# Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Alf Guldberg* in Christiania.)

In den Untersuchungen über die Theorie der Differentialgleichungen findet man, meines Wissens, nirgends ein allgemeines Princip angegeben, nach welchem man entscheiden kann, wie weit eine gegebene totale Differentialgleichung unbeschränkt integrabel ist oder nicht.

Eine kurze Darstellung eines derartigen Verfahrens dürfte daher vielleicht nicht ohne Interesse sein.

1.

Es sei erstens vorgelegt eine totale Differentialgleichung erster Ordnung in drei Veränderlichen $x, y, z$:

$$\omega(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{1.}$$

wo $\omega$ homogen in $dx, dy, dz$ ist.

Soll diese totale Differentialgleichung unbeschränkt integrabel sein, d. h., soll $z$ eine Function von $x, y$ und einer Constante $c$ sein, dann ist:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Setzt man diesen Werth für $dz$ in die gegebene Gleichung (1.) ein, so nimmt diese Form:

$$\Sigma P\,dx^{\alpha}\,dy^{\beta} = 0 \qquad (\alpha+\beta = \text{const.})$$

an, wo die $P$ Functionen von $x, y, z$ sind.

Wegen der Unabhängigkeit von $dx$ und $dy$, müssen sämmtliche Coefficienten dieser Gleichung Null sein.

Die so erhaltenen Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

geben die gesuchten Integrabilitätsbedingungen.

*Beispiel I.* Es sei gegeben die lineare totale Differentialgleichung:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Substituirt man hier:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so nimmt die Gleichung die Form

$$(P + Rp)\,dx + (Q + Rq)\,dy = 0$$

an.

Setzt man nun die Coefficienten von $dx$ und $dy$ gleich Null, so erhält man:

$$p = -\frac{P}{R}, \quad q = -\frac{Q}{R}.$$

Diese Werthe für $p$ und $q$ in die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

eingesetzt giebt:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right).$$

Führt man die Differentiation aus, so erhält man die bekannte Integrabilitätsbedingung:

$$R\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right] + Q\left[\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right] + P\left[\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right] = 0.$$

*Beispiel II.* Es sei vorgelegt die quadratische totale Differentialgleichung erster Ordnung:

$$A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 + 2D\,dy\,dz + 2E\,dx\,dz + 2F\,dx\,dy = 0,$$

wo die $A, B, \ldots, F$ Functionen von $x, y, z$ sind.

Setzt man hier:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so geht die Gleichung in

$$(A + 2Ep + Cp^2)\,dx^2 + 2(F + Dp + Eq + Cpq)\,dx\,dy + (B + 2Dq + Cq^2)\,dy^2 = 0$$

über.

Die Coefficienten dieser Gleichung gleich Null gesetzt geben:

$$A+2Ep+Cp^2=0,\quad F+Dp+Eq+Cpq=0,\quad B+2Dq+Cq^2=0.$$

Substituirt man die Werthe von $p$ und $q$ aus der ersten und dritten Gleichung in die zweite so erhält man folgende Bedingungsgleichung:

$$ABC+2FED-AD^2-BE^2-F^2C=0.$$

Als zweite Integrabilitätsbedingung erhält man, indem man die Relation

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$$

beachtet

$$\frac{\partial\left[\frac{-E\pm\sqrt{E^2-AC}}{C}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{-D\pm\sqrt{D^2-BC}}{C}\right]}{\partial x}.$$

2.

Es sei jetzt eine totale Differentialgleichung $n$-ter Ordnung:

$$\text{(II.)}\qquad \omega(x,y,z,dx,dy,dz,d^2z,\ldots,d^nz)=0$$

vorgelegt, wo $\omega$ homogen in $dx, dy, dz, d^2z, \ldots, d^nz$ und $d^mz$ als ein Ausdruck $m$-ten Grades angesehen ist.

Soll diese Gleichung unbeschränkt integrabel sein, so muss

$$\begin{aligned}
dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,\\
d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d^nz &= \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n+(n_1)\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy+\cdots+\frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n
\end{aligned}$$

sein, wo $(n_1)\ldots$ die Binominalcoefficienten bedeuten.

Substituirt man diese Werthe für $dz, d^2z, \ldots, d^nz$ in die gegebene Gleichung (II.), so nimmt diese die Form

$$\Sigma P\,dx^\alpha dy^\beta=0,\qquad (\alpha+\beta=\text{const.})$$

an.

Die Coëfficienten dieser Gleichung müssen nun, wie früher, gleich Null gesetzt werden. Diese Gleichungen in Verbindung mit den Relationen, welche zwischen den Differentialquotienten $n$-ter Ordnung von $z$ bestehen, geben die gesuchten Integrabilitätsbedingungen.

Beispiel: Es sei gegeben die totale Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$A dx^2 + B dy^2 + C dz^2 + 2D dx dy + 2E dx dz + 2F dy dz + G d^2z = 0.$$

Soll diese Gleichung unbeschränkt integrabel sein, so muss also

$$dz = p dx + q dy,$$
$$d^2z = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2$$

sein, wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

gesetzt ist.

Substituirt man diese Werthe für $dz$, $d^2z$ in unsere Gleichung, so nimmt diese die Form

$$[A + 2Ep + Cp^2 + Gr] dx^2 + 2[D + Eq + Fp + Cpq + Gs] dx dy$$
$$+ [B + 2Fq + Cq^2 + Gt] dy^2 = 0$$

an.

Die Coefficienten dieser Gleichung gleich Null gesetzt geben:

$$A + 2Ep + Cp^2 + Gr = 0; \quad B + 2Fq + Cq^2 + Gt = 0; \quad D + Eq + Fp + Cpq + Gs = 0.$$

Substituirt man die sich aus dieser Gleichung ergebenden Werthe für $r, s, t$ in die Gleichungen:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y},$$

so bekommt man:

$$\frac{\partial \left[\frac{A + 2Ep + Cp^2}{G}\right]}{\partial y} = \frac{\partial \left[\frac{D + Eq + Fp + Cpq}{G}\right]}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \left[\frac{B + 2Fq + Cq^2}{G}\right]}{\partial x} = \frac{\partial \left[\frac{D + Eq + Fp + Cpq}{G}\right]}{\partial y}.$$

Führt man die Differentiation aus, und setzt man die Coefficienten der Potenzen von $p$ und $q$ gleich Null, so erhält man folgende Integrabilitätsbedingungen.

$$G\frac{\partial E}{\partial z} - E\frac{\partial G}{\partial z} + C\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial C}{\partial x} = 0,$$

$$G\frac{\partial C}{\partial y} - C\frac{\partial G}{\partial y} + F\frac{\partial G}{\partial z} - G\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

$$G\frac{\partial A}{\partial y} - A\frac{\partial G}{\partial y} + D\frac{\partial G}{\partial x} - G\frac{\partial D}{\partial x} = DE - AF,$$

$$G\frac{\partial A}{\partial z}-A\frac{\partial G}{\partial z}+E\frac{\partial G}{\partial x}-G\frac{\partial E}{\partial x} = E^2-AC,$$

$$G\frac{\partial B}{\partial x}-B\frac{\partial G}{\partial x}+D\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial D}{\partial y} = FD-CB,$$

$$G\frac{\partial B}{\partial z}-B\frac{\partial G}{\partial z}+F\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial F}{\partial y} = F^2-CB,$$

$$G\frac{\partial E}{\partial y}-E\frac{\partial G}{\partial y}+F\frac{\partial G}{\partial x}-G\frac{\partial F}{\partial x}+D\frac{\partial G}{\partial z}-G\frac{\partial D}{\partial z} = CD-EF,$$

$$G\frac{\partial F}{\partial x}-F\frac{\partial G}{\partial x}+D\frac{\partial G}{\partial z}-G\frac{\partial D}{\partial z}+E\frac{\partial G}{\partial y}-G\frac{\partial E}{\partial y} = CD-EF.$$

Das hier angedeutete Verfahren lässt sich direct auf eine totale Differentialgleichung $n$-ter Ordnung von $m$ Veränderlichen generalisiren.

# Ueber reductible lineare Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Lothar Heffter* in Bonn.)

Die folgenden Zeilen liefern einen kleinen Beitrag zu der Bedeutung der determinirenden Gleichung einer linearen homogenen Differentialgleichung bei solchen Stellen der unabhängigen Variablen, wo der Grad jener Gleichung niedriger als die Ordnung der Differentialgleichung ist.

## I.

Die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad P(x, y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu p_{n-\nu} y^{(\nu)} = 0,$$

wo die $p$ gewöhnliche Potenzreihen von $x$ sind, die für $x = 0$ nicht sämmtlich verschwinden, („Normalform" bei $x = 0$) habe bei $x = 0$ eine determinirende Function vom Grade $\nu \leqq n$ und $P$ sei in „Factoren" zerlegbar

$$(2.)\qquad P \equiv Q\big(R(\ldots(Z))\big),$$

wo $Q, R, \ldots, Z$ bei $x = 0$ ebenfalls Normalform haben. Der Kürze halber sei $P$ in drei Factoren zerlegt

$$(2^a.)\qquad P \equiv Q\big(R(S(x, y))\big).$$

Ein Fundamentalsystem von Integralen von (1.) lässt sich dann zusammensetzen

a) aus einem Fundamentalsystem von $S = 0$;

b) aus je einem Integral der nicht homogenen Gleichungen

$$S = y_R,$$

wo für $y_R$ successive die Elemente eines Fundamentalsystems von $R = 0$ zu setzen sind;

c) aus je einem Integral der Gleichungen

$$R(S) = y_Q,$$

wo für $y_Q$ successive die Elemente eines Fundamentalsystems von $Q=0$ zu setzen sind.

Jedes der unter a), b), c) aufgezählten Integrale ist in der Form darstellbar

$$y_P \equiv x^\lambda(\varphi_0+\varphi_1\log x+\cdots+\varphi_\varkappa \log^\varkappa x),$$

wo die $\varphi$ positive und negative, aber keine gebrochenen, sondern nur *ganze* Potenzen von $x$ enthalten. Wir wollen sagen, dass die multiplicative Vieldeutigkeit von $y_P$ bei $x=0$ durch $\lambda$ bestimmt werde. Dann ist klar, dass die unter b) aufgezählten Integrale dieselbe multiplicative Vieldeutigkeit besitzen wie $y_R$, die unter c) dieselbe wie $y_Q$. Hat nun eine der Differentialgleichungen

$$Q=0, \quad R=0, \quad S=0$$

in $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit, wo also der Grad der determinirenden Function mit der Ordnung der Differentialgleichung übereinstimmt, so wird die multiplicative Vieldeutigkeit ihrer Integrale gegeben durch die Wurzeln ihrer determinirenden Gleichung, folglich auch die multiplicative Vieldeutigkeit der entsprechenden Integrale von $P=0$ selbst.

Diese naheliegende Bemerkung sprechen wir, nur um nachher davon Gebrauch zu machen und, weil es sonst noch nicht geschehen zu sein scheint, als besonderen Satz aus:

*Wenn der Differerentialausdruck $P$ sich bei $x=0$ zerlegen lässt in:*

$$P \equiv Q\big(R(\ldots(Z))\big)$$

*und dem entsprechend die determinirende Function von $P$ in*

$$\mathfrak{p}(\lambda) \equiv \mathfrak{q}(\lambda)\cdot\mathfrak{r}(\lambda)\ldots\mathfrak{z}(\lambda),$$

*wenn ferner ein bei jener Zerlegung auftretender Differentialausdruck $S$ bei $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat mit der determinirenden Function $\mathfrak{s}(\lambda)$, so entspricht jeder Wurzel von $\mathfrak{s}(\lambda)=0$ eine Wurzel $\omega$ der zu $x=0$ gehörigen Fundamentalgleichung von $P=0$ durch die Relation*

$$\omega = e^{2\pi i\lambda}.$$

Liegt nun z. B. der Fall vor, dass bei

$$P \equiv Q(R(S))$$

$S$ in $x=0$ keine Stelle der Bestimmtheit hat, wohl aber $R$, so *divergirt* zwar die zu einer Wurzel von $\mathfrak{r}(\lambda)=0$ gehörige, formal bestimmbare Reihe, aber ihr Anfangsexponent, eben jene Wurzel von $\mathfrak{r}(\lambda)=0$, giebt dennoch nach unserem Satze die multiplicative Vieldeutigkeit eines Integrals oder mit anderen Worten eine Wurzel der zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung. Hiernach empfiehlt es sich, eine von Herrn *Thomé* mehrfach ausgesprochene Bemerkung*) ausdrücklich auf den Fall der Irreductibilität der vorliegenden Differentialgleichung bei der betrachteten Stelle einzuschränken, was ja vielleicht auch als stillschweigende Voraussetzung jener Bemerkung zu Grunde lag.

## II.

Wenn man mehrere lineare Differentialausdrücke

$$Q, R, S, \ldots,$$

deren Coefficienten sich bei $x = 0$ rational verhalten und die sämmtlich in der Normalform gegeben sein sollen, zusammensetzt, so ist die determinirende Function des zusammengesetzten Differentialausdruckes

$$P \equiv Q(R(S\ldots))$$

bekanntlich das Product der determinirenden Functionen von $Q, R, S, \ldots$ Hat umgekehrt ein Differentialausdruck $P$ in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit, so ist er stets in $n$ Differentialausdrücke erster Ordnung, die in $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit haben, zerlegbar. Andererseits sind bisher als bei einer Stelle *irreductibel* nachgewiesen nur Differentialgleichungen, die daselbst eine determinirende Function 0-ten Grades haben**). Deshalb ist die Frage nicht uninteressant, ob etwa jede Differentialgleichung, deren determinirende Function keine Constante ist, reductibel ist, oder ob es auch irreductibele lineare Differentialausdrücke mit nicht constanter determinirender Function giebt. Ich glaube umsomehr auf diese Frage eingehen zu sollen, als ich bei früherer Gelegenheit†) die Vermuthung wenigstens angedeutet habe, dass das Erstere der Fall sein dürfte, und diese Bemerkung bisher keinen Widerspruch gefunden zu haben scheint. Man kann aber mit Hülfe des Satzes aus No. I leicht zeigen, dass es auch bei $x = 0$ irreductibele Differentialgleichungen mit nicht constanter determinirender Function giebt.

Aehnlich wie Herr *Thomé* für seinen oben genannten Zweck (a. a. O.) benutzen wir als Beispiel eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(3.)\qquad x^3y''+x\left(1+\frac{11}{6}x\right)y'+\frac{1}{6}xy = 0,$$

*) Vergl. z. B. dieses Journ. Bd. 101 (1887), S. 203.

**) Vergl. *Frobenius*, dieses Journ. Bd. 80 (1875), S. 332, 333.

†) Einleitung in die Theorie der lin. Diffgl. etc., Leipzig, *Teubner*, 1894, S. 196, Anmerkung.

die ausser $x = 0$ und $x = \infty$ keine singulären Stellen hat. Zu $x = \infty$ gehört die determinirende Gleichung

$$r(r-1)+\frac{1}{6}r+\frac{1}{6} = 0$$

mit den Wurzeln $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{3}$,

zu $x = 0$ die determinirende Gleichung ersten Grades

$$s = 0$$

mit der einzigen Wurzel $s = 0$. $x = \infty$ ist Stelle der Bestimmtheit, und da ausser $x = 0$ keine anderen singulären Stellen vorhanden sind, so gelten die Entwickelungen

$$(4.)\qquad y_1 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} P_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad y_2 = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} P_2\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $P_1$ und $P_2$ gewöhnliche Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ mit nicht verschwindendem Anfangsgliede sind, auch noch in der Umgebung von $x = 0$. Jedes Integral ist eine lineare homogene Verbindung von $y_1, y_2$; folglich kann es kein in der Umgebung von $x = 0$ *eindeutiges* Integral geben und daher ist Differentialgleichung (3.) bei $x = 0$ *irreductibel.* Denn, wenn sie in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegbar wäre, so hätte einer der beiden Differentialausdrücke, entweder der innere oder der äussere, bei $x = 0$ eine Stelle der Bestimmtheit und es müsste nach dem Satze aus No. I jedenfalls *ein* bei $x = 0$ eindeutiges Integral existiren.

Wir haben also das Resultat:

***Es giebt lineare Differentialgleichungen, die bei einer Stelle irreductibel sind und deren determinirende Function keine Constante ist.***

---

## Zusatz zu der Arbeit „Ueber *Abel*sche Gruppen" (Bd. 119 d. J. S. 261ff.).

S. 266 bei Formel (A.) ist als Anmerkung anzufügen:

„Diese Formel ist in Uebereinstimmung mit einem Satze, der zuerst von den Herren *Frobenius* und *Stickelberger* (d. J. Bd. 86 (1878) S. 245, XI.) und neuerdings von Herrn *K. Zsigmondy* in der Abhandlung „Beiträge zur Theorie der *Abel*schen Gruppen und ihrer Anwendungen auf die Zahlentheorie" (Monatshefte für Mathematik und Physik, Jahrg. VII, 1896) bewiesen worden ist."