Werk

Titel: Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. (Mit Rückb...

Autor: Thomé, L.W.

Jahr: 1900

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0122|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ueber lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.

(Mit Rückblick auf die gesammten von dem Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die vorliegende Abhandlung behandelt in No. 1 den homogenen linearen Differentialausdruck, der in den Coefficienten rational nebst der unabhängigen Variablen eine irreductibele algebraische Function enthält. Es wird der Begriff eines in dem Bereiche dieser algebraischen Function normalen Differentialausdruckes aufgestellt und ein System solcher Differentialausdrücke in Betracht gezogen. Hierbei ergeben sich Sätze, welche solchen über Systeme von Differentialausdrücken mit rationalen Functionen der unabhängigen Variablen als Coefficienten, die als normale Differentialausdrücke bezeichnet sind (vergl. die Abhandlung des Verfassers Bd. 96 dieses Journals), entsprechen. Sodann wird folgender Zusammenhang nachgewiesen. Wenn man aus einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten rational nebst der unabhängigen Variablen eine irreductibele algebraische Function derselben enthalten, diejenige homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten herleitet, deren Integrale die linearunabhängigen Integrale jener Differentialgleichung sind — die hergeleitete Differentialgleichung ist die Connexdifferentialgleichung der ursprünglichen Differentialgleichung genannt worden — und wenn der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt werden kann, so ist der Differentialausdruck der ursprünglichen Differentialgleichung durch ein System im Bereiche der irreductibelen algebraischen Function normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Die Integration der homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten war für den Fall, dass der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, in der Abhandlung des Verfassers Bd. 121 vermittelst der Integration der Connexdifferentialgleichung bewerkstelligt worden. Jetzt ist dem vorhin angegebenen Zusammenhange entsprechend zunächst der ursprüngliche Differentialausdruck zu prüfen, bevor das weitere Verfahren angewandt wird.

In No. 2 werden Untersuchungen über die Beziehung zwischen einer ursprünglichen homogenen linearen Differentialgleichung und einer solchen angestellt, deren Integral durch eine homogene lineare Verbindung des Integrales der ursprünglichen Differentialgleichung und seiner Ableitungen mit Coefficienten, die gegebene Functionen der unabhängigen Variablen sind, ausgedrückt wird.

Alsdann ist in No. 3 im Anschluss an die Uebersicht, die in Bd. 96 dieses Journals über die bis dahin von dem Verfasser erschienenen Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen gegeben ist, ein Rückblick auf die gesammten von dem Verfasser in diesem Journal veröffentlichten Arbeiten über lineare Differentialgleichungen mit ein- oder mehrwerthigen algebraischen Coefficienten enthalten.

1.

Definition eines im Bereiche einer algebraischen Function normalen Differentialausdruckes; Systeme von solchen Differentialausdrücken; Zusammenhang eines solchen Systems mit dem Differentialausdrucke der entsprechenden Connexdifferentialgleichung.

Es werden homogene lineare Differentialausdrücke betrachtet, deren Coefficienten rational die unabhängige Variable x und eine irreductibele algebraische Function s von x, die auch fehlen kann, enthalten. Der Coefficient der höchsten Ableitung der abhängigen Variablen y oder $y_1, \ldots, y'$ wird immer gleich 1 angenommen. In der Gleichung von s mit ganzen rationalen Functionen von x als Coefficienten wird der Coefficient der höchsten Potenz gleich 1 vorausgesetzt.

I.

A) Ein solcher Differentialausdruck m-ter Ordnung sei $\Phi_m(y, s, x)$, ein anderer n-ter Ordnung $\Psi_n(y, s, x)$. Wenn die Integrale von $\Phi_m(y,s,x) = 0$ und $\Psi_n(y, s, x) = 0$ bei einem Zweige von s linearunabhängig sind, so sind dieselben Integrale bei jedem Zweige von s linearunabhängig. Diese Integrale werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)$-ter Ordnung mit in x und s rationalen Coefficienten vereinigt in derselben Weise wie bei rationalen Functionen von x als Coefficienten nach Abh. Bd. 96 No. 7 I, wobei die Differentialquotienten von s vermittelst der Gleichung von s rational durch x und s ausgedrückt werden.

B) Wenn die Differentialgleichungen $\Phi_m(y,s,x) = 0$ und $\Psi_n(y,s,x) = 0$ bei einem Zweige von s k und nicht mehr linearunabhängige Integrale gemeinsam haben, so sind diese Integrale bei jedem Zweige von s die k gemeinsamen linearunabhängigen Integrale. Dieselben erfüllen eine homogene lineare Differentialgleichung k-ter Ordnung, deren Coefficienten rational x und s enthalten, $F_k(y,s,x) = 0$, wo $F_k(y,s,x)$ auf dieselbe Weise aus Φ_m und Ψ_n hergeleitet wird, wie bei rationalen Functionen von x als Coefficienten nach Abh. Bd. 96 No. 7 II.

C) Der homogene lineare Differentialausdruck $F_m(y,s,x)$, dessen Coefficienten x und s rational enthalten, wobei s auch fehlen kann (vgl. III., IV.), sei durch ein System

$$\varphi(y,s,x) = y_1, \quad \psi(y_1,s,x) \tag{1.}$$

darstellbar, worin φ und ψ homogene lineare Differentialausdrücke höherer als nullter Ordnung sind mit in x und s rationalen Coefficienten, wobei s auch fehlen darf, so heisse der Ausdruck $F_m(y,s,x)$ *in dem Bereiche s zerlegbar;* demnach wenn $F_m(y,s,x)$ nicht durch ein System wie (1.) darstellbar ist, so heisse der Ausdruck $F_m(y,s,x)$ *in dem Bereiche s unzerlegbar.*

Die Integrale von $\Phi_m(y,s,x) = 0$ und $\Psi_n(y,s,x) = 0$ seien linearunabhängig und nach A) vereinigt in der Differentialgleichung

$$\Phi_m(y,s,x) = y_1, \quad \psi_n(y_1,s,x) = 0, \tag{2.}$$

wo ψ_n ein homogener linearer Differentialausdruck n-ter Ordnung mit in x und s rationalen Coefficienten. Es ergiebt sich nun durch dieselbe Betrachtung wie bei rationalen Functionen von x als Coefficienten nach Abh. Bd. 96 No. 7 III: Ist Ψ_n im Bereiche s unzerlegbar, so auch ψ_n und ist Ψ_n im Bereiche s zerlegbar, so auch ψ_n.

II.

A) Ein homogener linearer Differentialausdruck, der x und s rational in den Coefficienten enthält, und bei jedem Punkte x regulär ist gemäss der in Abh. Bd. 115 No. 5 aufgestellten Definition, heisse *in dem Bereiche s*

regulär. Hierbei darf s auch in den Coefficienten des Differentialausdruckes fehlen; ein homogener linearer Differentialausdruck, der rationale Functionen von x als Coefficienten hat, und regulär ist (Abh. Bd. 96 No. 5), ist zugleich in dem Bereiche s regulär. Ein in dem Bereiche s regulärer Differentialausdruck m-ter Ordnung sei durch $\overline{F}_m(\overline{y}, s, x)$ bezeichnet. W sei eine rationale Function von x, welche in Partialbrüche zerlegt zum absoluten Gliede Null hat, $e^W = \Omega$. Der Differentialausdruck $\Omega \overline{F}_m(\Omega^{-1}y, s, x)$ heisse *ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck, Ω der determinirende Factor.*

Ein Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$, der sich als ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck darstellen lässt, nimmt diese Form nur auf *eine* Weise an. Aus $\Omega \overline{F}_m(\Omega^{-1}y, s, x) = \Omega_1 \overline{G}_m(\Omega_1^{-1}y, s, x)$, $\Omega = e^W$, $\Omega_1 = e^{W_1}$ folgt $\overline{F}_m(y, s, x) = \frac{\Omega_1}{\Omega}\overline{G}_m\left(\frac{\Omega}{\Omega_1}y, s, x\right)$. Daher $W = W_1$, weil sonst

$$\frac{\Omega_1}{\Omega}\overline{G}_m\left(\frac{\Omega}{\Omega_1}y, s, x\right) = 0$$

an einer Stelle von x, wo $W - W_1$ unendlich wird, kein reguläres Integral hätte. Und es ist $\overline{F}_m(y, s, x) = \Omega^{-1}F_m(\Omega y, s, x)$.

Ein homogener linearer Differentialausdruck, der rationale Functionen von x als Coefficienten hat und normal ist, der sich also auf die Form $\Omega \overline{F}_m(\Omega^{-1}y, x)$ bringen lässt, wo $\overline{F}_m(\overline{y}, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x rationalen Coefficienten, der regulär ist (vgl. Abh. Bd. 96 No. 5), ist zugleich ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck.

Ein homogener linearer Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$, dessen Coefficienten rational x und s enthalten — s darf auch fehlen, — sei durch einen Ausdruck der Form

$$(3.)\qquad f_{\alpha_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{\alpha_1}(y_1, s, x) = y_2, \quad \ldots, \quad f_{\alpha_l}(y_l, s, x)$$

darstellbar, wo $f_{\alpha_r}(y_r, s, x)$ $(r = 0, \ldots, l)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten ist, wobei s auch fehlen darf. Die Differentialquotienten von s werden vermittelst der Gleichung von s rational durch x und s ausgedrückt. Der Ausdruck (3.) heisst ein *System*, f_{α_r} $(r = 0, \ldots, l)$, wo $l+1 \geqq 1$ ist, heissen die *Bestandtheile des Systems.*

B) *Es können nun die Sätze, welche in Abh. Bd. 96 No. 8 in Bezug auf Systeme normaler Differentialausdrücke gegeben sind, und die zugehörigen*

Beweise auf Systeme in dem Bereiche s normaler Differentialausdrücke übertragen werden.

a) Hierzu sind dem dort Angegebenen entsprechend folgende Definitionen einzuführen.

Zwei in dem Bereiche s normale Differentialausdrücke werden *ähnlich* genannt, wenn sie in dem Bereiche s unzerlegbar, von derselben Ordnung und demselben determinirenden Factor sind, und wenn die zugehörigen in dem Bereiche s regulären Differentialausdrucke gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, bei denen in jedem Punkte — und zwar bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x = a$ von s $(R \geqq 1)$ nach Substitution von $x - a = \zeta^R$ (bei $x = \infty$ wird $x = \frac{1}{t}$ gesetzt), vgl. Abh. Bd. 115 No. 5 — die Wurzeln der Exponentengleichung der einen sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung der anderen so paaren lassen, dass die Wurzeln in jedem Paare sich höchstens um eine ganze Zahl unterscheiden.

Zwei Systeme in dem Bereiche s normaler Differentialausdrücke heissen *ähnlich,* wenn sie gleich viele Bestandtheile haben und die Bestandtheile von derselben Stelle ähnlich sind.

Es werde noch folgende Transformation vorgenommen. In dem Differentialausdruck α_r-ter Ordnung $f_{\alpha_r}(y, s, x)$ (3.) werde bei einem R-blättrigen Windungspunkte $x = a$ von s in der Entwickelung von s nach Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ und ebenso in dem Differentialausdruck $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ gesetzt. Hierdurch gehe $f_{\alpha_r}(y, s, x)$ über in

$$f_{\alpha_r}(y, s, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-\alpha_r} g_{\alpha_r}(y, s, \zeta), \tag{4.}$$

wo der homogene lineare Differentialausdruck g_{α_r} s und ζ in den Coefficienten rational enthält, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Dann geht durch dieselbe Substitution das System

$$f_{\alpha_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{\alpha_1}(y_1, s, x) \tag{5.}$$

über in

$$\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-\alpha_0-\alpha_1}\left\{g_{\alpha_0}(y, s, \zeta) = y', \quad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{\alpha_0} g_{\alpha_1}\left(\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-\alpha_0} y', s, \zeta\right)\right\}. \tag{6.}$$

Entsprechend bei Substitution von $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$.

b) Nun werden folgende Sätze entsprechend Abh. Bd. 96 No. 8 I aufgestellt und wie dort angegeben (vergl. hier (6.)) bewiesen.

Wenn ein in dem Bereiche s regulärer Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System (3.) darstellbar ist, so müssen die Bestandtheile des Systems in dem Bereiche s reguläre Differentialausdrücke sein. Daraus folgt, wenn $F_m(y, s, x)$ ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω ist, und eine Darstellung durch ein System (3.) hat, so müssen die Bestandtheile dieses Systems in dem Bereiche s normale Differentialausdrücke mit demselben determinirenden Factor Ω sein.

Alsdann ergeben sich zunächst die den beiden Hülfssätzen in Abh. Bd. 96 No. 8 II A entsprechenden Sätze durch das den dort angegebenen Beweisen entsprechende Verfahren (vergl. I und (6.)).

Nachdem diese beiden Sätze bewiesen sind, lassen sich alle in Abh. Bd. 96 No. 8 II angegebenen Sätze mit zugehörigen Beweisen, welche dort in Bezug auf Systeme normaler Differentialausdrücke aufgestellt sind, unmittelbar auf Systeme in dem Bereiche s normaler Differentialausdrücke übertragen.

Daher wird im Folgenden (III und V), wenn von letzteren Sätzen Gebrauch gemacht wird, einfach auf die entsprechenden Stellen in Abh. Bd. 96 No. 8 II verwiesen.

c) Auch die in Abh. Bd. 96 No. 8 III aufgestellten Sätze über reciproke Differentialausdrücke bleiben mit den Beweisen bestehen, wenn die Coefficienten der Differentialausdrücke rational x und s enthalten. Man braucht bei dem Beweise nur einen Zweig von s als Function von x in Betracht zu ziehen, um von hier aus das allgemeine Resultat zu erhalten. Ferner kommt folgende Beziehung zur Anwendung. Der reciproke Differentialausdruck von $F_m(y, s, x)$ sei durch $\underline{F_m}(\underline{y}, s, x)$ bezeichnet. Es werde bei dem R-blättrigen Windungspunkt von s $x = a$ gesetzt $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$. (Entsprechend bei $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$). $\underline{y}$ sei ein Integral von $\underline{F_m}(\underline{y}, s, x) = 0$ bei einem Zweige von s. Aus der Relation

$$\underline{y}\, F_m(y, s, x) = \frac{d}{dx}\{\underline{y} f_{m-1}(y, x)\}, \tag{7.}$$

wo f_{m-1} ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-1)$-ter Ordnung, und den Relationen

$$\left\{\begin{aligned} F_m(y, s, x) &= \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m(y, s, \zeta), \\ f_{m-1}(y, x) &= \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} g_{m-1}(y, \zeta), \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

wo G_m ein homogener linearer Ausdruck m-ter Ordnung, der s und ζ in den Coefficienten rational enthält, g_{m-1} ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-1)$-ter Ordnung ist, folgt

$$(9.)\qquad \underline{y}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} G_m(y, s, \zeta) = \frac{d}{d\zeta}\left\{\underline{y}\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} g_{m-1}(y, \zeta)\right\}.$$

Es werde nun

$$(10.)\qquad \underline{F_m(y}, s, x) = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} H_m(\underline{y}, s, \zeta)$$

gesetzt, wo H_m ein homogener linearer Differentialausdruck m-ter Ordnung, der s und ζ rational in den Coefficienten enthält, so ergiebt sich aus (9.) und (10.), dass der reciproke Differentialausdruck von $G_m(y, s, \zeta)$ gleich ist

$$(11.)\qquad \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-(m-1)} H_m\left(\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{m-1} y, s, \zeta\right).$$

C) Man kann unter Bezugnahme auf Abh. Bd. 96 No. 9 I, II A und Abh. Bd. 115 No. 5 *in dem Bereiche s bei einem Punkte x normale Differentialausdrücke* definiren. Es sei $\overline{F}_m(\overline{y}, s, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck, der x und s rational in den Coefficienten enthält und bei einem Punkte $x = a$ (bez. $x = \infty$) regulär ist, w gleich Null oder $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, so ist $e^w \overline{F}(e^{-w} y, s, x)$ ein in dem Bereiche s bei dem Punkte $x = a$ normaler Differentialausdruck. Auf die Systeme solcher Differentialausdrücke lassen sich die Sätze aus Abh. Bd. 96 No. 9 I, II A übertragen.

III.

Das Vorhergehende wird nun angewandt, um die Beziehung eines homogenen linearen Differentialausdruckes m-ter Ordnung $F_m(y, s, x)$, der x und die irreductibele algebraische Function s rational in den Coefficienten enthält, zu dem homogenen linearen Differentialausdruck N-ter Ordnung $\Phi_N(y, x)$ mit rationalen Functionen von x als Coefficienten näher zu untersuchen, wo die Differentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ als N Integrale die linearunabhängigen Integrale von $F_m(y, s, x) = 0$ hat. $\Phi_N(y, x) = 0$ ist in Abh. Bd. 121 dieses Journals die *Connexdifferentialgleichung* von $F_m(y, s, x) = 0$ genannt worden.

Der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ sei durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar. — Unter dieser Voraussetzung war in Abhandlung Bd. 121 die Integration von $F_m(y, s, x) = 0$ auf die von $\Phi_N(y, x) = 0$ zurückgeführt. — Jeder dieser normalen Differentialausdrücke, die Bestandtheile des Systems für $\Phi_N(y, x)$ sind, sei weiter zerlegt in ein System im Bereiche s unzerlegbarer Differentialausdrücke (I), diese sind im Bereiche s normale mit demselben determinirenden Factor (IIBb). Im Ganzen ist also $\Phi_N(y, x)$ durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar. Der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ ist entweder im Bereiche s unzerlegbar oder mittelst successiver Zerlegung durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer Differentialausdrücke darstellbar (I). Die Integrale von $F_m(y, s, x) = 0$ erfüllen $\Phi_N(y, x) = 0$. Daraus folgt (entsprechend dem Satz Abh. Bd. 96 No. 8 IIBc; vergl. hier IIBb) dass $F_m(y, s, x)$ durch ein System (mit einem oder mehreren Bestandtheilen) im Bereiche s unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar ist.

Also wenn der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$ von der Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, so ist der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar.

Der umgekehrte Satz wird in IV, V nachgewiesen.

IV.

Der homogene lineare Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ enthalte in den Coefficienten rational die unabhängige Variable x und die irreductibele algebraische Function s. Es soll die Connexdifferentialgleichung der Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$ (s. III) aufgestellt werden, wenn $F_m(y, s, x)$ durch das System

$$(12.) \qquad f(y, s, x) = y_1, \quad g(y_1, s, x)$$

gegeben ist, wo f und g homogene lineare Differentialausdrücke sind, welche x und s rational in den Coefficienten enthalten (wo s auch fehlen kann). Die Connexdifferentialgleichung von $f(y, s, x) = 0$ sei $\varphi(y, x) = 0$. Der Differentialausdruck $\varphi(y, x)$ hat dann (IB) die Darstellung durch das System

$$(13.) \qquad f(y, s, x) = y_1, \quad f_1(y_1, s, x),$$

wo f_1 ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten.

Die beiden Differentialgleichungen $f_1(y_1, s, x) = 0$ und $g(y_1, s, x) = 0$ können gemeinsame Integrale haben. Diese erfüllen (IB) eine homogene lineare Differentialgleichung $h(y_1, s, x) = 0$, welche x und s rational in den

Coefficienten enthält. $f_1(y_1, s, x)$ hat nun die Darstellung durch das System

(14.) $$h(y_1, s, x) = y_2, \quad f_1'(y_2, s, x),$$

$g(y_1, s, x)$ die Darstellung durch das System

(15.) $$h(y_1, s, x) = y_2, \quad g'(y_2, s, x),$$

wo f_1' und g' homogene lineare Differentialausdrücke, die x und s rational in den Coefficienten enthalten, f_1' und g' auch nullter Ordnung sein kann. Haben die beiden Differentialgleichungen $f_1(y_1, s, x) = 0$ und $g(y_1, s, x) = 0$ kein gemeinsames Integral, so ist in (14.) und (15.) $h(y_1, s, x)$ als von nullter Ordnung anzunehmen.

Die Integrale von $f_1'(y_2, s, x) = 0$ und $g'(y_2, s, x) = 0$ seien vereinigt in einer homogenen linearen Differentialgleichung (IA), deren Differentialausdruck durch das System

(16.) $$f_1'(y_2, s, x) = y', \quad g''(y', s, x)$$

gegeben wird, wo g'' ein homogener linearer Differentialausdruck mit in x und s rationalen Coefficienten. — Ist f_1' nullter Ordnung, so ist $g' = g''$; ist g' nullter Ordnung, so auch g''. —

Die Connexdifferentialgleichung von $g''(y', s, x) = 0$ sei $\chi(y', x) = 0$. — Ist g'' nullter Ordnung, so auch χ. —

Dann ist die Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ oder von

(17.) $$f(y, s, x) = y_1, \quad g(y_1, s, x) = 0$$

gegeben durch

(18.) $$\varphi(y, x) = y', \quad \chi(y', x) = 0.$$

Denn jedes Integral von (17.) erfüllt (18.) (vgl. (15.)). Ferner ergiebt sich ein System linearunabhängiger Integrale von (18.), welches (17.) erfüllt. Die linearunabhängigen Integrale von $g''(y', s, x) = 0$ sind diejenigen von $\chi(y', x) = 0$. Ein solches sei durch y' bezeichnet. Nun giebt es bei demselben Zweige von s ein Integral y_1 von $g(y_1, s, x) = 0$, welches

(19.) $$h(y_1, s, x) = y_2, \quad f_1'(y_2, s, x) = y'$$

erfüllt. Ist dann y ein Integral von $f(y, s, x) = y_1$, so erfüllt y die Differentialgleichungen $\varphi(y, x) = y'$ und (17.). Ausserdem wird ein System linearunabhängiger Integrale von $\varphi(y, x) = 0$ durch diejenigen von $f(y, s, x) = 0$ gegeben.

V.

Nun sei der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System

(20.) $$f_{\alpha_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{\alpha_1}(y_1, s, x) = y_2, \quad \dots, \quad f_{\alpha_l}(y_l, s, x)$$

gegeben, in welchem $f_{\mathfrak{a}_r}(y_r, s, x)$ $(r = 0, \ldots, l,\ l+1 \geqq 1)$ ein im Bereiche s normaler Differentialausdruck ist. Ein solcher Bestandtheil $f_{\mathfrak{a}_r}$ ist entweder schon im Bereiche s unzerlegbar, oder kann successive in ein System im Bereiche s unzerlegbarer Differentialausdrücke zerlegt werden (I), die selbst im Bereiche s normal mit demselben determinirenden Factor sind (IIBb.). Daher werden die Bestandtheile in dem Systeme (20.) als im Bereiche s unzerlegbar vorausgesetzt.

Es soll nun der Satz nachgewiesen werden, dass die Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ einen Differentialausdruck hat, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, in welchem die determinirenden Factoren, die unter einander verschieden sind, genau die verschiedenen aus dem Systeme (20.) sind.

Dieser Satz gilt zunächst von der Differentialgleichung $f_{\mathfrak{a}_0}(y, s, x) = 0$. Nun wird successive der Satz aus IV angewandt.

Der hier behauptete Satz sei bereits bewiesen für die Differentialgleichung, deren Differentialausdruck durch das System

$$(21.)\qquad f_{\mathfrak{a}_0}(y, s, x) = y_1, \quad f_{\mathfrak{a}_1}(y_1, s, x) = y_2, \quad \ldots, f_{\mathfrak{a}_{h-1}}(y_{h-1}, s, x)$$

gegeben ist. Dieses System sei der Differentialausdruck $f(y, s, x)$ aus IV (12.) und $f_{\mathfrak{a}_h}(y_h, s, x)$ sei der Differentialausdruck $g(y_1, s, x)$ aus IV (12.). Für die Connexdifferentialgleichung $\varphi(y, x) = 0$ von $f(y, s, x) = 0$ in IV gilt also der Satz als bereits bewiesen. $\varphi(y, x)$ ist daher auch durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer normaler Ausdrücke mit den verschiedenen determinirenden Factoren aus (21.) darstellbar. Daraus folgt (entsprechend dem in IIBb Gesagten und den Sätzen Abh. Bd. 96 No. 8 IIBb, c), dass der Differentialausdruck $f_1(y_1, s, x)$ (IV (13.)) eine Darstellung durch ein System im Bereiche s unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke mit determinirenden Factoren aus dem Systeme für $\varphi(y, x)$, daher aus dem Systeme (21.) hat. Da hier $g(y_1, s, x)$ im Bereiche s unzerlegbar, so ist in IV(15.) entweder h oder g' nullter Ordnung. h sei nullter Ordnung. Nach dem Satze, der Abh. Bd. 96 No. 8 Ca) (vergl. hier II Bb) entspricht, ist in IV (16.) $g''(y', s, x)$ ein in dem Bereiche s normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor aus $g(y_1, s, x)$. Daher ist der Differentialausdruck $\chi(y, x)$ in IV(18.) ein normaler Differentialausdruck mit demselben determinirenden Factor. g' sei nullter Ordnung, daher auch χ in IV(18.). Dann ist der determinirende

Factor in $g(y_1, s, x)$ unter denen in dem System für $f_1(y_1, s, x)$ enthalten, nach dem Satze, der Abh. Bd. 96 No. 8 IIBb entspricht.

Damit ist der behauptete Satz auch bewiesen für die Differentialgleichung, deren Differentialausdruck durch das System

$$(22.)\qquad f_{\alpha_0}(y, s, x) = y_1,\quad f_{\alpha_1}(y_1, s, x) = y_2,\ \ldots, f_{\alpha_h}(y_h, s, x)$$

gegeben ist, und demnach allgemein.

Durch Verbindung dieses Satzes mit dem Satze in III erhält man also das Resultat:

Die homogene lineare Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$, die in den Coefficienten rational die unabhängige Variable x und die irreductibele algebraische Function s enthält, habe zur Connexdifferentialgleichung $\Phi_N(y, x) = 0$. Ist $\Phi_N(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, so ist $F_m(y, s, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Diejenigen determinirenden Factoren in dem Systeme für $F_m(y, s, x)$, welche unter einander verschieden sind, bilden die verschiedenen determinirenden Factoren in dem Systeme für $\Phi_N(y, x)$.

VI.

a) In Abhandlung Bd. 121 dieses Journals ist die Integration der Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$, bei welcher der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, auf die Integration von $\Phi_N(y, x) = 0$ zurückgeführt; desgleichen die Integration der nichthomogenen Differentialgleichung, worin $F_m(y, s, x)$ der Differentialausdruck ist.

Nach dem Satze in V hat $F_m(y, s, x)$ die Darstellung durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke. Bei den unter einander verschiedenen determinirenden Factoren dieses Systemes e^W sei aus der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function von x W der Theil herausgenommen, der in einem singulären Punkte $x = a$ von $F_m = 0$ unendlich wird, $w\left(\frac{1}{x-a}\right)$, wo w gleich Null, wenn in $x = a$ W nicht unendlich wird. Die hierdurch aus den determinirenden Factoren hervorgehenden verschiedenen Ausdrücke seien $e^{w_\gamma\left(\frac{1}{x-a}\right)}$. Nun sei bei $x = a$ ein R-blättriger Windungspunkt von s, wo $R \geqq 1$ ist, und es werde die Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ in F_m eingeführt, wodurch $F_m = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m$. Werden nun aus

$G_m(y, s, \zeta) = 0$ die fundamentalen determinirenden Factoren bei $\zeta = 0$ bestimmt, so ergiebt sich nach Abh. Bd. 96 No. 3 (12.) unter Anwendung der Relation II(5.) (6.), dass dieses die Grössen $e^{w_\gamma(\zeta^{-R})}$ sind.

Nachdem daher in dieselben für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt ist, müssen die Grössen $e^{w_\gamma\left(\frac{1}{x-a}\right)}$ hervorgehen. *Diese sind also bei allen ein- oder mehrblättrigen Windungspunkten bei $x = a$ ein und dieselben Ausdrücke; und bei dem einzelnen dieser Ausdrücke ist immer dieselbe Anzahl der Wurzeln der nach Einführung von ζ zugehörigen Exponentengleichung vorhanden; deren Gesammtanzahl gleich m.* Entsprechend bei $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$.

Es ist also zunächst bei $F_m(y, s, x) = 0$ zu prüfen, ob bei den singulären Punkten die angegebene Eigenschaft vorhanden ist. Ergiebt sich etwa bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ nur ein einziger von x abhängender fundamentaler determinirender Factor, so ist $F_m(y, s, x)$ selbst im Bereiche s normal und der determinirende Factor das Product jener fundamentalen determinirenden Factoren.

Die genannten Grössen $e^{w_\gamma\left(\frac{1}{x-a}\right)}$ werden nach Satz V die fundamentalen determinirenden Factoren bei $x = a$ in $\Phi_N(y, x) = 0$. Wird in $\Phi_N(y, x) = 0$ $x - a = \zeta^R$ gesetzt, so müssen unter den Wurzeln der Exponentengleichung, die zu dem fundamentalen determinirenden Factor $e^{w_\gamma(\zeta^{-R})}$ gehört, die Wurzeln der Exponentengleichung von $G_m(y, s, \zeta) = 0$, die zu demselben fundamentalen determinirenden Factor gehört (abgesehen von zu addirenden ganzen Zahlen) vorkommen. Aus Abh. Bd. 121 No. 5 IIIA folgt: Wird jede dieser Wurzeln durch ϱ bezeichnet, die Reihe $\frac{\varrho}{R}, \frac{\varrho+1}{R}, \cdots, \frac{\varrho+R-1}{R}$ gebildet, das Entsprechende bei jedem Windungspunkte bei $x = a$ in $F_m(y, s, x) = 0$ vorgenommen, so darf $\Phi_N(y, x) = 0$ nur aus den genannten Reihen Exponenten der Integrale (abgesehen von zu addirenden ganzen Zahlen) bei $x = a$ liefern. Ebenso bei $x = \frac{1}{t}$, $t = 0$. *Auf diese Eigenschaften ist also $\Phi_N(y, x)$ zunächst zu prüfen.*

b) Die homogene lineare Differentialgleichung $F_m = 0$ mit algebraischen Coefficienten enthalte in den Coefficienten rational mehrere irreductibele algebraische Functionen, etwa u, v, w. Es sollen alle Combinationen der Zweige von u, v, w in Zusammenhang stehen (z. B. ist dieses der Fall, wenn die Grade der irreductibelen Gleichungen von u, v, w relative Primzahlen sind). Die Coefficienten in F_m erhalten die Form $\frac{H(x,u,v,w)}{K(x)}$, wo H und K ganze rationale Ausdrücke der eingehenden Variablen, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Die Zweige von u, v, w seien nun rational durch x und eine irreductibele algebraische Function s ausgedrückt mit so vielen Zweigen, als Combinationen vorhanden sind (Abh. Bd. 119 No. 1). F_m hat unter der über die Connexdifferentialgleichung gemachten Voraussetzung die Darstellung durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke. In diesen Ausdrücken sei für s wieder $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w$ gemäss Abh. Bd. 119 No. 1 (10.) eingesetzt. Aus dieser Darstellung ergiebt sich nun auf dieselbe Weise wie in a), wenn bei einem singulären Punkte $x = a$ von $F_m = 0$ bei einem Complex von R zusammenhängenden Combinationen der Zweige von u, v, w, wo $R \geqq 1$ ist, die Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ eingeführt wird, wodurch $F_m = \left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{-m} G_m$, alsdann aus $G_m(y, u, v, w, \zeta) = 0$ die fundamentalen determinirenden Factoren bei $\zeta = 0$ bestimmt werden und in diese für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ gesetzt wird, so erhält man *bei allen solchen Complexen bei $x = a$ dieselben Ausdrücke, und bei dem einzelnen dieser Ausdrücke immer dieselbe Anzahl der Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichung, deren Gesammtzahl gleich m. Daraufhin ist also zunächst*

$$F_m(y, u, v, w, x) = 0$$

bei den singulären Punkten zu prüfen. Ebenso gilt in Bezug auf $\Phi_N(y, x) = 0$ bei $x = a$ das in a) Gesagte.

c) Die homogene lineare Differentialgleichung $F_m = 0$ habe algebraische Coefficienten unter der Form $\frac{H(x,u,v,w)}{K(x)}$, wie in b), es sollen aber nicht alle Combinationen der Zweige von u, v, w in Zusammenhang stehen. Die Connexdifferentialgleichung von $F_m = 0$ sei $\Phi_N(y, x) = 0$. Die Zweige u, v, w einer Combination und die mit dieser zusammenhängenden Combinationen seien durch eine irreductible Function s und x nach Abh. Bd. 119 No. 1 ausgedrückt und es sei von jeder solchen Differentialgleichung die Connexdifferentialgleichung aufgestellt. Ist jeder der hierdurch hervorgehenden Differentialausdrücke durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, so auch $\Phi_N(y, x)$ und umgekehrt (Abh. Bd. 96 No. 8 IIB, C).

2.

Homogene lineare Differentialgleichung, deren Integral eine homogene lineare Verbindung mit gegebenen Coefficienten des Integrals einer anderen homogenen linearen Differentialgleichung und seiner Ableitungen ist.

Bei einer vorgelegten homogenen linearen Differentialgleichung wird aus dem Integrale derselben und seinen Ableitungen ein homogener linearer Ausdruck mit Coefficienten, die gegebene Functionen der unabhängigen Variablen sind, gebildet und untersucht. (In Betreff der Litteratur über diesen Gegenstand vergl. *Schlesinger,* Handbuch der Theorie der linearen Differential gleichungen 2. Band I S. 119, 349.)

I.

In der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$, nämlich

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

sollen die Coefficienten p in einem einblättrigen einfach zusammenhängenden Gebiete von x als einwerthige Functionen betrachtet worden. Wenn diese Coefficienten rational x und eine irreductibele algebraische Function s von x enthalten, so wird jeder einzelne Zweig derselben genommen.

Nun wird die Function z durch folgenden Ausdruck aufgestellt:

$$z = a_0 y + a_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, \tag{2.}$$

wo y ein Integral aus (1.) ist, die Coefficienten a in dem betrachteten Gebiete von x gegebene einwerthige Functionen von x sind; wenn diese Coefficienten rational x und die algebraische Function s enthalten, so wird derselbe Zweig von s wie in den Coefficienten p genommen. a_{m-1} und Coefficienten a mit niedrigerem Stellenzeiger. können auch Null sein. Durch Differentiation von z ergiebt sich, indem die Ableitungen von y, die höher als die $(m-1)$-te sind, vermittelst (1.) durch die niedrigeren ausgedrückt werden:

$$\frac{d^r z}{dy^r} = a_0^{(r)} y + a_1^{(r)} \frac{dy}{dx} + \cdots + a_{m-1}^{(r)} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}. \tag{3.}$$

Die Determinante der a aus (2.) und (3.) für $r = 1, \ldots, m-1$ soll ***nicht identisch gleich Null sein.*** Dieselbe sei durch $D(a)$ bezeichnet.

Alsdann ergiebt sich aus (2.) und (3.) für $r = 1, \ldots, m$ die Differentialgleichung für z $G_m(z, x) = 0$, nämlich

$$\frac{d^m z}{dx^m} + q_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + q_m z = 0, \tag{4.}$$

worin die Coefficienten q rationale Ausdrücke der p (1.), und der a (2.) und Ableitungen dieser Grössen sind.

Es seien m linearunabhängige Integrale von (1.) y_1, y_2 bis y_m. Die Determinante derselben und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen sei $D(y)$. Diese Integrale y_1 bis y_m werden in (2.) eingesetzt, die sich ergebenden Grössen seien z_1, z_2 bis z_m. Die Determinante dieser Functionen und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen sei $D(z)$. Dann folgt aus (2.) und (3.) für $r = 1,\ldots,m-1$

$$D(z) = D(a)D(y). \tag{5.}$$

Die Determinanten $D(a)$ und $D(y)$ sind nicht identisch gleich Null, desgleichen also $D(z)$; die Integrale z_1, z_2 bis z_m von (4.) sind linearunabhängig.

Aus (2.) und (3.) für $r = 1,\ldots,m-1$ folgt durch Umkehrung

$$y = b_0 z + b_1 \frac{dz}{dx} + \cdots + b_{m-1} \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}, \tag{6.}$$

die Coefficienten b setzen sich rational aus den p (1.), den a (2.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen. Dem Ausdrucke $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$, worin die c willkürliche Constanten, entspricht gemäss (2.) der Ausdruck $z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_m z_m$. Also entspricht jedem Integrale der Differentialgleichung (1.) vermöge der Relation (2.) ein Integral der Differentialgleichung (4.) und umgekehrt jedem Integrale von (4.) vermöge der Relation (6.) ein Integral von (1.). Durch Differentiation von y (6.) ergiebt sich vermittelst der Differentialgleichung (4.)

$$\frac{d^r y}{dx^r} = b_0^{(r)} z + b_1^{(r)} \frac{dz}{dx} + \cdots + b_{m-1}^{(r)} \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}}. \tag{7.}$$

Die Determinante der b aus (6.) und (7.) für $r = 1,\ldots,m-1$ sei durch $D(b)$ bezeichnet. Aus (6.) und (7.) folgt

$$D(y) = D(b)D(z). \tag{8.}$$

Daher ist $D(b)$ nicht identisch gleich Null.

II.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ in (1.) sei dargestellt durch das System

$$F_{m-k}(y, x) = y', \quad f_k(y', x), \tag{9.}$$

wo $F_{m-k}(y, x)$ der Differentialausdruck

$$\frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} + p_1^{(1)} \frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}} + \cdots + p_{m-k}^{(1)} y \tag{10.}$$

ist, $f_k(y', x)$ der Differentialausdruck

$$(11.)\qquad \frac{d^k y'}{dx^k}+p_1^{(2)}\frac{d^{k-1}y'}{dx^{k-1}}+\cdots+p_k^{(2)}y'.$$

Die Coefficienten $p^{(1)}$ in (10.) sollen in dem betrachteten Gebiete von x einwerthig sein; wenn dieselben rational x und die algebraische Function s aus den p in (1.) enthalten, so wird in $p^{(1)}$(10.) und p(1.) derselbe Zweig von s genommen. Die Coefficienten $p^{(2)}$ in (11.) setzen sich rational aus den p in (1.), den $p^{(1)}$ in (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen.

Die Differentialgleichung $F_{m-k}(y, x) = 0$ habe als $m-k$ linearunabhängige Integrale y_1, y_2 bis y_{m-k}. Wird für y in (2.) $y_\alpha (\alpha = 1, \dots, m-k)$ eingesetzt, so ergiebt sich $z_\alpha(\alpha=1,\dots,m-k)$. Die $m-k$ Functionen $z_\alpha(\alpha=1,\dots,m-k)$ sind linearunabhängig (vergl. (5.)). Der Ausdruck (2.) wird vermittelst $F_{m-k}(y, x) = 0$ auf die Form

$$(12.)\qquad z = A_0 y + A_1\frac{dy}{dx}+\cdots+A_{m-k-1}\frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}}$$

gebracht, wo die Coefficienten A sich rational aus den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen. Aus (12.) ergiebt sich durch Differentiation vermittelst $F_{m-k}(y, x) = 0$:

$$(13.)\qquad \frac{d^r z}{dx^r} = A_0^{(r)} y + A_1^{(r)}\frac{dy}{dx}+\cdots+A_{m-k-1}^{(r)}\frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}}.$$

Die Determinante der Coefficienten A aus (12.) und (13.) für $r = 1, \dots, m-k-1$ sei durch $\Delta(A)$ bezeichnet, die Determinante der linearunabhängigen Functionen y_1 bis y_{m-k} und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch $\Delta(y)$, die der linearunabhängigen Functionen z_1 bis z_{m-k} und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen durch $\Delta(z)$. Dann folgt aus (12.) und (13.) für $r = 1, \dots, m-k-1$

$$(14.)\qquad \Delta(z) = \Delta(A)\Delta(y).$$

Daher ist $\Delta(A)$ nicht identisch gleich Null. Alsdann ergiebt sich aus (12.) und (13.) für $r = 1, \dots, m-k$ die Differentialgleichung $G_{m-k}(z, x) = 0$ nämlich

$$(15.)\qquad \frac{d^{m-k}z}{dx^{m-k}}+q_1^{(1)}\frac{d^{m-k-1}z}{dx^{m-k-1}}+\cdots+q_{m-k}^{(1)}z = 0,$$

worin die Coefficienten q rationale Ausdrücke der a (2.), der $p^{(1)}$(10.) und Ableitungen dieser Grössen sind.

Aus (12.) und (13.) für $r = 1, \dots, m-k-1$ folgt durch Umkehrung

$$(16.)\qquad y = B_0 z + B_1\frac{dz}{dx}+\cdots+B_{m-k-1}\frac{d^{m-k-1}z}{dx^{m-k-1}},$$

wo die Coefficienten B sich rational aus den a (2.), den $p^{(1)}$(10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen. Da aus $c_1 y_1 + \cdots + c_{m-k} y_{m-k}$, wo die c willkürliche Constanten sind, gemäss (12.) $c_1 z_1 + \cdots + c_{m-k} z_{m-k}$ folgt, so entspricht jedem Integral von $F_{m-k}(y, x) = 0$ (10.) vermöge (12.) ein Integral von $G_{m-k}(z, x) = 0$ (15.) und umgekehrt jedem Integral von $G_{m-k}(z, x) = 0$ vermöge (16.) ein Integral von $F_{m-k}(y, x) = 0$. Aus (16.) folgt vermittelst der Differentialgleichung (15.)

$$(17.)\qquad \frac{d^r y}{dx^r} = B_0^{(r)} z + B_1^{(r)} \frac{dz}{dx} + \cdots + B_{m-k-1}^{(r)} \frac{d^{m-k-1} z}{dx^{m-k-1}}.$$

Die Determinante der B aus (16.) und (17.) für $r = 1, \ldots, m-k-1$ sei durch $\Delta(B)$ bezeichnet. Dann ergiebt sich aus (16.) und (17.)

$$(18.)\qquad \Delta(y) = \Delta(B)\Delta(z).$$

Daher ist $\Delta(B)$ nicht identisch gleich Null.

Der Differentialausdruck $G_m(z, x)$ aus (4.) wird nun dargestellt durch das System

$$(19.)\qquad G_{m-k}(z, x) = z', \quad g_k(z', x),$$

wo $G_{m-k}(z, x)$ der Differentialausdruck aus (15.), $g_k(z', x)$ der Differentialausdruck ist

$$(20.)\qquad \frac{d^k z'}{dx^k} + q_1^{(2)} \frac{d^{k-1} z'}{dx^{k-1}} + \cdots + q_k^{(2)} z',$$

worin die Coefficienten $q^{(2)}$ sich rational aus den q (4.), den $q^{(1)}$ (15.) und ihren Ableitungen, demnach rational aus den p (1.), den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammensetzen.

III.

In

$$(21.)\qquad F_{m-k}(y, x) = y'$$

(9.) seien für y die Integrale y_{m-k+s} $(s = 1, \ldots, k)$ eingesetzt, welche mit den Integralen y_1 bis y_{m-k} von $F_{m-k}(y, x) = 0$ ein System von m linearunabhängigen Integralen von $F_m(y, x) = 0$ (1.) bilden. Hierdurch ergebe sich

$$(22.)\qquad F_{m-k}(y_{m-k+s}, x) = y'_s, \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Die Functionen $y'_s (s = 1, \ldots, k)$ sind k linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung $f_k(y', x) = 0$ (11.). Wenn für y in dem Ausdrucke (2.) die Functionen $y_{m-k+s} (s = 1, \ldots, k)$ gesetzt werden, so ergeben sich die Functionen $z_{m-k-s} (s = 1, \ldots, k)$, welche mit den Integralen z_1 bis z_{m-k} von $G_{m-k}(z, x) = 0$

(15.) ein System von m linearunabhängigen Integralen von $G_m(z,x)=0$ (4.) bilden. In

$$(23.)\qquad G_{m-k}(z,x)=z'$$

(19.) seien für z die Integrale $z_{m-k+s}(s=1,\ldots,k)$ eingesetzt, so ergebe sich

$$(24.)\qquad G_{m-k}(z_{m-k+s},x)=z'_s,\quad (s=1,\ldots,k).$$

Die Functionen $z'_s(s=1,\ldots,k)$ sind k linearunabhängige Integrale der Differentialgleichung $g_k(z',x)=0$ (20.).

In $G_{m-k}(z,x)$ wird für z der Ausdruck (2.) eingesetzt, so entsteht aus (23.) vermittelst der Differentialgleichung (1.)

$$(25.)\qquad z'=h_0y+h_1\frac{dy}{dx}+\cdots+h_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}.$$

Dieser Ausdruck geht vermittelst (21.) über in

$$(26.)\qquad \left\{\begin{aligned} z' &= a'_0y'+a'_1\frac{dy'}{dx}+\cdots+a'_{k-1}\frac{d^{k-1}y'}{dx^{k-1}}\\ &\quad +l_0y+l_1\frac{dy}{dx}+\cdots+l_{m-k-1}\frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}}.\end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (26.) wird erfüllt durch $y=y_\alpha(\alpha=1,\ldots,m-k)$, $y'=z'=0$. Daher müssen die Coefficienten l in der aus (26.) durch $y'=z'=0$ hervorgehenden Differentialgleichung, die höchstens $(m-k-1)$-ter Ordnung wäre, identisch verschwinden. Wird in (25.) $y=y_{m-k+s}(s=1,\ldots,k)$ eingesetzt, so folgt, dass (26.) durch $z'=z'_s$ (24.) $y'=y'_s$ (22.) erfüllt wird.

Es besteht also der Zusammenhang

$$(27.)\qquad z'=a'_0y'+a'_1\frac{dy'}{dx}+\cdots+a'_{k-1}\frac{d^{k-1}y'}{dx^{k-1}}$$

zwischen dem Integrale y'_s von $f_k(y',x)=0$ und z'_s von $g_k(z,x)=0(s=1,\ldots,k)$. Die Coefficienten a' setzen sich rational aus den p (1.), den a (2.), den $p^{(1)}$ (10.) und Ableitungen dieser Grössen zusammen.

Aus (27.) erfolgt durch Differentiation vermittelst $f_k(y',x)=0$

$$(28.)\qquad \frac{d^rz'}{dx^r}=a'^{(r)}_0y'+a'^{(r)}_1\frac{dy'}{dx}+\cdots+a'^{(r)}_{k-1}\frac{d^{k-1}y'}{dx^{k-1}}.$$

Die Determinante der Coefficienten a' aus (27.) und (28.) für $r=1,\ldots,k-1$ sei durch $D(a')$ bezeichnet, die Determinante der k linearunabhängigen Functionen y'_1 bis y'_k und ihrer $k-1$ ersten Ableitungen durch $D(y')$, die Determinante der k linearunabhängigen Functionen z'_1 bis z'_k und ihrer $k-1$

ersten Ableitungen durch $D(z')$. Dann folgt aus (27.) und (28.) für $r = 1, \ldots, k-1$

(29.) $$D(z') = D(a')D(y').$$

also ist $D(a')$ nicht identisch gleich Null.

Die Differentialgleichung $f_k(y', x) = 0$ (11.) steht daher zu der Differentialgleichung $g_k(z', x) = 0$ (20.) durch den Zusammenhang (27.) der Integrale in einer Beziehung derselben Art, wie die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) zu der Differentialgleichung $G_m(z, x) = 0$ (4.) durch den Zusammenhang (2.) der Integrale.

IV.

A) Die Coefficienten p in der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) und die Coefficienten a in der Relation (2.) seien *rationale Functionen von x.* Dann sind auch die Coefficienten q in der Differentialgleichung $G_m(z, x) = 0$ (4.) rationale Functionen von x.

Ist $F_m(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck, so folgt aus (2.), dass die Integrale z von (4.) auch regulär sind, also ist auch $G_m(z, x)$ ein regulärer Differentialausdruck.

Ist $F_m(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω, so ist $\Omega^{-1}F_m(\Omega\bar{y}, x)$ ein regulärer Differentialausdruck. Die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ sind von der Form $\Omega\bar{y}$, wo $\bar{y}$ ein reguläres Integral ist. Vermöge des Zusammenhanges (2.) werden die Integrale von $G_m(z, x) = 0$ von der Form $\Omega\bar{z}$, wo $\bar{z}$ ein reguläres Integral. Daher ist $\Omega^{-1}G_m(\Omega\bar{z}, x) = 0$ eine reguläre Differerentialgleichung und $G_m(z, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ sei durch das System (9.) dargestellt, worin $F_{m-k}(y, x)$ ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω. Dann folgt aus dem in II aufgestellten Zusammenhang (12.) zwischen den Integralen von $F_{m-k}(y, x) = 0$ und den Integralen von $G_{m-k}(z, x) = 0$ (15.) nach dem Vorhergehenden, dass auch der Differentialausdruck $G_{m-k}(z, x)$ ein normaler mit demselben determinirenden Factor Ω ist.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ sei durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt. Dann ergiebt sich durch successive Anwendung des Vorhergehenden und der Beziehung (27.), die in III zwischen den Integralen der Differentialgleichungen $f'_k(y', x) = 0$ und $g'_k(z', x) = 0$ nachgewiesen ist:

Der Differentialausdruck $G_m(z, x)$ ist durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, welches ebensoviele Bestandtheile wie das System für $F_m(y, x)$ enthält, und worin jeder Bestandtheil dieselbe Ordnung und denselben determinirenden Factor wie der Bestandtheil in dem Systeme für $F_m(y, x)$ hat, der an derselben Stelle steht.

B) Die Coefficienten p und a in I (1.) (2.) seien *rationale Ausdrücke von x und einer irreductibelen algebraischen Function s von x* (die in den p oder a auch fehlen darf). Dann ergiebt sich in derselben Weise, wie in A):

$F_m(y, x)$ (1.) *sei durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke* (s. No. 1 II) *darstellbar, so ist $G_m(z, x)$* (4.) *ebenfalls durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar, und die beiden Systeme enthalten gleich viele Bestandtheile, die Bestandtheile in den beiden Systemen, die an derselben Stelle stehen, stimmen in Ordnung und determinirendem Factor überein.*

3.

Rückblick auf die in diesem Journal von dem Verfasser veröffentlichten Abhandlungen über lineare Differentialgleichungen.

Es soll im Anschluss an die Uebersicht, welche der Verfasser in Bd. 96 dieses Journals über seine bis dahin erschienenen Abhandlungen zur Theorie der linearen Differentialgleichungen gegeben hat, im Nachstehenden ein Rückblick auf die gesammten von dem Verfasser in diesem Journale veröffentlichten Arbeiten über lineare Differentialgleichungen mit ein- oder mehrwerthigen algebraischen Coefficienten geworfen werden.

I.

In der Einleitung zu der genannten Uebersicht im 96-ten Bande dieses Journals ist hervorgehoben, dass bei den homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten und nur regulären Integralen zur Aufstellung der Integrale bei den *singulären* Punkten keine *speciellen* Convergenzbetrachtungen erforderlich sind, und dass dasselbe von denjenigen homogenen linearen Differentialgleichungen mit *rationalen* Coefficienten gilt, deren Differentialausdruck *durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist* (vgl. die hier vorliegende Abhandlung No. 1 IIA).

Es ist (Abh. Bd. 96) auseinandergesetzt, wie sich bei einem gegebenen homogenen linearen Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten *vermittelst algebraischer Operationen* ermitteln lässt, ob derselbe durch ein

System normaler Differentialausdrücke dargestellt werden kann, und welches eine solche Darstellung ist. Von einem Differentialausdrucke dieser Art giebt es eine canonische Form der Darstellung.

Die Integrale einer Differentialgleichung mit einem solchen Differentialausdrucke bei den singulären Punkten werden durch Systeme normaler Elementarintegrale gegeben (vgl. Abh. Bd. 96, Einleitung). *Die Exponenten und die Coefficienten in den Ausdrücken der normalen Elementarintegrale hängen algebraisch mit den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung zusammen.* Aus einem Systeme normaler Elementarintegrale erfolgt der Ausdruck der darzustellenden Function vermittelst *bestimmter Integrale,* die über die Peripherie des Einheitskreises erstreckt sind, welche dazu dienen, eine unbestimmte Integration, die an einer Function vorzunehmen ist, auszudrücken, wobei diese Function, deren unabhängige Variable mit der Integrations-Variablen multiplicirt ist, wieder unter dem Integralzeichen erscheint. Diese bestimmten Integrale, deren Werthe in den Entwickelungen sich unmittelbar ergeben, treten als Durchgang auf zu den Reihenentwickelungen, zur Werthberechnung mit vorgeschriebener Annäherung und zu den Ausdrücken der Constanten bei der Fortsetzung.

Das bezügliche Verfahren ist an der Differentialgleichung 2-ter Ordnung in Abhandlung des Verfassers Bd. 117 dieses Journals ausführlich auseinandergesetzt. Weitere Zusätze finden sich Bd. 100 über Convergenz und Divergenz der Potenzreihe auf dem Convergenzkreise, Bd. 119 No. 3 in Betreff Aufstellung der Untergruppen in einer Gruppe von Integralen bei einem singulären Punkte, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden und in der vorliegenden Abhandlung No. 2.

II.

Von der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist Anwendung gemacht auf die algebraischen Functionen in den Abhandlungen des Verfassers Bd. 104, 108, 112 dieses Journals.

Zu einer beliebigen irreductibelen oder reductibelen algebraischen Gleichung mit ganzen rationalen Functionen einer unabhängigen Variablen als Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Potenz der abhängigen Variablen gleich Eins, deren Discriminante nicht identisch verschwindet, gehört eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die Functionszweige, die durch die algebraische Gleichung gegeben sind, genügen, und deren Ordnung mit der Anzahl der linearunabhängigen Zweige übereinstimmt. Diese Differentialgleichung ist hergeleitet (Abh. Bd. 104 No. 1 bis 4, Bd. 112 No. 3. 4), die Constanten in den rationalen Coefficienten derselben setzen sich rational aus den Constanten der algebraischen Gleichung zusammen (Abh. Bd. 112 No. 3).

Rational aus der gegebenen (irreductibelen oder reductibelen) algebraischen Function und der unabhängigen Variablen lässt sich eine algebraische Function mit unter einander verschiedenen Zweigen, welche daher wie die gegebene algebraische Function verzweigt ist, herstellen, deren Zweige alle unter einander linearunabhängig sind, und deren Gleichung Constanten enthält, die rational aus den Constanten der ursprünglichen Gleichung hervorgehen (Abh. Bd. 108 No. 2, 4, Bd. 112 No. 1). Für diese hergeleitete algebraische Function wird die vorhin genannte homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten aufgestellt, welcher die Zweige genügen, deren Ordnung mit der Anzahl der Zweige übereinstimmt (l. c.). Dann kann man aus den Wurzeln ihrer Exponentengleichung, welche rationale Zahlen sind, an jeder Stelle, wo Verzweigungen eintreten können, die Ordnungen der Verzweigungen vor Entwickelung der Zweige ersehen. (Abh. Bd. 104 No. 5, Bd. 108 No. 3, Bd. 112 Einleitung.) Durch die Ordnungen der Verzweigungen lässt sich in vielen Fällen direct erkennen, ob die vorgelegte algebraische Function irreductibel ist (Bd. 112 Einleitung), sonst wird um dieses zu ersehen oder das Gleichungspolynom zu zerlegen, das in Abh. Bd. 104 No. 1 beschriebene Verfahren angewandt.

Der Ausdruck der Zweige der ursprünglichen algebraischen Function an einer Stelle, wo die Gleichung mehrfache Wurzeln hat oder bei dem Punkte im Unendlichen wird durch homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten von Integralen der oben genannten zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung, gegeben. Um diese constanten Coefficienten zu bestimmen, sind die Reihenentwickelungen der Zweige bis zu einem bestimmten Gliede vorzunehmen. Diese Reihenentwickelungen werden, da die Ordnungen der Verzweigungen, oder auch die Exponenten der Integrale der genannten Differentialgleichung als rationale Zahlen bekannt sind, unter Anwendung einer hieraus hervorgehenden Substitution für die unabhängige Variable durch ein directes Verfahren aus der algebraischen Gleichung bis zu irgend welchem Gliede erhalten (Abh. Bd. 104 No. 8, Bd. 112 No. 2).

Die zusammenhängenden Zweige sind dann durch eine homogene lineare Verbindung mit bekannten constanten Coefficienten von Integralen der zugehörigen Differentialgleichung dargestellt. Für die Coefficienten in den Entwickelungen dieser Integrale bestehen fertige Recursionsformeln mit constanter Anzahl der Glieder. Die Constanten in diesen Recursionsformeln setzen sich rational aus dem Punkte, bei dem entwickelt wird, und den Constanten in der ursprünglichen algebraischen Gleichung zusammen (Abh. Bd. 104 No. 6, No. 7; Bd. 112 No. 3). Vermittelst derselben Differentialgleichung ergiebt sich die Fortsetzung der Zweige (Abh. Bd. 104 No. 9).

III.

Die nichthomogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten in dem Differentialausdrucke ist in der Abhandlung des Verfassers Bd. 107 behandelt. Die dort vorkommende Differentialgleichung hat zum Differentialausdruck einen solchen, der durch ein System normaler Differentialausdrücke (vgl. I) darstellbar ist. Der zweite Theil der Differentialgleichung besteht aus einer Summe, von welcher der einzelne Summand das Product zweier Functionen ist, die eine derselben genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Differentialausdruck selbst durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist — dort ist besonders eine algebraische Function in Betracht gezogen — die andere ist eine allenthalben einwerthige analytische Function. Letztere soll selbst ein Product sein, dessen Factoren eine rationale Function und solche einwerthigen Functionen in endlicher Anzahl sind, von denen die einzelne einer bekannten homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und einem einzigen irregulären Punkte genügt, und die Entwickelung derselben bei einem anderen Punkte gegeben ist. Die Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung, welche aus der betrachteten nichthomogenen Differentialgleichung dadurch, dass an Stelle des zweiten Theiles Null gesetzt wird, entsteht, werden durch Systeme normaler Elementarintegrale aufgestellt. Alsdann wird zur Integration der nichthomogenen Differentialgleichung die Methode der successiven Integrationen vermittelst integrirender Factoren angewandt. Der Ausdruck der Integrale erfolgt unter Anwendung der in I genannten bestimmten Integrale und die weitere Untersuchung ist der in I vorkommenden analog.

IV.

Die lineare Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale Ausdrücke der unabhängigen Variablen und einer oder mehrerer irreductibelen algebraischen Functionen derselben sind, ist in den Abhandlungen des Verfassers Bd. 115, 119, 121 und in der vorliegenden Abhandlung untersucht.

Der Coefficient der höchsten Ableitung in der Differentialgleichung ist immer gleich Eins genommen. In den Gleichungen der algebraischen Functionen mit ganzen rationalen Functionen der unabhängigen Variablen als Coefficienten, kann der Coefficient der höchsten Potenz der Function gleich Eins vorausgesetzt werden. In der Differentialgleichung sollen die Nenner in den rationalen Ausdrücken der Coefficienten, wenn mehrere algebraische Functionen vorkommen, bei keiner Combination der Zweige derselben identisch verschwinden. Diese Coefficienten erhalten alsdann die Form eines Bruches, dessen Zähler eine ganze rationale Function der unabhängigen Variablen und der irreductibelen algebraischen Functionen, dessen Nenner eine ganze rationale Function der unabhängigen Variablen ist. Die singulären Punkte der homogenen linearen Differentialgleichung sind die Werthe der unabhängigen Variablen, für welche die Nenner in den Coefficienten der Differentialgleichung verschwinden, die Punkte, in denen die Discriminanten der Gleichungen der algebraischen Functionen verschwinden und der Punkt im Unendlichen. Durch die singulären Punkte wird in der Ebene der unabhängigen Variablen, diese Ebene als einblättrige Fläche betrachtet, eine sich selbst nicht schneidende in sich zurücklaufende Linie gezogen. An Stelle jedes der beiden hierdurch erhaltenen Gebiete treten dann soviele Blätter, die Bereiche der unabhängigen Variablen sind, als Combinationen von Zweigen der in den Coefficienten der Differentialgleichung enthaltenen algebraischen Functionen, bezüglich wenn nur eine solche Function vorkommt, als Zweige derselben vorhanden sind, indem dieselben jenen Blättern zugeordnet werden. Innerhalb jedes dieser Bereiche verläuft ein Integral einwerthig und stetig. Von den singulären Punkten im Endlichen aus seien Linien, welche sich selbst und unter einander nicht schneiden, ins Unendliche gezogen. Man kann, wenn mehrere algebraische Functionen in den Coefficienten vorkommen, diejenigen Combinationen der Zweige, welche über diese Linien hinüber unter einander zusammenhängen, ermitteln, indem man die Zweige in einer Combination rational durch die unabhängige Variable und eine andere irreductibele algebraische Function ausdrückt, deren Zweige den verschiedenen und unter einander zusammenhängenden Combinationen entsprechen. Die bezüglichen Ausdrücke sind Abh. Bd. 119 No. 1 aufgestellt; die eingehenden Constanten hängen algebraisch mit den ursprünglichen

Constanten zusammen. Dadurch, dass letztere Ausdrücke in die Coefficienten der Differentialgleichung eingeführt werden, kann man überhaupt jede Combination der Zweige der ursprünglichen algebraischen Functionen in Betracht ziehen, für welche die Nenner in den rationalen Ausdrücken der Coefficienten der Differentialgleichung nicht identisch verschwinden. Auf diese Weise erhält man an Stelle der ursprünglichen Differentialgleichung eine oder mehrere, von denen jede nur eine einzige algebraische Function in den Coefficienten enthält. Die Behandlung des ursprünglichen Falles, wo eine oder mehrere algebraische Functionen in den Coefficienten der Differentialgleichung vorkommen und die Nenner in den Coefficienten bei keiner Combination der Zweige identisch verschwinden, ist jedoch erforderlich, um bei einem Typus von Differentialgleichungen unmittelbar aus den Coefficienten die Regularität der Integrale zu erkennen (Abh. Bd. 115 No. 5). Wenn bei einem einzelnen singulären Punkte — falls das Schema von drei algebraischen Functionen u, v, w betrachtet wird — die Zweige eines λ-blättrigen Windungspunktes bei u, eines μ-blättrigen bei v, eines ν-blättrigen bei w (wobei auch der einblättrige Windungspunkt zugelassen ist) combinirt werden, und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von λ, μ, ν durch R bezeichnet wird, so giebt es $\frac{\lambda\mu\nu}{R}$ Complexe von je R um diesen Punkt unter einander zusammenhängenden Combinationen der Zweige. Die Entwickelungen der Zweige eines Complexes bei dem Punkte a hängen, wenn die unabhängige Variable durch x bezeichnet ist, von $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ ab und sind Potenzreihen dieser Grösse mit positiven ganzzahligen Exponenten. Wird dieselbe Substitution in die Differentialgleichung eingeführt, so ergeben sich deren Coefficienten als einwerthige Functionen von ζ. Es sei ein System linearunabhängiger Integrale letzterer Differentialgleichung bei $\zeta = 0$ aufgestellt, alsdann in dasselbe für ζ wieder $(x-a)^{\frac{1}{R}}$ eingeführt, so erhält man hierdurch für jede der R Combinationen des Complexes ein System linearunabhängiger Integrale der ursprünglichen Differentialgleichung. Jedes dieser Systeme geht bei einem Umgange um den Punkt $x = a$ in ein folgendes über, ein Endsystem in eine homogene lineare Verbindung mit constanten Coefficienten der Integrale des anderen Endsystems (Abh. Bd. 115 No. 3). Wenn nun durch die singulären Punkte eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurücklaufende Linie in der Ebene der unabhängigen Variablen, als einblättriger Fläche, gezogen wird, so ist in einem der beiden hierdurch erhaltenen Gebiete in jedem Blatte, welches einer Combination von Zweigen der algebraischen Functionen entspricht, bei jedem singulären Punkte ein System linearunabhängiger Integrale aufzustellen. Der Uebergang in den Integralen von einem singulären Punkte zu einem anderen in demselben Blatte geschieht analog dem Verfahren in I. (Abh. Bd. 115 No. 3). Durch Zusammensetzung der Substitutionen bei den Umgängen um die singulären Punkte und den Uebergängen von dem einem zu dem anderen dieser Punkte erfolgt die Fortsetzung der Integrale. Bei einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten ist über den zweiten Theil die Voraussetzung aus Abh. Bd. 107 (s. III) gemacht. Es ist alsdann unter Anwendung des Vorhergehenden ein Integral für jede Combination eines Complexes, während der zweite Theil eine und dieselbe Grösse bleibt, aufzustellen (Abh. Bd. 115 No. 4).

Die homogene lineare Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten und nur regulären Integralen wird als solche aus den Coefficienten erkannt (Abh. Bd. 115 No. 5), deren Differentialausdruck heisst ein regulärer. Dieselbe gestattet unter Anpassung der Methoden, die für reguläre lineare Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten gelten, eine directe Behandlung (Abh. Bd. 115 No. 6). Ebenso ist es bei einer nichthomogenen linearen Differentialgleichung mit regulärem Differentialausdrucke, wobei zur Integration die Methode der successiven Integrationen vermittelst integrirender Factoren angewandt ist. (Abh. Bd. 115 No. 7.)

Für die allgemeine Behandlung der linearen Differentialgleichungen mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten ist Folgendes wesentlich. Es soll eine homogene lineare Differentialgleichung vorliegen, deren Coefficienten rationale Ausdrücke der unabhängigen Variablen und einer oder mehrerer irreductibelen algebraischen Functionen sind, und es sollen alle Combinationen der Zweige vorgenommen werden können, ohne dass einer der Nenner in den Coefficienten der Differentialgleichung identisch verschwindet. Wenn alsdann bei jeder in diesen Coefficienten auftretenden Combination der Zweige der algebraischen Functionen ein System linearunabhängiger Integrale der Differentialgleichung aufgestellt wird und aus allen diesen Integralen diejenigen, die unter einander linearunabhängig sind, herausgenommen werden, so erfüllen diese Integrale eine homogene lineare Differentialgleichung, deren Ordnung mit der Anzahl dieser Functionen übereinstimmt und deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variablen sind, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 (Abh. Bd. 115 No. 8). Die Ordnung dieser Differentialgleichung kann kleiner sein, als das Product aus Ordnung der ursprünglichen Differentialgleichung und Anzahl aller Combinationen der Zweige beträgt (l. c. und Abh. Bd. 119 No. 2). Das Bestehen der rationalen Coefficienten der genannten Differentialgleichung ist in Abh. Bd. 115 No. 8 nachgewiesen, da diese Coefficienten dort unter der Form rationaler Ausdrücke der Zweige der algebraischen Functionen und der unabhängigen Variablen hergeleitet sind. Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich die Darstellung derselben Coefficienten als rationaler Functionen der unabhängigen Variablen, indem nach Abh. Bd. 119 No. 2 die Zweige der algebraischen Functionen rational durch die unabhängige Variable und einen Zweig einer irreductibelen algebraischen Function ausgedrückt werden, deren Gleichung die Monodromiegruppe der zusammen betrachteten algebraischen Functionen bestimmt. Diese homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, deren Integrale die linearunabhängigen Integrale der homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten sind, welche auf algebraischem Wege aus der ursprünglichen Differentialgleichung hergeleitet wird, ist die *Connexdifferentialgleichung* von der ursprünglichen Differentialgleichung genannt worden (Abh. Bd. 121 No. 1). Die Constanten in den rationalen Coefficienten der Connexdifferentialgleichung sind rationale Ausdrücke der Constanten in der ursprünglichen Differentialgleichung, in den Gleichungen der algebraischen Functionen und in der die Monodromiegruppe dieser Functionen bestimmenden algebraischen Gleichung, welche letzteren Constanten algebraisch mit den Constanten in den Gleichungen der algebraischen Functionen zusammenhängen (Abh. Bd. 119 No. 2).

Die Connexdifferentialgleichung ist in Abh. Bd. 121 zur Untersuchung der Integrale der Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten verwandt worden für den Fall, dass der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung sich als System normaler Differentialausdrücke (vgl. I) darstellen lässt — ein besonderer Unterfall war auch schon in Abh. Bd. 115 No. 9 behandelt. Wenn die oben genannte Substitution $(x-a)^{\frac{1}{R}} = \zeta$ eingeführt wird, so stellt sich alsdann der Differentialausdruck der Connexdifferentialgleichung bei $\zeta = 0$ als ein System normaler Elementardifferentialausdrücke (vgl. Abh. Bd. 96 No. 3) dar. Dann wird der

Satz nachgewiesen, dass der Differentialausdruck einer homogenen linearen von ζ abhängenden Differentialgleichung mit bei $\zeta = 0$ einwerthigen und in $\zeta = 0$ in endlicher Ordnung unendlichen Coefficienten, deren Integrale die Connexdifferentialgleichung erfüllen — hier betrifft dies die ursprüngliche Differentialgleichung — auch durch ein System normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar ist (Abh. Bd. 121 No. 5). Hierdurch werden aus der ursprünglichen Differentialgleichung die Exponenten der Integrale bekannt. Und nun werden diese Integrale vermittelst der Integrale der Connexdifferentialgleichung mit denselben Exponenten homogen und linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt, diese Constanten werden ermittelt und die Integralausdrücke nach den in I vorkommenden Methoden behandelt (Abh. Bd. 121 No. 6, No. 7). Auch die nichthomogene lineare Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten, über deren zweiten Theil die Voraussetzungen aus III gemacht werden, kann man, wenn bei der Connexdifferentialgleichung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrucke darstellbar ist, unter Bezugnahme auf die im Vorhergehenden gemachten Angaben integriren. Hierbei kommt die Methode der Variation der Constanten zur Anwendung (Abh. Bd. 121 No. 8). —

Wenn die Constanten in der linearen Differentialgleichung mit ein- oder mehrwerthigen algebraischen Coefficienten und in den übrigen vorgelegten Gleichungen algebraische Zahlen sind, so lassen sich alle angegebenen Operationen ausführen. —

Der Beziehung, welche zwischen der ursprünglichen homogenen linearen Differentialgleichung mit mehrwerthigen algebraischen Coefficienten und der Connexdifferentialgleichung für den Fall besteht, dass der Differentialausdruck letzterer durch ein System normaler Differentialausdrücke sich darstellen lässt, ist in der vorliegenden Abhandlung No. 1 weiter untersucht. Ein homogener linearer Differentialausdruck soll in den Coefficienten rational nebst der unabhängigen Variablen x die irreductibele algebraische Function s enthalten, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Ein solcher Differentialausdruck $\bar{f}(\bar{y}, s, x)$ sei ein regulärer, derselbe ist ein in dem Bereiche s regulärer genannt worden. W sei eine rationale Function von x, welche in Partialbrüche zerlegt zum absoluten Gliede Null hat. Der Differentialausdruck $e^{W}\bar{f}(e^{-W}y, s, x)$ ist ein in dem Bereiche s normaler

Differentialausdruck genannt worden, e^W der determinirende Factor. Aus Differentialausdrücken, welche in dem Bereiche s normal sind, werde ein System gebildet (s. No. 1 II A). Nun sei $F_m(y, s, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck, welcher die unabhängige Variable x und die irreductibele algebraische Function s rational in den Coefficienten enthält, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Die Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ sei $\Phi_N(y, x) = 0$. Es besteht dann (No. 1) folgender Zusammenhang: Wenn der Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ der Connexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, so ist der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ durch ein System im Bereiche s normaler Differentialausdrücke darstellbar und umgekehrt. Die determinirenden Factoren in dem Systeme für $F_m(y, s, x)$, die unter einander verschieden sind, sind die verschiedenen determinirenden Factoren in dem Systeme für $\Phi_N(y, x)$.