzeln C für $y_n = \eta$ den gleichen Werth ζ annehmen, der nicht constant sein soll, da sonst $y_n = \eta$ ein particuläres Integral wäre. Die Gleichung $F(x, y_1, \dots, y_n, C) = 0$ nach Potenzen von $y_n - \eta$ und $C - \zeta$ entwickelt, erhält dann die Form

$$(35.) \quad F = (y_n - \eta)\mathfrak{P}_0(y_n - \eta, C - \zeta) + (C - \zeta)^p \mathfrak{P}_1(y_n - \eta, C - \zeta) = 0 \quad (p > 1).$$

wo $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}_1$ Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $y_n - \eta$, $C - \zeta$ mit von $x, y_1, \dots, y_{n-1}$ abhängenden Coefficienten bedeuten, und $\mathfrak{P}_1$ für $y_n = \eta$ und $C = \zeta$ nicht verschwindet. Nun möge eine Gruppe von $\alpha \leqq p$ Zweigen der Function C, die für $y_n = \eta$ den Werth ζ annehmen, die Entwickelung haben

$$(36.) \quad C - \zeta = g_0(y_n - \eta)^{\frac{r}{\alpha}} + g_1(y_n - \eta)^{\frac{r+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo g_0, g_1 in der Umgebung des willkürlichen Systems $x_0, y_{10}, \dots, y_{n-1,0}$ holomorphe Functionen sind und g_0 nicht identisch verschwindet. Aus (34.) erhält man

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y_n - \eta)\mathfrak{P}_2(y_n - \eta, C - \zeta) + (C - \zeta)^{p-1}\mathfrak{P}_3(y_n - \eta, z - \zeta),$$

wo $\mathfrak{P}_3$ für $y_n = \eta$, $z = \zeta$ nicht verschwindet.

Die Substitution (36.) für $C - \zeta$ möge ergeben:

$$\frac{\partial F}{\partial C} = (y_n - \eta)^{\varrho}\mathfrak{P}_0\left((y_n - \eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad (\varrho > 0),$$

wo $\mathfrak{P}_0$ für $y_n = \eta$ nicht verschwindet. ϱ wird nur dann kleiner als 1 sein, wenn $(p-1)\cdot\frac{r}{\alpha}<1$ ist, und in diesem Falle ist $\varrho=(p-1)\cdot\frac{r}{\alpha}$, sonst ist $\varrho\geqq 1$.

Nun folgt ebenfalls aus (36.)

$$\frac{dC}{dx}=\frac{d\zeta}{dx}+(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)+(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\left(\frac{dy_n}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ für $y_n=\eta$ nicht verschwinden. Also wird

$$(36.)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial C}\frac{dC}{dx}&=\mathfrak{P}_0\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)(y_n-\eta)^{\varrho}\left(\frac{d\zeta}{dx}+(y_n-\eta)^{\frac{r}{\alpha}}\mathfrak{P}_1\left((y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)\\&\quad+(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}\mathfrak{P}_2(y_n-\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{dy_n}{dx}-\frac{d\eta}{dx}\right),\end{aligned}\right.$$

wobei noch zu bemerken ist, dass $\frac{d\zeta}{dx}$ von Null verschieden ist, da ζ nicht constant sein soll.

Ist nun $\frac{r}{\alpha}\geqq 1$, so erhält man aus der rechten Seite von (37.) nach Abtrennung von $(y_n-\eta)^{\varrho}$ einen Ausdruck, der für $y_n=\eta$ nicht verschwindet. Aus (34.) folgt, dass der Factor $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ die Potenz $(y_n-\eta)^{\varrho}$ als Theiler enthält, während $\frac{dy_n}{dx}-R_n(x, y_1, \dots, y_n, z)$ nicht verschwindet, also ist in diesem Falle $y_n=\eta$ kein Integral der Gruppe der Differentialgleichungssysteme, welche aus der Zweiggruppe (36.) hervorgehen.

Ist aber $\frac{r}{\alpha}<1$, dann ist $(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$ die höchste gemeinsame Potenz von $y_n-\eta$ auf der rechten Seite von (36.). Diese Potenz ist nie negativ, denn nach obiger Bemerkung muss, wenn $\varrho<1$ ist, $\varrho=(p-1)\frac{r}{\alpha}$ sein, also $\varrho+\frac{r}{\alpha}-1\equiv p\cdot\frac{r}{\alpha}-1$, mithin da $p\geqq\alpha$, $\varrho+\frac{r}{\alpha}-1\geqq r-1$. Nach Abtrennung von $(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$ bleibt auf der rechten Seite von (37.) ein Ausdruck, der $y_n-\eta$ nicht mehr als Factor enthält, aber doch für $y_n=\eta$ verschwindet, weil $\frac{dy_n}{dx}=\frac{d\eta}{dx}$ wird. Also wird auch nach (34.) $\frac{\partial F}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx}-R_n(x, y_1, \dots, y_n, z)\right)$ nach Abtrennung der höchsten Potenz $(y_n-\eta)^{\varrho+\frac{r}{\alpha}-1}$, die nur in $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ als Theiler enthalten sein kann, für $y_n=\eta$ verschwinden, folglich wird $\frac{dy_n}{dx}-R_n(x, y_1, \dots, y_n, z)$ $=0$ für $y_n=\eta$; also ist $y_n=\eta$ ein Integral, und da für $y_n=\eta$ C nicht constant wird, ein *singuläres* Integral der aus (36.) hervorgehenden Gruppe der Differentialgleichungssysteme.

$y_n = \eta$ ist also überhaupt kein Integral, wenn in keiner Entwickelung von C als Function von y_n, definirt durch die Gleichung $F(x, y_1, \dots, y_n, C) = 0$, nach Potenzen von $y_n - \eta$, der Exponent der niedrigsten Potenz kleiner als 1 ist. Es ist ein Integral, wenn in einigen Entwickelungen der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ grösser oder gleich 1 ist, und zwar ein singuläres, und falls einige der Wurzeln C für $y_n = \eta$ constant werden, zugleich ein particuläres.

Im vorigen Abschnitt haben wir, von den Differentialgleichungen ausgehend, übereinstimmend mit den vorstehenden Ergebnissen festgestellt, dass $y_n = \eta(x, y_1, \dots, y_{n-1})$ kein Integral ist, wenn bei der Entwickelung von C_i als Function von $y - \eta$ nach Potenzen von $y_n - \eta$ in keiner der Integralgleichungen $\varphi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$ der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta \; \frac{r}{\alpha} < 1$ ist, dagegen ein Integral, wenn wenigstens für eine Integralgleichung $\varphi_1(x, y_1, \dots, y_n) = C_1$ (nämlich derjenigen, die der Annahme, dass die willkürliche Function $\varphi_0 = x$ sei, entspricht) der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_n - \eta$ kleiner als 1 ist. Dies galt, wie aus der Ableitung hervorgeht, für jede beliebige Function η. Wenn $y_n = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung $\Delta = 0$ ist, so sahen wir, dass im letzteren Falle $y_n = \eta$ ein singuläres Integral ist. Daraus erkennt man, dass die Discriminantengleichungen $\Delta = 0$ und $D = 0$ die singulären Lösungen $y_n = \eta$ zu gemeinsamen Wurzeln haben müssen. Während indess von den Coefficienten der Differentialgleichungen (1.) eine Bedingung erfüllt werden muss, damit eine singuläre Lösung existire, nämlich dass $R_n = \sigma$ ist, haben die Coefficienten der Integralgleichungen eine Bedingung zu erfüllen, damit keine singuläre Lösung vorhanden sei. Denn in diesem Falle enthält, wie im Vorhergehenden entwickelt ist, sowohl $\frac{\partial F}{\partial C}$ als $\frac{\partial F}{\partial y_n}$ die Potenz $(y_n - \eta)^\varrho$ als Factor. Es muss also für $y_n = \eta$ mit $D = 0$ zugleich $\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0$ sein.

Anmerkung: Die Discriminantengleichungen, die wir erhalten, indem wir aus je einer der Gleichungen $F_i(x, y_1, \dots, y_n, C_i) = 0$ und ihrer Ableitung nach C_i die Constante C_i eliminiren, brauchen nicht mit einander übereinzustimmen, doch müssen sie alle mit $\Delta = 0$ die singulären Lösungen $y = \eta$ zu gemeinsamen Wurzeln haben. Man kann nun, ohne Bevorzugung einer einzelnen Constante C_i, von dem Systeme der vollständigen Lösungen (29.)

$$\varphi_1(x, y_1, \dots, y_n, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_n(x, y_1, \dots, y_n, C_1, \dots, C_n) = 0$$

ausgehend, zur Discriminantengleichung gelangen, indem man die Bedingung aufstellt, dass die vorstehenden Gleichungen als algebraische Gleichungen zwischen den Unbekannten $C_1, \ldots, C_n$ betrachtet, ein Wurzelsystem mehrfach besitzen. Dieselbe ergiebt sich bekanntlich durch Elimination sämmtlicher Constanten aus den $n+1$ Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ \ldots, \ \varphi_n = 0, \quad \Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial C_1} \frac{\partial \varphi_2}{\partial C_2} \cdots \frac{\partial \varphi_n}{\partial C_n} = 0.$$

Das Eliminationsresultat $D = 0$ hat mit $\Delta = 0$ die singulären Lösungen gemeinsam.

Anwendungen:*)

1. Beispiel.

$$(1.)\quad \begin{cases} \left(x + \dfrac{dy_1}{dx}\right)\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{dy_2}{dx} - y_1 = 0, \\ \left(x + \dfrac{dy_1}{dx}\right)\dfrac{dy_2}{dx} - y_2 = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$\frac{2}{3}x + \frac{dy_1}{dx} = z,$$

so geht das System über in

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = z - \dfrac{2x}{3}, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_2}{z + \dfrac{x}{3}} = y_1 - \left(z + \dfrac{x}{3}\right)\left(z - \dfrac{2x}{3}\right), \end{cases}$$

Dadurch ergiebt sich als Gleichung für z:

$$z^3 = \left(\frac{1}{3}x^2 + y_1\right)z + \frac{2}{27}x^3 + \frac{x}{3}y_1 - y_2 = pz + q.$$

Die Discriminante lautet

$$\Delta = 4p^3 - 27q^2 = 0,$$

woraus

$$q = 2\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

also

$$y_2 = \frac{2}{27}x^3 + \frac{x}{3}y_1 - \frac{2}{27}(x^2 + 3y_1)^{\frac{3}{2}} = \eta(x, y_1).$$

Die Function η ist überall holomorph mit Ausnahme der Werthsysteme x, y_1, für die $x^2 + 3y_1 = 0$ ist. Die zu $y_2 = \eta$ gehörige doppelte Wurzel ζ von z ist

$$\zeta = -\sqrt{\frac{p}{3}} = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2 + 3y_1}.$$

*) Die Beispiele sind aus der Abhandlung des Herrn *A. Mayer*: Ueber die Ableitung der singulären Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen aus den Differentialgleichungen selbst. Math. Ann. XXII.

Zunächst überzeugen wir uns, dass $y_2 = \eta$ ein Integral des Systems (2.) ist. Hierzu muss

$$(3.)\qquad \frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y_1}\Big(\zeta-\frac{2x}{3}\Big) = y_1-\Big(\zeta+\frac{x}{3}\Big)\Big(\zeta-\frac{2x}{3}\Big)$$

sein, welche Gleichung identisch erfüllt wird.

Es ist nun diejenige Function z von y_2, die für $y_2 = \eta$ in ζ übergeht, nach Potenzen von $y_2-\eta$ zu entwickeln. Wir haben

$$z^3 = \Big(\frac{1}{3}x^2+y_1\Big)z+\frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1-y_2,$$

$$\zeta^3 = \frac{1}{3}(x^2+y_1)\zeta+\frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1-\eta,$$

also

$$z^3-\zeta^3 = (\tfrac{1}{3}x^2+y_1)(z-\zeta)-(y_2-\eta),$$

oder

$$(z-\zeta)\{(z-\zeta)^2+3\zeta(z-\zeta)+3\zeta^2-\tfrac{1}{3}x^2-y_1\} = y_2-\eta,$$

und da

$$\zeta = -\tfrac{1}{3}\sqrt{x^2+3y_1},$$

$$(z-\zeta)^2\{z-\zeta+3\zeta\} = y_2-\eta.$$

Hieraus ergiebt sich die Entwickelung

$$z = \zeta+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}(y_2-\eta)^{\frac{1}{2}}+\alpha(y_2-\eta)^{\frac{2}{2}}+\cdots.$$

Aus (2.) folgt, wenn man

$$y_2 = \eta+u^2,\qquad z = \zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots$$

setzt,

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y_1}\Big(-\frac{2}{3}x+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\Big)+2u\frac{du}{dx}$$

$$= y_1-\Big(\frac{x}{3}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\Big)\Big(-\frac{2x}{3}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots$$

oder nach (3.)

$$2u\frac{du}{dx} = \frac{u}{\sqrt{3\zeta}}\Big\{-\frac{\partial\eta}{\partial y_1}+\frac{x}{2}-2\zeta\Big\}+\beta u^2+\cdots,$$

und da

$$\frac{x}{3}-\frac{\partial\eta}{\partial y_1} = -\zeta,$$

$$2u\frac{du}{dx} = -\sqrt{3\zeta}\cdot u+\beta u^2+\cdots,$$

sodass der Coefficient von u nicht identisch verschwindet. Setzen wir wieder

$$u = (y_2-\eta)^{\frac{1}{2}},$$

so ergiebt sich die Entwickelung

$$\frac{d(y_2-\eta)}{dx} = -\sqrt{3\zeta}(y_2-\eta)^{\frac{1}{2}}+\beta(y_2-\eta)^{\frac{2}{2}}+\cdots,$$

sodass also der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_2-\eta$ in der Entwickelung von $\frac{d(y_2-\eta)}{dx}$ kleiner als 1 ist; folglich ist nach S. 333 des ersten Abschnitts

$$y_2 = \eta = \frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1-\frac{2}{27}(x^2+3y_1)^{\frac{3}{2}}$$

ein singuläres Integral. In der That folgt aus

$$2\frac{du}{dx} = -\sqrt{3\zeta}+\beta u+ \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dx} = \zeta-\frac{2x}{3}+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}u+\cdots$$

das Differentialgleichungssystem mit der unabhängigen Variablen u

$$\frac{dx}{du} = \frac{2}{-\sqrt{3\zeta}}+\gamma u+\cdots, \qquad \frac{dy_1}{du} = 2\frac{\zeta-\frac{2x}{3}}{-\sqrt{3\zeta}}+\delta u+\cdots,$$

deren Lösungen mit den Anfangswerthen $x = x_0$, $y_1 = y_{10}$ für $u = 0$ lauten:

$$x-x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3\zeta_0}}u+\cdots, \qquad y_1-y_{10} = -\frac{2(\zeta_0-\frac{2}{3}x_0)}{\sqrt{3\zeta_0}}u+\cdots,$$

woraus

$$u = -\frac{\sqrt{3\zeta_0}}{2}(x-x_0)+\varepsilon(x-x_0)^2+\cdots, \qquad y_2-\eta = \frac{3\zeta_0}{4}(x-x_0)^2+\delta'(x-x_0)^3+\cdots.$$

Der Exponent der niedrigsten Potenz von $x-x_0$ in der Entwickelung von $y_2-\eta$ ist also grösser als 1. Betrachtet man x, y_1, y_2 als Coordinaten eines Punktes im Raume, so ist die Fläche

$$\left(\frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1-y_2\right)^2 = \frac{4}{27}(x^2+3y_1)^3,$$

wovon $y_2 = \eta$ ein Zweig ist, eine Enveloppe der Integralcurven des Systems (1.). Um die singulären Curven zu erhalten, die auf der Fläche liegen, haben wir die erste der Gleichungen (2.), worin $y_2 = \eta$, $z = \zeta$ zu setzen ist, zu integriren, dieselbe lautet:

$$\frac{dy_1}{dx} = \zeta-\frac{2x}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{x^2+3y_1}-\frac{2x}{3} \quad \text{oder} \quad \frac{d\left(y_1+\frac{x^2}{3}\right)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{y_1+\frac{x^2}{3}}.$$

Die Integration ergiebt $2\sqrt{y_1+\frac{x^2}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-3c)$, wo c eine willkürliche Constante ist. Die Curve wird also dargestellt durch

$$(4.)^{*)}\quad \begin{cases} y_1 = -\frac{x^2}{3}+\frac{(x-3c)^2}{12} = -\frac{(x-c)(x+3c)}{4}, \\ y_2 = \frac{2}{27}x^3-\frac{x(x-c)(x+3c)}{12}+\frac{2}{27}\left(\frac{x-3c}{2}\right)^3 = -\frac{c}{4}(x-c)^2. \end{cases}$$

Die vollständigen Lösungen lauten:

$$(5.)\qquad y_1 = a(x+a)+b, \qquad y_2 = b(x+a),$$

wo a und b willkürliche Constanten sind.

*) Vergl. *Mayer* a. a. O. S. 382.

Die Elimination von b ergiebt

$$(6.)\qquad \left(a+\frac{2x}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}x^2+y_1\right)\left(a+\frac{2x}{3}\right)+\frac{2}{27}x^3+\frac{xy_1}{3}-y_2,$$

also dieselbe Gleichung für $a+\frac{2x}{3}$, wie oben für z, die Discriminante in Bezug auf a fällt also hier mit Δ zusammen. Die Entwickelung von a nach Potenzen von $y_2-\eta$, wo η die obige Bezeichnung hat, lautet, wenn man beachtet, dass für $y_2=\eta$ $a+\frac{2x}{3}=\zeta=-\frac{1}{3}\sqrt{x^2+3y_1}$ ist,

$$a+\frac{2x}{3}=\zeta+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}(y_2-\eta)^{\frac{1}{2}}+\beta(y_2-\eta)^{\frac{2}{2}}+\cdots,$$

wonach also der Exponent der niedrigsten Potenz kleiner als 1 ist. Dies war aber nach S. 336 des zweiten Abschnitts ebenfalls ein Kriterium dafür, dass $y_2=\eta$ ein singuläres Integral ist. Specialisirt man die Constanten a und b so, dass die durch (5.) dargestellte Curve durch einen Punkt einer der Curven (4.) hindurchgeht, indem man

$$a=-\frac{x_0+c}{2},\qquad b=-\frac{c}{2}(x_0-c)$$

setzt, wodurch y_1 und y_2 für $x=x_0$ in (5.) dieselben Werthe erhalten wie in (4.), so erhält man in dem Schnittpunkte auch für die Ableitungen $\frac{dy_2}{dx}$, $\frac{dy_1}{dx}$ in (5.) und (4.) dieselben Werthe nämlich bez. $-\frac{x_0+c}{2}$, $-\frac{c}{2}(x_0-c)$, sodass jede Curve aus der Curvenschar (4.), also für ein beliebiges c, die Enveloppe einer Curvenschar aus dem Curvennetz (5.) darstellt, nämlich derjenigen Curvenschar, die aus (5.) hervorgeht, wenn man in den obigen Ausdrücken für a und b bei beliebig fixirtem c x_0 variiren lässt. Die Curvenschar (4.) lässt sich übrigens offenbar nicht durch Beziehungen, die man zwischen den Constanten a und b einführt aus den vollständigen Integralcurven (5.) erhalten, ist also singulär.

Die Curve auf der Fläche $\Delta=0$, die die Ausnahmepunkte enthält, bei denen η aufhört, holomorph zu sein, ist, wie oben bemerkt, durch die Gleichungen

$$x^2+3y_1=0,\quad \text{also}\quad y_1=-\frac{x^2}{3}$$

gegeben, der zugehörige Werth von y_2 auf der genannten Fläche wird

$$y_2=\eta=\frac{2}{27}x^3+\frac{x}{3}y_1=-\frac{x^3}{27}.$$

Die Curve $y = -\frac{x^2}{3}$, $y_2 = -\frac{x^3}{27}$, $y_2 = -\frac{x^3}{27}$ ist die Enveloppe der singulären Curvenschar (4.).*)

2. Beispiel.

$$(7.)\quad \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^3 + \frac{x}{2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{dx}+1\right)y_1 - y_2 = 0, \\ \frac{dy_1}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 + \frac{dy_2}{dx} = 0. \end{cases}$$

Setzt man

$$\frac{x}{2} + \frac{dy_1}{dx} = z,$$

so geht das System (7.) über in

$$(8.)\quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = z - \frac{x}{2}, \\ \frac{dy_2}{dx} = -\left(z - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(z - \frac{x}{2}\right)^2, \end{cases}$$

während z der Gleichung genügt

$$z^3 = 3\left(\frac{x^2}{4} + y_1\right)z - \frac{x^3}{4} + 3y_1\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 3y_2 = pz + q.$$

Die Discriminante

$$4p^3 - 27q^2 = 0$$

hat zur Wurzel

$$y_2 = \eta = \frac{x^3}{12} + \frac{xy_1}{2} - y_1 + \frac{1}{12}(x^2+4y_1)^{\frac{3}{2}}.$$

Die zugehörige doppelte Wurzel ζ von z ist

$$\zeta = -\frac{1}{2}(x^2+4y_1)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Function η ist überall holomorph mit Ausnahme der Werthepaare x, y_1, für die $x^2+4y_1 = 0$ ist.

Da identisch

$$(9.)\quad -\left(\zeta - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y_1}\left(\zeta - \frac{x}{2}\right) = \sigma$$

ist, so ist $y_2 = \eta$ ein Integral des Systems (7.).

Wie bei dem vorigen Beispiele erhält man die Entwickelung

$$z = \zeta + \frac{1}{\sqrt{3\zeta}}(y_2 - \eta)^{\frac{1}{2}} + \beta(y_2 - \eta)^{\frac{2}{2}} + \cdots.$$

Aus (8.) folgt dann, indem man

$$y_2 = \eta + u^2, \quad z = \zeta + \frac{u}{\sqrt{3\zeta}} + \alpha u^2 + \cdots$$

*) Vgl. *Mayer* a. a. O. S. 383.

setzt,

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y_1}\Big(-\frac{x}{2}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\Big)+2u\frac{du}{dx}$$
$$=-\Big(-\frac{x}{2}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\Big)-\frac{1}{2}\Big\{-\frac{x}{2}+\zeta+\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}+\alpha u^2+\cdots\Big\}^2$$

oder nach (9.)

$$\frac{d(y_2-\eta)}{dx}=2u\frac{du}{dx}=\frac{u}{\sqrt{3\zeta}}\Big\{-\frac{\partial\eta}{\partial y_1}-1+\frac{x}{2}-\zeta\Big\}+\beta u^2+\cdots.$$

Nun ist

$$\frac{\partial\eta}{\partial y_1}=-1+\frac{x}{2}-\zeta,$$

folglich wird der Coefficient von u auf der rechten Seite identisch gleich Null. Wir erhalten also

$$\frac{d(y_2-\eta)}{dx}=\beta(y_2-\eta)+\gamma(y_2-\eta)^{\frac{3}{2}}+\cdots.$$

Da der Exponent der niedrigsten Potenz von $y_2-\eta$ in der Entwickelung von $\frac{d(y_2-\eta)}{dx}$ gleich 1 ist, so ist nach S. 329 des ersten Abschnitts $y_2-\eta$ ein particuläres Integral. Auch folgt aus den Differentialgleichungen

$$2\frac{du}{dx}=\beta u+\gamma u^2+\cdots,\quad \frac{dy_1}{dx}=\zeta-\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3\zeta}}u+\cdots,$$

dass bei den Anfangsbedingungen $x=x_0$, $y_1=y_{10}$, $u=0$, die Gleichung $u=0$ oder $y_n-\eta=0$ eine nothwendige Folge ist, also die Entwickelung $y_n-\eta$ nach Potenzen von $x-x_0$ sich auf Null reducirt. (Vgl. S. 333.)

Um die particulären Curven zu erhalten, die auf der Fläche liegen, haben wir die erste der Gleichungen (8.), worin $y_2=\eta$, $z=\zeta$ zu setzen ist, zu integriren. Dieselbe lautet

$$\frac{dy_1}{dx}=\zeta-\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}(x^2+4y_1)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}$$

oder

$$\frac{d(x^2+4y_1)}{dx}=-2\sqrt{x^2+4y}.$$

Die Integration ergiebt

$\sqrt{x^2+4y_1}=-(x+2a)$, a eine willkürliche Constante,

woraus zur Darstellung der gesuchten Curvenschar die Gleichungen folgen*)

$$(10.)\quad\begin{cases} y_1=ax+a^2,\\ y_2=\frac{x^3}{12}+x(ax+a^2)-(ax+a^2)-\frac{1}{12}(x+2a)^3=-\Big(a+\frac{a^2}{2}\Big)x-\frac{2}{3}a^3-a^2.\end{cases}$$

*) *Mayer,* a. a. O. S. 383.

Die vollständigen Lösungen des Systems (7.) lauten*)

$$(11.)\quad \begin{cases} y_1 = c_1 x + c_2, \\ y_2 = -\left(c_1 + \frac{c_1^2}{2}\right)x + \frac{c_1^3}{3} - c_1 c_2 - c_2. \end{cases}$$

Die Curvenschar (10.), die auf der Fläche $\Delta = 0$ liegt, stellt aber, wie Herr *Mayer* bemerkt hat, in der That keine singulären, sondern particuläre Lösungen dar. Denn sie werden aus den vollständigen Lösungen (11.) erhalten, indem man zwischen den Constanten die Beziehung $C_2 = C_1^2$ eingeführt und $c_1 = a$ setzt. Die Curve auf der Fläche $\Delta = 0$, die die Ausnahmepunkte enthält, in denen $y_2 = \eta$ aufhört holomorph zu sein, wird wie oben angegeben, durch die Gleichung

$$x^2 + 4y_1 = 0$$

dargestellt. Der zugehörige Werth von y_2 wird

$$y_2 = \eta = \frac{x^3}{12} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}.$$

Die Curve

$$y_1 = -\frac{x^2}{4}, \qquad y_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{24}$$

stellt eine Enveloppe der Curvenschar (10.) dar.**)

3. Beispiel.

Die Differentialgleichungen der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt sind von Herrn *Hess*†) auf die Form gebracht worden.

$$(12.)\quad \begin{cases} \frac{d\nu}{dt} = 2P\sqrt{\nu\sigma - \varrho^2 + 2\lambda\mu\varrho - \lambda^2\sigma - \nu\mu^2} = 2P\sqrt{H}, \\ \frac{d\varrho}{dt} = \alpha(B-C)qr + \beta(C-A)rp + \gamma(A-B)pq = R, \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2}\cdot R + \frac{\sqrt{H}}{\nu\sigma - \varrho^2}[\sigma(2P\mu + h) - \varrho(\alpha p + \beta q + \gamma r)], \end{cases}$$

wo p, q, r, mit μ, ν, ϱ durch die Gleichungen verbunden sind

$$(13.)\quad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2P\mu + h, \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu, \\ Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \varrho \end{cases}$$

und P, h, A, B, C, α, β, γ, σ, λ Constante sind.

Definiren wir z durch die Gleichung

$$z^2 = H$$

*) *Mayer* a. a. O. S. 384.

**) Vgl. *Mayer* a. a. O. S. 383.

†) Math. Ann. XX p. 464. Vgl. *Mayer* a. a. O. S. 384.

und eliminiren aus (12.) dt, so lauten die zu integrirenden Gleichungen

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\nu}{d\varrho} = \dfrac{2Pz}{R}, \\ \dfrac{d\mu}{d\varrho} = \dfrac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\nu\sigma-\varrho^2} + \dfrac{R}{(\nu\sigma-\varrho^2)R}[\sigma(2P\mu+h)-\varrho(\alpha p+\beta q+\gamma r)], \end{cases}$$

$$z^2 = H.$$

Die Discriminante der Gleichung für z lautet

$$H = \nu\sigma-\varrho^2+2\lambda\mu\varrho-\lambda^2\sigma-\nu\mu^2 = 0,$$

woraus

$$\nu = \frac{\varrho^2-2\lambda\mu\varrho+\lambda^2\sigma}{\sigma-\mu^2} = \eta.$$

Die entsprechende Wurzel ζ von z ist

$$\zeta = 0.$$

Wir beweisen zunächst, dass $\nu=\eta$ ein Integral von (14.) ist. Hierzu muss

$$\frac{d\nu}{d\varrho} = \frac{\partial\nu}{\partial\varrho}+\frac{\partial\nu}{\partial\mu}\frac{d\mu}{d\varrho} = 0,$$

für $\nu=\eta$, $z=0$ oder

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\eta\sigma-\varrho^2} = 0$$

sein. Nun ist

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho} = \frac{2\varrho-2\lambda\mu}{\sigma-\mu^2},\qquad \frac{\partial\eta}{\partial\mu} = -\frac{(2\varrho-2\lambda\mu)(\lambda\sigma-\mu\varrho)}{(\sigma-\mu^2)^2},\qquad \frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\eta\sigma-\mu\varrho^2} = \frac{\sigma-\mu^2}{\lambda\sigma-\mu\varrho}$$

also

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\frac{\lambda\sigma-\varrho\mu}{\eta\sigma-\varrho^2} = 0$$

folglich $\nu=\eta$ ein Integral. Da $\dfrac{d\eta}{d\varrho}=0$, so ist $\eta=\text{const.}$ und die entsprechende Schar der Integralcurven ist gegeben durch die Gleichungen

$$(15.)\quad \begin{cases} \nu = c, \\ \varrho^2-2\lambda\mu\varrho+\lambda^2\sigma = c(\sigma-\mu^2), \end{cases}$$

wo c eine willkürliche Constante bedeutet.

Um nun zu entscheiden, ob $\nu=\eta$ ein singuläres oder particuläres Integral ist, entwickeln wir zunächst z nach Potenzen von $\nu-\eta$. Man erhält

$$z = \sqrt{H} = \sqrt{\sigma-\mu^2}(\nu-\eta)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man nun

$$\nu = \eta+u^2,\qquad z = \sqrt{\sigma-\mu^2}\cdot u,$$

so geht die Gleichung

$$\frac{d\nu}{d\varrho} = \frac{2Pz}{R}$$

über in

$$2u\frac{du}{d\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\left\{\frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{(\eta+u^2)\sigma-\varrho^2}+\frac{\sqrt{\sigma-\mu^2}\cdot u}{(\eta+u^2)\sigma-\varrho^2}\,\frac{[\sigma(2P\mu+h)-\varrho(\alpha p+\beta q+\gamma r)]}{R}\right\}$$

$$=\frac{2P\sqrt{\sigma-\mu^2}\cdot u}{R}.$$

In Berücksichtigung, dass

$$\frac{\partial\eta}{\partial\varrho}+\frac{\partial\eta}{\partial\mu}\,\frac{\lambda\sigma-\mu\varrho}{\eta\sigma-\varrho^2}=0,$$

folgt

$$\frac{d(\nu-\eta)}{d\varrho}=2u\frac{du}{d\varrho}=\frac{\sqrt{\sigma-\mu^2}}{R}\Big[2P-\frac{1}{\eta\sigma-\varrho^2}(\sigma(2P\mu+h)-\varrho(\alpha p_0+\beta q_0+\gamma r_0))\Big]u$$

$+$ Glieder mit höheren Potenzen von u,

wo p_0, q_0, r_0, ein System von Wurzeln der Gleichungen (13.) bedeuten, in denen auf der rechten Seite η statt ν zu setzen ist. Wenn nun nicht identisch der Ausdruck

$$(16.)\qquad 2P(\eta\sigma-\varrho^2)-\sigma(2P\mu+h)+\varrho(\alpha p_0+\beta q_0+\gamma r_0)=0$$

wird für jedes μ und ϱ, so verschwindet nicht der Coefficient von u. Die Entwickelung von $\frac{d(\nu-\eta)}{d\varrho}$ nach Potenzen von $\nu-\eta$ beginnt also dann mit $(\nu-\eta)^{\frac{1}{2}}$, was ein Kriterium dafür ist, dass $\nu=\eta$ ein singuläres Integral ist.

Vom Ausnahmefalle (16.) abgesehen, ist also $\nu=\eta$ ein singuläres Integral und die entsprechenden Lösungen (15.) sind also singulär. Herr *Hess* bezeichnete sie als particulär, Herr *Mayer* macht darauf aufmerksam, dass sie auch singulär sein könnten. Nach unserem Kriterium ist im allgemeinen das letztere der Fall. Auch in dem besonderen von Herrn *Hess* behandelten Falle, wo $\alpha=0$, $\beta=0$ also nach (13.) $r=r_0=\frac{\varrho}{C\gamma}$, $\sigma=\gamma$ ist, wird (16.) nicht identisch erfüllt, sind also die gefundenen Lösungen singulär.