Zur Theorie der einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung adjungirten Differentialgleichungen.

(Von Herrn *E. Grünfeld* in Nikolsburg.)

1.

Im 115. Bde. d. J. ist gezeigt worden, wie die Gleichungen der zu

$$(1.)\qquad P(y)=\frac{d^n y}{dx^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_n y=0$$

gehörigen n Adjungirten aus den Definitionsgleichungen derselben:

$$(2.)\qquad \begin{cases} u=p_{n-k}z-\dfrac{d}{dx}(p_{n-k-1}z)+\cdots+(-1)^{n-k}\dfrac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}}, \\ \dfrac{d^k u}{dx^k}=\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}(p_{n-k+1}z)-\dfrac{d^{k-2}}{dx^{k-2}}(p_{n-k+2}z)+\cdots+(-1)^{k-1}(p_n z) \end{cases}$$

durch allmähliche Elimination von z abgeleitet werden können.

Ein anderes Verfahren, um diese Gleichungen zu erhalten, ist folgendes:

Man differentiire die erste der Gleichungen (2.) $(k-1)$-mal und die zweite $(n-k)$-mal, so erhält man Ausdrücke für

$$u,\ \frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}}$$

in der Form

$$(3.)\qquad \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}=a_\lambda z^{(n-k+\lambda)}+b_\lambda z^{(n-k+\lambda-1)}+\cdots+g_\lambda z$$
$$(\lambda=0,1,\ldots,k-1)$$

und für

$$\frac{d^k u}{dx^k},\ \frac{d^{k+1}u}{dx^{k+1}},\ \ldots,\ \frac{d^n u}{dx^n}$$

Ausdrücke von der Form

$$(4.)\qquad \frac{d^{k+\lambda}u}{dx^{k+\lambda}}=\mathfrak{a}_\lambda z^{(k-1+\lambda)}+\mathfrak{b}_\lambda z^{(k-2+\lambda)}+\cdots+\mathfrak{f}_\lambda z$$
$$(\lambda=0,1,\ldots,n-k).$$

Die Differentialgleichung der k-ten Adjungirten geht dann aus den $n+1$ Gleichungen (3.) und (4.) unmittelbar hervor, wenn man aus denselben die n Grössen $z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}$ eliminirt.

Diese Bildungsregel gilt für jedes $k = 1, 2, \dots, n$. Für $k = n$ insbesondere lauten die Gleichungen (2.):

$$u_{(n)} = z,$$
$$\frac{d^n u_{(n)}}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) + \dots + (-1)^{n-1}(p_n z).$$

Der Vorschrift gemäss ist die erste dieser Gleichungen $(n-1)$-mal, die zweite 0-mal zu differentiiren, was darauf hinauskommt, in letzterer Gleichung z und die $n-1$ ersten Ableitungen von z durch $u_{(n)}, \frac{du_{(n)}}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}u_{(n)}}{dx^{n-1}}$ zu ersetzen.

Nach dem angegebenen Verfahren erhält man z. B. für $n = 3$ die Gleichung der Adjungirten der ersten Zeile in der Form:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3u}{dx^3} & p_3 & 2p_3' & p_3'' \\ \frac{d^2u}{dx^2} & 0 & p_3 & p_3' \\ \frac{du}{dx} & 0 & 0 & p_3 \\ u & 1 & -p_1 & p_2-p_1' \end{vmatrix} = 0$$

und diejenige der Adjungirten der zweiten Zeile:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3u}{dx^3} & p_2 & 2p_2'-p_3 & p_2''-p_3' \\ \frac{d^2u}{dx^2} & 0 & p_2 & p_2'-p_3 \\ \frac{du}{dx} & 1 & -p_1 & -p_1' \\ u & 0 & 1 & -p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.

Mittels der Gleichungen (2.) lassen sich auch die Werthe der Determinantenproducte:

(5.) $$D(u_{(k)_1}, u_{(k)_2}, \dots, u_{(k)_n}) \cdot D(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

für jedes $k = 1, 2, \dots, n$, ausgedrückt in Function der Coefficienten $p_1, p_2, \dots, p_n$, unmittelbar berechnen*). Dies geschieht, indem man für die $u_{(k)}$ und deren

*) Vergl. d. J. Bd. 115.

Derivirte die Ausdrücke (3.) und (4.) in den Determinanten $D(u_{(k)_1}, \dots, u_{(k)_n})$ substituirt. Diese letzteren können dann als Product zweier Factoren dargestellt werden, deren einer die Determinante $D(z_1, z_2, \dots, z_n)$ und deren anderer eine Determinante ist, die sich als ganze rationale Function von $p_1, \dots, p_n$ und deren Ableitungen darstellt. Und da (*Frobenius*, d. J. Bd. 77)

$$D(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \tag{6.}$$

ist, so erscheint damit auch das Determinantenproduct (5.) als ganze rationale Function der Coefficienten p_i und deren Ableitungen ausgedrückt.

Für die Adjungirte $u_{(1)}$ der ersten Zeile lässt sich diese Berechnung am kürzesten ausführen. Für diese lauten die Gleichungen (2.):

$$\begin{cases} u = p_{n-1}z - \dfrac{d}{dx}(p_{n-2}z) + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} \\ \dfrac{du}{dx} = p_n z. \end{cases} \tag{7.}$$

Die erste dieser Gleichungen wird auf die Form gebracht:

$$u = (-1)^{n-1}z^{(n-1)} + a_{n-2}z^{(n-2)} + \dots + a_1 z^{(1)} + a_0 z$$

aus der zweiten erhält man durch Differentiation die Werthe für $u^{(2)}, u^{(3)}, \dots, u^{(n-1)}$; werden dieselben nebst den vorstehenden für u und $u^{(1)}$ in $D(u_{(1)_1}, \dots, u_{(1)_n})$ eingesetzt, so zerfällt letztere Determinante in das Product der Determinante:

$$\begin{vmatrix} z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \dots & z_n^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1' & z_2' & \dots & z_n' \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

und

$$\begin{vmatrix} (-1)^{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & p_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n & p_n' \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n & 2p_n' & p_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & p_n & \dots & (n-3)_2 p_n^{(n-5)} & (n-3)_1 p_n^{(n-4)} & p_n^{(n-3)} \\ 0 & p_n & (n-2)_1 p_n' & \dots & (n-2)_2 p_n^{(n-4)} & (n-2)_1 p_n^{(n-3)} & p_n^{(n-2)} \end{vmatrix}; \tag{8.}$$

die letztere Determinante reducirt sich auf das Product ihres Anfangsgliedes und der zu diesem gehörigen Adjuncten, in dieser aber sind alle Glieder

der einen Diagonale gleich p_n und alle auf der einen Seite dieser Diagonale stehenden Glieder gleich Null, die Determinante (8.) ist daher gleich:

$$(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\,p_n^{n-1},$$

und wegen

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = (-1)^{n(n-1)} = 1$$

ist dann

$$D(u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \dots, u_{(1)_n}) = D(z_1, z_2, \dots, z_n)\cdot p_n^{n-1}$$

oder zufolge (6.):

$$(9.)\qquad D(u_{(1)_1}, u_{(1)_2}, \dots, u_{(1)_n})\cdot D(y_1, y_2, \dots, y_n) = p_n^{n-1},$$

wie auf anderem Wege im 115. Bde. d. J. gefunden wurde.

Um die Anwendbarkeit dieses Verfahrens für die anderen Adjungirten zu zeigen, mag z. B. $n=3$, $k=2$ angenommen werden. Für diesen Fall ist

$$D(u_{(2)_1}, u_{(2)_2}, u_{(2)_3}) = \begin{vmatrix} -z_1'+p_1z_1 & -z_2'+p_1z_2 & -z_3'+p_1z_3 \\ -z_1''+p_1z_1'+p_1'z_1 & -z_2''+p_1z_2'+p_1'z_2 & -z_3''+p_1z_3'+p_1'z_3 \\ p_2z_1'+(p_2'-p_3)z_1 & p_2z_2'+(p_2'-p\ )z_2 & p_2z_3'+(p_2'-p_3)z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1'' & z_2'' & z_3'' \\ z_1' & z_2' & z_3' \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & p_1 \\ -1 & p_1 & p_1' \\ 0 & p_2 & p_2'-p_3 \end{vmatrix}$$

$$= D(z_1, z_2, z_3)(p_1p_2+p_2'-p_3)$$

daher

$$D(u_{(2)_1}, u_{(2)_2}, u_{(2)_3})\cdot D(y_1, y_2, y_3) = p_1p_2-p_3+p_2'$$

(vergl. d. J. Bd. 115, S. 337).

Für $n=4$ und $k=2$ ergiebt sich ferner:

$$D(u_{(2)_1}, \dots, u_{(2)_4}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -p_1 & p_2-p_1' \\ 1 & -p_1 & p_2-p_1' & p_2' \\ 0 & 0 & p_3 & p_3'-p_4 \\ 0 & p_3 & 2p_3'-p_4 & p_3''-p_4 \end{vmatrix}\cdot D(z_1, \dots, z_4),$$

woraus

$$D(u_{(2)_1}, \dots, u_{(2)_4})\cdot D(y_1, \dots, y_4) =$$
$$(p_4'-p_3'')p_3+(p_3'-p_4)(2p_3'-p_4)-p_3[(p_4-p_3')p_1-p_3(p_2-p_1')]$$

sich ergiebt.

Für $n = 4$ und $k = 3$ endlich ist:

$$D(u_{(3)_1}, \dots, u_{(3)_4}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & p_1 \\ 0 & -1 & p_1 & p_1' \\ -1 & p_1 & 2p_1' & p_1'' \\ 0 & p_2 & 2p_2'-p_3 & p_2''-p_3'+p_4 \end{vmatrix} \cdot D(z_1, \dots, z_4),$$

woraus folgt:

$$D(u_{(3)_1}, \dots, u_{(3)_4}) \cdot D(y_1, \dots, y_4) = p_1(p_1p_2-p_3+2p_2')+p_1''p_2+(p_2''-p_3'+p_4).$$

3.

Aus den zwei Gleichungen (7.) ergiebt sich die Differentialgleichung der ersten Adjungirten, wenn für z der aus der zweiten folgende Werth:

$$(10.)\qquad z = \frac{1}{p_n}\frac{du}{dx}$$

in die erste gesetzt wird. Dieselbe hat die Form:

$$(11.)\quad \begin{cases} Q_1(u_{(1)}) = \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big(\dfrac{1}{p_n}\dfrac{du}{dx}\Big) - \dfrac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Big(\dfrac{p_1}{p_n}\dfrac{du}{dx}\Big) + \dfrac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\Big(\dfrac{p_2}{p_n}\dfrac{du}{dx}\Big) - \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + (-1)^{n-1}\Big(\dfrac{p_{n-1}}{p_n}\dfrac{du}{dx}\Big) + (-1)^n u = 0. \end{cases}$$

Wird aber umgekehrt der Werth für u aus der ersten Gleichung (7.) in die zweite gesetzt, so ergiebt sich die Differentialgleichung der n-ten Adjungirten:

$$(12.)\quad Q_n(u_{(n)}) = P_1(z) = \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(p_1 z) + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(p_2 z) - \cdots + (-1)^n p_n z = 0.$$

Durch Differentiation der Gleichung (11.) ergiebt sich:

$$\frac{d^n}{dx^n}\Big(\frac{1}{p_n}\frac{du}{dx}\Big) - \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big(\frac{p_1}{p_n}\frac{du}{dx}\Big) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d}{dx}\Big(\frac{p_{n-1}}{p_n}\frac{du}{dx}\Big) + (-1)^n\frac{du}{dx} = 0,$$

letztere Gleichung aber ist gemäss (10.) identisch mit der Gleichung (12.). Hieraus folgt:

Die Differentialgleichung der n-ten Adjungirten geht aus derjenigen der ersten Adjungirten dadurch hervor, dass letztere einmal differentiirt wird, d. h. es ist:

$$\frac{d}{dx}Q_1(u_{(1)}) = P_1\Big(\frac{1}{p_n}\frac{du_{(1)}}{dx}\Big) = P_1(z).$$

Der Coefficient der n-ten Ableitung in der Differentialgleichung (11.)

ist $\frac{1}{p_n}$, daher hat diese Gleichung, wenn man sie mit p_n multiplicirt, die Form:

$$(11'.)\qquad \frac{d^n u}{dx^n}+q_1\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\cdots+q_{n-1}\frac{du}{dx}+(-1)^n p_n u = 0,$$

es ist demnach der Coefficient von u in dieser Gleichung derselbe wie der Coefficient von z in der Gleichung (12.). Werden diese Coefficienten mit q_n und r_n bezeichnet, so ist also:

$$(13.)\qquad q_n = r_n = (-1)^n p_n\text{*)}.$$

Wegen

$$(13'.)\qquad p_n = (-1)^n\cdot\frac{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

(d. J. Bd. 115, S. 332) ist auch:

$$q_n = (-1)^n\cdot\frac{D(u_1', u_2', \dots, u_n')}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)},\qquad r_n = (-1)^n\frac{D(z_1', z_2', \dots, z_n')}{D(z_1, z_2, \dots, z_n)},$$

wo der Kürze wegen u_i statt $u_{(1)_i}$ geschrieben ist. Aus (13.) ergiebt sich daher, dass einerseits:

$$(14.)\qquad \frac{D(u_1', u_2', \dots, u_n')}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \frac{D(z_1', z_2', \dots, z_n')}{D(z_1, z_2, \dots, z_n)} = p_n$$

und andererseits:

$$(15.)\qquad \frac{D(u_1', u_2', \dots, u_n')}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)} = (-1)^n\cdot\frac{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)},$$

$$(16.)\qquad \frac{D(z_1', z_2', \dots, z_n')}{D(z_1, z_2, \dots, z_n)} = (-1)^n\cdot\frac{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

ist.

Aus (16.) ergiebt sich zufolge (6.) die weitere Relation:

$$(17.)\qquad D(z_1', z_2', \dots, z_n') = (-1)^n\cdot\frac{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)^2}$$

und aus (15.) mittels der Gleichung (9.):

$$(18.)\qquad D(u_1', u_2', \dots, u_n') = (-1)^n\cdot\frac{D(y_1', y_2', \dots, y_n')}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)^2}\cdot p_n^{n-1}.$$

Durch Division von (18.) und (17.) folgt noch, dass

$$D(u_1', u_2', \dots, u_n') = D(z_1', z_2', \dots, z_n')\cdot p_n^{n-1}$$

ist.

Zu den vorstehenden Relationen kann man auch auf andere Weise gelangen, wenn man den von Herrn *Frobenius* (d. J. Bd. 77) abgeleiteten

---

*) Auf die Relation $q_n = (-1)^n p_n$ hat schon Herr *Gutzmer* (Habilitationschrift, Halle a. S. 1896, S. 14) aufmerksam gemacht.

Satz anwendet, dass für eine beliebige Function f von x die Gleichung stattfindet:

$$(19.)\qquad D(fy_1, fy_2, \dots, fy_i) = f^i \cdot D(y_1, y_2, \dots, y_i), \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Zufolge (10.) ist nämlich

$$(10'.)\qquad z_i = \frac{1}{p_n} u_i' \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

also $D(z_1, z_2, \dots, z_n) = D(p_n^{-1} u_1', p_n^{-1} u_2', \dots, p_n^{-1} u_n')$, woraus gemäss der Formel (19.)

$$(19'.)\qquad p_n^n D(z_1, \dots, z_n) = D(u_1', \dots, u_n')$$

und zufolge (6.)

$$(20.)\qquad D(u_1', \dots, u_n') \cdot D(y_1, \dots, y_n) = p_n^n$$

folgt. Durch Division von (20.) und (9.) ergiebt sich:

$$\frac{D(u_1', \dots, u_n')}{D(u_1, \dots, u_n)} = p_n,$$

übereinstimmend mit der Formel (14.).

Wird ferner in (20.) für p_n der Werth aus (13'.) gesetzt, so hat man:

$$(21.)\qquad D(u_1', \dots, u_n') = (-1)^n \frac{D(y_1', \dots, y_n')^n}{D(y_1, \dots, y_n)^{n+1}},$$

während bekanntlich (d. J. Bd. 115, S. 332):

$$(22.)\qquad D(u_1, \dots, u_n) = \frac{D(y_1', \dots, y_n')^{n-1}}{D(y_1, \dots, y_n)^n}$$

ist. Durch Division von (21.) und (22.) folgt:

$$\frac{D(u_1', \dots, u_n')}{D(u_1, \dots, u_n)} = (-1)^n \frac{D(y_1', \dots, y_n')}{D(y_1, \dots, y_n)},$$

übereinstimmend mit der Formel (15.)

Durch Anwendung der Formel (19.) erhält man übrigens noch die Beziehung:

$$D(u_1', u_2', \dots, u_i') = p_n^i (z_1, z_2, \dots, z_i),$$

die für $i = 1, 2, \dots, n$ gilt, und aus der für $i = n$ die Gleichung (19'.) und für $i = 1$ die Gleichung (10'.) hervorgeht.

4.

Wenn die Differentialgleichung n-ter Ordnung $P(y) = 0$ mit einer $(n-1)$-ter Ordnung

$$Q(y) = y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} y = 0$$

alle Integrale gemeinsam hat, so ist (*Frobenius*, d. J. Bd. 76, S. 250):

$$(23.)\qquad P(y) = \frac{d}{dx}Q(y)+rQ(y).$$

Wird $r = \frac{d\log z}{dx} = \frac{z'}{z}$ und

$$(24.)\qquad zq_1 = \zeta_{n-1},\quad zq_2 = \zeta_{n-2},\ \dots,\ zq_{n-1} = \zeta_1$$

gesetzt, so verwandelt sich die Identität (23.) in

$$(23'.)\qquad zP(y) = \frac{d}{dx}\left\{zy^{(n-1)}+\zeta_{n-1}y^{(n-2)}+\dots+\zeta_1 y\right\},$$

woraus folgt, dass die Grösse z integrirender Factor von $P(y) = 0$ ist; andererseits ergiebt sich durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleich hohen Ableitungen von y in (23'.) das Gleichungssystem:

$$(25.)\qquad \begin{cases} zp_1 = \frac{dz}{dx}+\zeta_{n-1}, \\ zp_2 = \frac{d\zeta_{n-1}}{dx}+\zeta_{n-2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ zp_{n-1} = \frac{d\zeta_2}{dx}+\zeta_1, \\ zp_n = \frac{d\zeta_1}{dx}, \end{cases}$$

woraus für ζ_k der Werth hervorgeht:

$$\zeta_k = p_{n-k}z-\frac{d}{dx}(p_{n-k-1}z)+\dots+(-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}z}{dx^{n-k}},$$

welcher gemäss der ersten der Gleichungen (2.) mit dem Werthe für die Adjungirte der k-ten Zeile $u_{(k)}$ übereinstimmt, es ist also:

$$\zeta_1 = u_{(1)},\quad \zeta_2 = u_{(2)},\ \dots,\ \zeta_{n-1} = u_{(n-1)},\quad z = u_{(n)},$$

wie denn auch das Gleichungssystem (25.) identisch ist mit demjenigen, dem die $u_{(k)}$ genügen (d. J. Bd. 117, S. 274). Zufolge (24.) ist daher:

$$(26.)\qquad q_1 = \frac{u_{(n-1)}}{u_{(n)}},\quad q_2 = \frac{u_{(n-2)}}{u_{(n)}},\ \dots,\ q_{n-1} = \frac{u_{(1)}}{u_{(n)}}.$$

Es gilt also der Satz:

Die Coefficienten derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung $Q(y) = 0$, mit welcher $P(y) = 0$ alle Integrale gemeinsam hat, werden erhalten, indem man die zu $P(y) = 0$ gehörigen Adjungirten der $(n-1)$-ten, $(n-2)$-ten, ..., 1-ten Zeile durch die Adjungirte der n-ten Zeile dividirt.

(Vergl. d. J. Bd. 115, S. 329).

Zu diesem Ergebnisse kann man auch auf folgende Weise gelangen: Zwischen dem Lösungssysteme $y_1, y_2, \dots, y_n$ von $P(y) = 0$ und dem dazugehörigen Lösungssystem $u_{(k)_1}, u_{(k)_2}, \dots, u_{(k)_n}$ der Adjungirten der k-ten Zeile finden, wie aus der Definition letzterer unmittelbar hervorgeht, die Beziehungen statt:

$$(27.)\quad \left\{\begin{array}{l} y_1 u_{(k)_1} + y_2 u_{(k)_2} + \cdots + y_n u_{(k)_n} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(k-2)} u_{(k)_1} + y_2^{(k-2)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(k-2)} u_{(k)_n} = 0, \\ y_1^{(k-1)} u_{(k)_1} + y_2^{(k-1)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(k-1)} u_{(k)_n} = 1, \\ y_1^{(k)} u_{(k)_1} + y_2^{(k)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(k)} u_{(k)_n} = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1^{(n-1)} u_{(k)_1} + y_2^{(n-1)} u_{(k)_2} + \cdots + y_n^{(n-1)} u_{(k)_n} = 0. \end{array}\right.$$

Es sei nun

$$Q(y) = y^{(n-1)} + q_1 y^{(n-2)} + \cdots + q_{n-1} y = 0$$

diejenige Differentialgleichung $(n-1)$-ter Ordnung, der die $n-1$ Integrale $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n$ genügen. Multiplicirt man die Gleichungen (27.) beziehungsweise mit $q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_1$, 1 und addirt dieselben hierauf, so ergiebt sich:

$$u_{(k)_i} \cdot Q(y_i) = q_{n-k}.$$

Es ist aber (*Frobenius*, d. J. Bd. 76, S. 266)

$$\frac{1}{Q(y_i)} = z_i$$

ein Multiplicator von $P(y) = 0$, somit ist

$$\frac{u_{(k)_i}}{z_i} = q_{n-k}$$

für jedes $i = 1, 2, \dots, n$, woraus für $k = 1, \dots, n$ folgt:

$$\frac{u_{(1)}}{z} = q_{n-1}, \quad \frac{u_{(2)}}{z} = q_{n-2}, \quad \dots, \quad \frac{u_{(n-1)}}{z} = q_1,$$

übereinstimmend mit (26.).

5.

Hat die Diffentialgleichung $P(y) = 0$ mit einer anderen ebenso beschaffenen Differentialgleichung λ-ter Ordnung ($\lambda < n$) alle Integrale gemeinsam, so hat, wie Herr ***Frobenius*** auf verschiedene Arten gezeigt hat (d. J. Bd. 76) die Differentialgleichung $P_1(z) = 0$, welcher die Adjungirte der n-ten Zeile $z = u_{(n)}$ genügt, mit einer linearen Differentialgleichung $(n-\lambda)$-ter

Ordnung alle Integrale gemeinsam. Da aber, wenn z schon eine Differentialgleichung von niedrigerer als der n-ten Ordnung befriedigt, jeder mit z gebildete homogene lineare Differentialausdruck gleichfalls einer linearen Differentialgleichung derselben Ordnung genügt, so folgt aus den Ausdrücken (2.) für die Adjungirten der 1., 2., ..., $(n-1)$-ten Zeile, dass jede derselben gleichzeitig mit z je einer linearen Differentialgleichung $(n-\lambda)$-ter Ordnung genügt. Daher gilt der Satz:

Die lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung $P(y) = 0$ und alle ihr adjungirten n Differentialgleichungen:

$$Q_k(u_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sind gleichzeitig reductibel oder irreductibel.

Dass die Differentialgleichung $Q_{(k)}(u_{(k)}) = 0$ der Adjungirten der k-ten Zeile mit einer Differentialgleichung $(n-\lambda)$-ter alle Integrale gemeinsam hat, sobald $P(y) = 0$ mit einer Differentialgleichung λ-ter Ordnung alle Integrale gemeinsam hat, lässt sich übrigens auch aus dem Gleichungssysteme (27.) auf dieselbe Weise ableiten, wie Herr *Frobenius* aus demselben Gleichungssysteme für $k = n$ den Anfangs dieser Nummer angeführten Satz bewiesen hat (d. J. Bd. 76, S. 266—268).

Als Beispiel mag die *Riemann*sche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(28.)\quad \begin{cases} x^2(1-x)^2y''-[(\alpha+\alpha'-1)+(\beta+\beta'+1)x]x(1-x)y' \\ \qquad\qquad +[\alpha\alpha'+(\gamma\gamma'-\alpha\alpha'-\beta\beta')x+\beta\beta'x^2]y = 0 \end{cases}$$

angeführt werden. Damit diese Gleichung reductibel sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Summe dreier Exponenten, unter denen sich von jedem singulären Punkte einer befindet, gleich einer ganzen Zahl sei (*Frobenius*, d. J. Bd. 76, S. 254—256). Da aber (d. J. Bd. 117, S. 376) die Wurzeln der zu den adjungirten Differentialgleichungen $Q_k(u_{(k)}) = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen von den entsprechenden Wurzeln der zu $P(y) = 0$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, so ergiebt sich sofort, dass die beiden zur Gleichung (28.) adjungirten Differentialgleichungen mit dieser selbst reductibel sind oder nicht.