Werk

Titel: Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie de...

Autor: Müller, E.

Jahr: 1900

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?243919689_0122|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ein Satz über Flächen zweiter Ordnung und seine Beziehungen zur Kreisgeometrie der Ebene.

(Von Herrn *E. Müller* in Königsberg i. Pr.)

Bei der verhältnissmässig geringen Menge von Sätzen, die uns über Flächen zweiter Ordnung bekannt sind, dürfte vielleicht der folgende Satz einiges Interesse beanspruchen:

I. *„Ist ein Tetraeder einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung eingeschrieben, und projicirt man die Pole dreier seiner Ebenen aus einem in der vierten Ebene liegenden Flächenpunkt auf die Fläche, dann liegen diese Projectionen mit demjenigen Tetraedereckpunkte, durch den die drei ersten Ebenen gehen, in einer Ebene."*

Zum Zwecke des Beweises mögen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Seitenebenen, a, b, c, d die ihnen gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders und e einen in der Ebene δ liegenden Flächenpunkt bezeichnen. δ schneidet die Fläche 2. O. F in einem Kegelschnitt. Der durch diesen aus d gelegte Kegel enthält die beiden (reellen oder imaginären) Flächenerzeugenden D, D' des Punktes d; die Polarfigur dieses Kegels ist daher ein D und D' berührender Kegelschnitt, dem das durch die Pole a', b', c' von α, β, γ bestimmte Dreiseit umschrieben ist. Dieser Kegelschnitt wird auch von der Polare der Geraden de d. i. von der Schnittlinie der Ebene DD' mit der Tangentialebene des Punktes e berührt. Schneidet diese Gerade D und D' bezüglich in den Punkten m und m', so ist dmm' ein zweites diesem Kegelschnitt umschriebenes Dreiseit. Nach einem bekannten Satze liegen dann die sechs Punkte a', b', c', d, m, m', als Eckpunkte zweier einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiseite, auf einem neuen Kegelschnitt. Nun sind aber em und em', als Verbindungslinien des Punktes e mit denjenigen Punkten, in denen seine Tangentialebene von den Flächenerzeugenden D und D' geschnitten wird, die Flächenerzeugenden des Punktes e. Der aus e durch letzteren Kegelschnitt gelegte Kegel schneidet also, weil er die beiden durch seinen Scheitel gehenden Flächenerzeugenden enthält, F in einem durch d gehenden Kegelschnitt. Damit ist der behauptete Satz bewiesen.

Wählt man die Fläche F als Kugel und überträgt die Figur, welche die im Satz I auftretenden Ebenen und Punkte auf der Kugel bestimmen, mittels stereographischer Projection auf eine Ebene, so gelangt man zu folgendem Satze über Kreise einer Ebene:

> II. „*Sind in einer Ebene vier beliebige Punkte sammt den vier durch je drei der Punkte legbaren Kreisen gegeben, und wählt man auf einem der Kreise einen beliebigen Punkt, so liegen die ihm bezüglich der drei anderen Kreise invers zugeordneten Punkte mit dem Schnittpunkt dieser drei Kreise auf einem neuen Kreise.*“

Wählt man als einen der vier Punkte den unendlich fernen, so folgt daraus der Satz:

> „Ist einem Kreise ein Dreieck eingeschrieben, so liegen die Spiegelbilder irgend eines Kreispunktes in Bezug auf die Dreiecksseiten in einer Geraden“,

der sich mit dem bekannten, angeblich *Simson*schen Satze*) deckt.

Wählt man endlich in Satz II drei der vier Punkte auf einer Geraden und als fünften Punkt den unendlich fernen (der ja auf jeder Geraden der Ebene liegt), so erhält man daraus einen Satz, der sich folgendermassen aussprechen lässt:

> „Wählt man auf einer Geraden drei Punkte und legt durch je zwei dieser Punkte und einen beliebigen ausserhalb der Geraden angenommenen Punkt p die drei möglichen Kreise, so liegen deren Mittelpunkte mit p auf einem neuen Kreise.“

Die Gegenpunkte zu p in den drei Kreisen liegen dann natürlich ebenfalls auf einem Kreise. In letzterer Form wurde dieser Satz von *Fabry* angegeben**).

Aus Satz I soll noch ein neuer Satz abgeleitet werden, der sich auf zwei der Fläche F eingeschriebene und einander doppelt umschriebene Tetraeder bezieht. Zu diesem Zwecke denke man sich durch die Ecke d des der Fläche F eingeschriebenen Tetraeders $abcd$ eine vierte Ebene δ'

---

*) Vergl. *Baltzer,* Elem. d. Math. 2. Bd., IV. B. § 4, 3, Leipzig 1878.

**) Nouvelles Annales, 1889.

gelegt; sie schneidet die Tetraederflächen α, β, γ in drei Geraden, deren Schnittpunkte mit F bezw. a', b', c' heissen sollen. Betrachtet man diese Punkte als Ecken eines $abcd$ umschriebenen Tetraeders, dessen drei übrige Flächen also $a'b'c$, $b'c'a$, $c'a'b$ sind, so liegt deren Schnittpunkt, d. i. der vierte Eckpunkt d' des Tetraeders, in δ*), das Tetraeder $a'b'c'd'$ ist daher $abcd$ sowohl ein- als umgeschrieben. Nach *Steiner***) liegen die Ecken zweier solcher Tetraeder auf drei Flächen zweiter Ordnung oder bilden acht associirte Punkte; jede Fläche zweiter Ordnung, die sieben dieser Punkte enthält, muss also auch den achten enthalten. Demnach liegt d' ebenfalls auf F. d' besitzt jetzt bezüglich der Tetraeder $da'b'c$, $db'c'a$, $dc'a'b$, $dabc$ dieselbe Lage, welche nach Satz I der dort mit e bezeichnete Punkt haben soll. Sucht man daher die Pole der Ebenen α, β, γ, δ' und projicirt sie aus d' auf die Fläche F, so müssen diesem Satze zufolge je drei der vier erhaltenen Punkte mit d in einer Ebene liegen, d. h. es liegen alle vier mit d in einer Ebene. Nennt man in der Configuration zweier doppelt umschriebenen Tetraeder *Gegenecken* zwei solche Eckpunkte, die zusammen auf keiner der acht Seitenebenen liegen, so kann man den hiermit bewiesenen Satz folgendermassen aussprechen:

III. *„Liegen die Ecken zweier einander doppelt umschriebenen Tetraeder auf einer Fläche zweiter Ordnung, und projicirt man aus einer der Ecken die Pole der durch die Gegenecke gehenden Ebenen auf die Fläche, so liegen diese Punkte mit der Gegenecke in einer Ebene.“*

Wählt man wieder die Fläche F als Kugel und überträgt die durch obige Tetraederconfiguration auf der Kugel bestimmte Kreisconfiguration durch stereographische Projection auf die Ebene, so erhält man eine bekannte Configuration C von acht Punkten und acht Kreisen, bei der durch jeden Punkt vier Kreise gehen und auf jedem Kreise vier Punkte liegen.†) Dem Satze III entspricht dann in der Ebene der folgende Satz:

IV. *„Sucht man zu einem Punkte der Kreisconfiguration C die inversen Punkte in Bezug auf die vier durch den Gegenpunkt gehenden Kreise, so liegen sie mit dem Gegenpunkte auf einem neuen Kreise.“*

---

*) Vergl. *Möbius* „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden etc.“ Dieses Journal Bd. III, 1828. Ges. Werke, Bd. I, S. 441.

**) „System. Entwickl.“ No. 58; Ges. Werke, Bd. I, S. 407 Anm.

†) *Möbius* „Theorie der Kreisverwandtschaft.“ Abh. der Sächs. Gesellsch. d. W. Bd. II, 1855. Ges. Werke, Bd. II, S. 314.

Nimmt man insbesondere vier Kreise der Configuration C als Kreise durch den unendlich fernen Punkt u der Ebene d. h. als Geraden an, so sind u und der Schnittpunkt s der vier Kreise, welche den aus den vier Geraden gebildeten Dreiseiten umschrieben werden können, Gegenpunkte. Sucht man nun, dem Satze IV entsprechend, einmal zu u die inversen Punkte, das andere Mal zu s, so erhält man die beiden folgenden von *Steiner* *) angeführten Sätze:

> „Die Mittelpunkte der Kreise, welche den aus vier Geraden gebildeten Dreiseiten umschrieben werden, liegen mit dem gemeinsamen Punkte s dieser Kreise auf einem neuen Kreis."
>
> „Die Spiegelbilder des Punktes s bezüglich der vier Geraden, mithin auch die Fusspunkte der aus s auf die Geraden gefällten Lothe, liegen in einer Geraden."

Interessant wäre es, zu wissen, ob die den Sätzen I und III entsprechenden Sätze auch für Räume von höherer Dimensionenzahl gelten**).

---

*) „Théorèmes sur le quadrilatère complet", Ges. Werke, Bd. I, S. 223.

**) In einem inzwischen erschienenen Aufsatze von *H. Kühne* „Die Uebertragung eines geometrischen Lehrsatzes", dieses Journal Bd. 119, 1898, wird mittelst Determinantenbetrachtungen der obige Satz über die Kreise, welche den aus vier Geraden gebildeten Dreiseiten umschrieben sind, übertragen auf Räume von gerader Dimensionenzahl. Daraus kann man schliessen, dass das Analogon zu Satz I für Räume *ungerader* Dimensionenzahl Gültigkeit hat.