Ueber Scharen reeller quadratischer und *Hermite*scher Formen.

(Von Herrn *Alfred Loewy* in Freiburg i. B.)

Den von *Weierstrass*[1]) stammenden Satz: „Wenn die Determinante einer Schar reeller quadratischer Formen einen complexen oder mehrfachen Elementartheiler besitzt, so enthält die Schar keine definite quadratische Form" hat Herr *Gundelfinger* in den Supplementen zu *Otto Hesses*[2]) Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes derartig verallgemeinert, dass er auch für semidefinite quadratische Formen gilt. Ebenso wie der von *Weierstrass* für definite quadratische Formen formulirte Satz nur als der erste und einfachste Fall in einer ganzen Kette von ähnlichen Sätzen, die alle aus einem Fundamentalsatz[3]) fliessen, erscheint, so lässt sich, wie ich im Folgenden zeigen will, ein Theorem aufstellen, aus welchem der von Herrn *Gundelfinger* publicirte Satz sich als erstes Glied in einer Reihe von analogen Sätzen ergiebt.

Um diesen allgemeinen Satz bequem aussprechen zu können, ist es

[1]) *Weierstrass*, Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgänge 1858, 1868 und 1879. Wieder abgedruckt in den Mathematischen Werken, Bd. 1, S. 233 u. Bd. 2, S. 19, der fragliche Satz findet sich S. 42. Berlin. Dieses Theorem ist auch im Anschluss an die *Weierstrass*schen Untersuchungen von *Kronecker* behandelt worden. Monatsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1868; Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 165.

[2]) *Otto Hesses* Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. Dritte von *S. Gundelfinger* besorgte Auflage, S. 515. Leipzig 1876. Vergl. auch *S. Gundelfinger*, Vorlesungen über analytische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von *F. Dingeldey*, S. 65ff. Leipzig 1895.

[3]) *F. Klein*, Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form, Bonn, 1868, wieder abgedruckt in Bd. 23 der Mathematischen Annalen. — *Alf. Loewy*, Ueber die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. (Aus einem Briefe an Herrn *F. Klein*.) Mathematische Annalen, Bd. 52, S. 588.

nothwendig, den Begriff *„Charakteristik einer reellen quadratischen Form“*, den *ich in meinen* bisherigen Arbeiten*) für reelle quadratische Formen von nicht verschwindender Determinante eingeführt habe, auch auf solche von verschwindender Determinante auszudehnen. Man kann jede reelle quadratische Form $\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} s_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$, bei welcher $s_{\alpha\beta}=s_{\beta\alpha}$ reelle Grössen bedeuten, durch eine und sogar durch unendlich viele Substitutionen von nicht verschwindender Determinante mit reellen Coefficienten:

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} t_{\alpha k}\zeta_k, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

in die Normalform: $\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=q}\zeta_\alpha^2 - \sum\limits_{\alpha=q+1}^{\alpha=r}\zeta_\alpha^2$ transformiren. Auf welche Weise auch immer diese Verwandlung geschehen mag, so haben doch die zwei Zahlen r und q stets denselben unveränderlichen Werth. r heisst der Rang, q der Trägheitsindex der Form; die Zahl $n-r$, wobei n die Anzahl von Variablen der Form bedeutet, wollen wir mit d bezeichnen und den *Defect* der reellen quadratischen Form nennen. In meinen früheren Arbeiten war, da die Determinante der Form nicht verschwinden sollte, $d=0$. Die kleinere der zwei Zahlen q und $r-q$ sei mit q' bezeichnet und heisse die *Charakteristik der reellen quadratischen Form.* Bei Benutzung des von Herrn *Frobenius***) stammenden Begriffes „Signatur σ“ einer reellen quadratischen Form, wobei $\sigma = 2q-r$ ist, wird $q' = \frac{r-|\sigma|}{2}$; hierbei ist $|\sigma|$ der absolute Betrag der Signatur σ.

Die angegebene Erweiterung des Begriffes „Charakteristik“ ermöglicht es, analoge Sätze, wie ich sie in meinem an Herrn *F. Klein* gerichteten Briefe für reelle quadratische Formen von nicht verschwindender Determinante ausgesprochen habe, auch für Formen von verschwindender Determinante zu formuliren. Infolgedessen kann man auch, ausgehend von dem Problem der Aufsuchung der Elementartheiler einer Schar von reellen quadratischen Formen, die Charakteristik einer reellen quadratischen Form *verschwindender*

*) *Alf. Loewy,* Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen in Bd. 50 der Math. Annalen, S. 569 sowie in den Nova Acta der Kaiserl. Leopold.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 71, No. 8. Vergleiche auch den S. 54 unter [3]) citirten Brief.

**) *G. Frobenius,* Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1894, S. 79.

Determinante vollständig definiren. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich schliesslich auf *Hermite*sche Formen ausdehnen.

§ 1.

Der zu beweisende Fundamentalsatz, welcher den Mittelpunkt der Arbeit bilden wird, lautet:

Ist φ eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante, so genügen die Elementartheilerexponenten der Determinante der Formenschaar $\varrho\varphi-\psi$, falls ψ eine reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Werth der Charakteristik bedeutet und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, der Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hierbei ist $2s$ die Summe der Exponenten aller Elementartheiler, die für einen imaginären Werth des ϱ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler, die von einem reellen, von Null verschiedenen Werth des ϱ annullirt werden, und h' nimmt die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden, an). $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die grösste in $\frac{h}{2}$, $E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ die grösste in $\frac{h'-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler ist ganz unabhängig von φ und gleich dem Defect d von ψ.*

Es seien $\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ und $\psi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ die zwei zu betrachtenden reellen quadratischen Formen; nach Voraussetzung soll die Determinante von φ von Null verschieden sein. Bei der Zerlegung in Elementartheiler möge die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ gleich

$$C(\varrho-c_1)^{e_1}(\varrho-c_2)^{e_2}\ldots(\varrho-c_\tau)^{e_\tau}$$

werden; hierbei sei C eine von ϱ unabhängige Constante und $e_1+e_2+\cdots+e_\tau = n$. Jeder der Factoren $(\varrho-c_\lambda)^{e_\lambda}$ ist ein Elementartheiler. Eventuell können auch einige der Grössen c unter einander gleich werden. Durch eine lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante kann man in φ und ψ statt der alten n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n neue Variablen:

---

*) Wenn die Determinante von ψ von Null verschieden ist, so existirt kein für $\varrho = 0$ verschwindender Elementartheiler.

$$\begin{array}{l} X_{10}\, X_{11} \dots X_{1e_1-1} \\ X_{20}\, X_{21} \dots X_{2e_2-1} \\ \vdots \\ X_{\lambda 0}\, X_{\lambda 1} \dots X_{\lambda e_\lambda -1} \\ \vdots \\ X_{\tau 0}\, X_{\tau 1} \dots X_{\tau e_\tau -1} \end{array}$$

einführen; hierdurch geht

$$\varphi \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau} (X_{\lambda 0} X_{\lambda e_\lambda -1} + X_{\lambda 1} X_{\lambda e_\lambda -2} + \dots + X_{\lambda e_\lambda -1} X_{\lambda 0}),$$

$$\psi \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau} c_\lambda (X_{\lambda 0} X_{\lambda e_\lambda -1} + X_{\lambda 1} X_{\lambda e_\lambda -2} + \dots + X_{\lambda e_\lambda -1} X_{\lambda 0})$$
$$+ (X_{\lambda 0} X_{\lambda e_\lambda -2} + X_{\lambda 1} X_{\lambda e_\lambda -3} + \dots + X_{\lambda e_\lambda -2} X_{\lambda 0})$$

über. Die aus ψ auf diese Weise hervorgegangene Form hat ebenso wie die überführende Substitution nicht nothwendig nur reelle Coefficienten. Um φ und ψ durch reelle lineare Substitutionen in reelle quadratische Formen zu verwandeln, verfahre man auf folgende Art: Wenn $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ einen reellen Elementartheiler bedeutet, dann ersetze man die Variablen $X_{\lambda 0} X_{\lambda 1} \dots X_{\lambda e_\lambda -1}$ durch die Substitution $X_{\lambda\mu} = \sqrt{\varepsilon_\lambda}\, \mathfrak{X}_{\lambda\mu}$, wobei $\mu = 0, 1, 2, \dots, e_\lambda - 1$ und ε_λ die positive oder negative Einheit ist, je nachdem ein gewisser durch die zwei zusammengehörigen Grössen c_λ und e_λ bestimmter Ausdruck C_λ, welcher von Null verschieden ist, das positive oder negative Vorzeichen besitzt. Der Theil von ψ, welcher dem reellen Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ entspricht, geht durch die neue Substitution über in:

$$\varepsilon_\lambda c_\lambda (\mathfrak{X}_{\lambda 0} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -1} + \mathfrak{X}_{\lambda 1} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -2} + \dots + \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -1} \mathfrak{X}_{\lambda 0})$$
$$+ \varepsilon_\lambda (\mathfrak{X}_{\lambda 0} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -2} + \mathfrak{X}_{\lambda 1} \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -3} + \dots + \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda -2} \mathfrak{X}_{\lambda 0}).$$

Den soeben hingeschriebenen Theil, welcher dem reellen Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ entspricht, wollen wir mit T_λ bezeichnen.

Wenn $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ ein imaginärer Elementartheiler ist, so gehört zu diesem stets ein zweiter imaginärer Elementartheiler $(\varrho - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$, sodass $c_{\lambda'}$ conjugirt imaginär zu c_λ und $e_{\lambda'} = e_\lambda$ wird. Ist also $c_\lambda = m_\lambda + i m'_\lambda$, wobei $i = \sqrt{-1}$ ist, so wird: $c_{\lambda'} = m_\lambda - i m'_\lambda$ werden. Setzt man:

$$X_{\lambda\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} + i \mathfrak{X}'_{\lambda\mu}, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \dots, e_\lambda - 1)$$
$$X_{\lambda'\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} - i \mathfrak{X}'_{\lambda\mu}$$

und ertheilt den zwei Wurzeln $\sqrt{C_\lambda}$ und $\sqrt{C_{\lambda'}}$, wobei die von den Coefficienten von φ und ψ sowie von den zwei Grössen c_λ und e_λ bezüglich $c_{\lambda'}$ und $e_{\lambda'} = e_\lambda$ abhängigen Ausdrücke C_λ und $C_{\lambda'}$ in diesem Falle conjugirt imaginär sind, ebenfalls conjugirt imaginäre Werthe, so geht der Theil von ψ, welcher den zwei Elementartheilern $(\varrho-c_\lambda)^{e_\lambda}$ und $(\varrho-c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}} = (\varrho-c_{\lambda'})^{e_\lambda}$ entspricht, über in:

$$\begin{aligned}
&(m_\lambda+im'_\lambda)[(\mathfrak{X}_{\lambda 0}+i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1})+\cdots+(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1})\cdot(\mathfrak{X}_{\lambda 0}+i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})]\\
&\qquad+[(\mathfrak{X}_{\lambda 0}+i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2})+\cdots+(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2})(\mathfrak{X}_{\lambda 0}+i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})]\\
&+(m_\lambda-im'_\lambda)[(\mathfrak{X}_{\lambda 0}-i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}-i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1})+\cdots+(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}-i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1})(\mathfrak{X}_{\lambda 0}-i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})]\\
&\qquad+[(\mathfrak{X}_{\lambda 0}-i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}-i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2})+\cdots+(\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}-i\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2})(\mathfrak{X}_{\lambda 0}-i\mathfrak{X}'_{\lambda 0})]\\
&\qquad\quad= 2m_\lambda[\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0}]\\
&\qquad\quad-2m_\lambda[\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}'_{\lambda 0}]\\
&\qquad\quad-4m'_\lambda[\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0}]\\
&\qquad\qquad+2[\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-3}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}\mathfrak{X}_{\lambda 0}]\\
&\qquad\qquad-2[\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-3}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}\mathfrak{X}'_{\lambda 0}].
\end{aligned}$$

Diesen soeben hingeschriebenen Theil, welcher zwei zusammengehörigen imaginären Elementartheilern $(\varrho-c_\lambda)^{e_\lambda}$ und $(\varrho-c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$ entspricht, wollen wir mit V_λ bezeichnen.

Gesetzt unter den τ Elementartheilern der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ seien σ reelle, so wird die Anzahl der imaginären Elementartheiler gleich $\tau-\sigma$ und $\tau-\sigma$ ist eine gerade Zahl. Man kann dann stets durch reelle lineare Substitutionen von nicht verschwindender Determinante die Formenschar $\varrho\varphi-\psi$ so transformiren, dass ψ in die reelle quadratische Form:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\frac{\tau-\sigma}{2}+\sigma} V_\lambda$$

übergeht. Vermöge unserer Substitution nimmt φ die Gestalt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} \varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})\\
&+2\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\frac{\tau-\sigma}{2}+\sigma}[(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})\\
&\qquad\qquad-(\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}'_{\lambda 0})]
\end{aligned}$$

an.*)

---

*) Wegen der näheren Ausführung des Obigen vergleiche man die grundlegende Arbeit von *Weierstrass* „Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen“ (Monats-

Die neue reelle quadratische Form, welche aus ψ durch eine reelle lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante hervorgeht, hat denselben Rang und Trägheitsindex, mithin auch dieselbe Charakteristik wie ψ. Die Charakteristik von $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum\limits_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ ist gleich oder grösser als die Summe der Charakteristiken der einzelnen Theilformen T_λ und V_λ, in welche die Form zerfällt. Zur Herleitung unseres Satzes wird mithin nur die Untersuchung der Charakteristiken von T_λ und V_λ erforderlich sein.

Wir bestimmen zuerst die Charakteristik von T_λ unter der Voraussetzung, dass c_λ von Null verschieden ist. Um die Charakteristik von T_λ für $e_\lambda = 2p+1$, also falls der Elementartheilerexponent eine ungerade Zahl ist, zu finden, führe man die neuen Variablen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-3},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}
\end{aligned}$$

in T_λ ein; dann geht T_λ über in:

$$2(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p+1}) + \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}^2.$$

Die neue reelle Form geht aus T_λ durch eine reelle lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante hervor; mithin hat sie denselben Rang, denselben Trägheitsindex und die gleiche Charakteristik wie T_λ. Die zuletzt hingeschriebene Form hat den Rang $2p+1$, den Trägheitsindex $p+1$ oder p, je nachdem $\varepsilon_\lambda c_\lambda$ ein positives oder negatives Vorzeichen hat. Infolge dessen hat die Charakteristik von T_λ in dem untersuchten Falle den Werth p, d. h. sie ist gleich der grössten in $\frac{e_\lambda}{2} = \frac{2p+1}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, also $= E\left(\frac{e_\lambda}{2}\right)$.

---

berichte der Berliner Akademie, 1868); vgl. vorzüglich den Wiederabdruck dieser Arbeit im zweiten Bande der Gesammelten Werke, bei welchem eine Berichtigung stattfand. Ferner sehe man die Darstellungen bei *Gundelfinger* in den schon citirten Supplementen zu *Hesses* Raumgeometrie und bei *F. Klein* in der ebenfalls schon angeführten Arbeit. [Nachschrift vom Januar 1900: Inzwischen ist das Werk von *Muth* „Theorie und Anwendung der Elementartheiler" erschienen; dort findet man die hier angewandten Betrachtungen auf S. 122 gegeben.]

Will man die Charakteristik von T_λ für ein von Null verschiedenes c_λ, falls $e_\lambda = 2p$ ist, bestimmen, so setze man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-3},\\
&\vdots\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + \varepsilon_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p},\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p} &= \varepsilon_\lambda c_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p} + \frac{\varepsilon_\lambda}{2} \mathfrak{X}_{\lambda p-1}.
\end{aligned}$$

Durch diese Transformation geht T_λ über in:

$$2(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p}).$$

Diese neue reelle Form, welche aus T_λ durch eine reelle lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante hervorgeht, hat den Rang $2p$ und den Trägheitsindex p, mithin die Charakteristik p. Die Charakteristik von T_λ ist also wie oben $= p$, d. h. gleich der grössten in $\frac{e_\lambda}{2} = \frac{2p}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, also wiederum $E\left(\frac{e_\lambda}{2}\right)$.

Sollte $c_\lambda = 0$ sein, so wird T_λ die einfachere Form:

$$\varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda - 2} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda - 3} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda - 2}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$

annehmen. Diese reelle quadratische Form hat den Rang $e_\lambda - 1$; wenn $e_\lambda = 2p+1$ ist, so ist der Trägheitsindex $= p$, falls $e_\lambda = 2p$ ist, so ist der Trägheitsindex $= p$ oder $p-1$, je nachdem ε_λ die positive oder negative Einheit ist. Die Charakteristik hat mithin für $e_\lambda = 2p+1$ den Werth p, für $e_\lambda = 2p$ hat sie den Werth $p-1$. Ist also e_λ ein Elementartheilerexponent, der $c_\lambda = 0$ entspricht, so ist die Charakteristik von T_λ gleich $E\left(\frac{e_\lambda - 1}{2}\right)$, ganz unabhängig davon ob e_λ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Um die Charakteristik von V_λ zu bestimmen, setze man, falls $e_\lambda = 2p$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1}\\
\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-3} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2}\\
&\vdots\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda p} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1}\\
\mathfrak{Y}_{\lambda p} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p} + 2\mathfrak{X}_{\lambda p-1} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p}\\
\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-1} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1}\\
\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-2} &= 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-3} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-2}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p+1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda p} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1},$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p} + 2\mathfrak{X}'_{\lambda p-1} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}.$$

Hierdurch geht V_λ über in:

$$\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-2} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p}$$
$$-\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-1} - \mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-2} - \cdots - \mathfrak{X}'_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}'_{\lambda p}.$$

Der Rang der soeben hergeleiteten Form ist gleich $2e_\lambda$; der Trägheitsindex, wie die Charakteristik haben den Werth e_λ. Die Determinante der überführenden reellen Substitution verschwindet nicht, weil m'_λ von Null verschieden ist; infolge dessen hat V_λ auch die Charakteristik, wie den Trägheitsindex e_λ.

Falls $e_\lambda = 2p+1$ ist, so führe man in V_λ durch folgende reelle Substitution von nicht verschwindender Determinante neue Variablen ein, man setze:

$$\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} = 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p},$$
$$\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda 2p-2} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1},$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{Y}_{\lambda p+1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}_{\lambda p} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1},$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p},$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p-1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda 2p-1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda 2p-2} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda 2p-1},$$
$$\vdots$$
$$\mathfrak{Y}'_{\lambda p+1} = 4m_\lambda \mathfrak{X}'_{\lambda p+1} + 4\mathfrak{X}'_{\lambda p} + 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p+1}.$$

Durch die Einführung der neuen Variablen geht V_λ über in:

$$\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p} + \mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{Y}_{\lambda 2p-1} + \cdots + \mathfrak{X}_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}_{\lambda p+1}$$
$$-\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p} - \mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{Y}'_{\lambda 2p-1} - \cdots - \mathfrak{X}'_{\lambda p-1}\mathfrak{Y}'_{\lambda p+1}$$
$$+(2m_\lambda \mathfrak{X}^2_{\lambda p} - 2m_\lambda \mathfrak{X}'^2_{\lambda p} - 4m'_\lambda \mathfrak{X}_{\lambda p}\mathfrak{X}'_{\lambda p}).$$

Die zuletzt hingeschriebene Form hat, da m'_λ von Null verschieden sein muss, den Rang $2(2p+1) = 2e_\lambda$.

Der Trägheitsindex, wie die Charakteristik sind $= 2p+1$. Mithin hat V_λ die Charakteristik e_λ.

Die Charakteristik von $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum\limits_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ ist gleich oder grösser als die Summe der Charakteristiken der Theile, d. h. $\geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$; hierbei ist $2s$ die Summe aller Elementartheilerexponenten, die zu sämmtlichen Theilen V_λ gehören; h durchläuft sämmtliche Exponenten von Elementartheilern, die zu allen Theilen T_λ gehören, falls T_λ einem reellen Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$, bei welchem c_λ von Null verschieden ist, entspricht; h' durchläuft in der Summe sämmtliche Exponenten derjenigen Elementartheiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden. $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ hat dieselbe Charakteristik wie ψ, mithin:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Dass der Defect von ψ gleich der Anzahl der für Null verschwindenden Elementartheiler der Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ ist, folgt sofort aus der Definition des Begriffes „Elementartheiler" und dem Umstande, dass der Rang r einer quadratischen Form ψ gleich dem Rang ihrer Determinante ist, also dadurch bestimmt wird, dass alle Determinanten $(r+1)$-ten und höheren Grades, die man aus der Determinante von ψ bilden kann, verschwinden, hingegen nicht mehr sämmtliche Determinanten r-ten Grades Null sind.

Man kann dieses Resultat auch herleiten, indem man bedenkt, ψ und $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ haben gleichen Rang. Wie das Obige zeigt, ist der Rang r von $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ gleich $2s + \Sigma h + \Sigma(h'-1)$; da $2s + \Sigma h + \Sigma h' = n$, so folgt: der Defect $d = n - r$ ist gleich der Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler. Man kann den abgeleiteten Satz noch in der folgenden etwas allgemeineren Form aussprechen:

Hat man eine Schar von reellen quadratischen Formen $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$, deren Determinante nicht identisch verschwindet, und ist $\gamma\mathfrak{P} + \eta\mathfrak{Q}$ irgend eine beliebige in der Schar enthaltene reelle quadratische Form, welche die Zahl q' als Charakteristik hat, so besteht die Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

$2s$ bedeutet hierbei die Summe der Exponenten aller imaginären Elementartheiler) der Determinante von $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$; in $\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)$ durchläuft h die Ex-*

*) Unter einem imaginären Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$ sei ein solcher verstanden, der für einen complexen Werth des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ verschwindet;

ponenten aller reellen Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$, *ausgenommen die Exponenten derjenigen Elementartheiler, welche für den Werth* $\frac{\gamma}{\eta}$ *des Verhältnisses* $\frac{\mu}{\nu}$ *verschwinden;**) h' *nimmt in* $\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ *die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler der Determinante von* $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$, *welche für den Werth* $\frac{\gamma}{\eta}$ *des Verhältnisses* $\frac{\mu}{\nu}$ *verschwinden, an.*

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort aus der Ueberlegung, dass man die Schar $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ auch in gleichwerthiger Weise als Schar $\varrho\varphi-\psi$ schreiben kann, falls man $\psi=\gamma\mathfrak{P}+\eta\mathfrak{Q}$ und $\varphi=\gamma_1\mathfrak{P}+\eta_1\mathfrak{Q}$ setzt; dabei ist $\mu=\gamma_1\varrho-\gamma$ und $\nu=\eta_1\varrho-\eta$, unter ϱ ein reeller variabler Parameter verstanden. η_1 und γ_1 sind reelle Zahlen, welche aus der Gleichung $\gamma_1\eta-\eta_1\gamma=+1$ so zu bestimmen sind, dass die Determinante von $\gamma_1\mathfrak{P}+\eta_1\mathfrak{Q}$ von Null verschieden ist. Da nach Voraussetzung die Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ nicht identisch verschwindet, so kann man stets Zahlen γ_1 und η_1 finden, welche den Bedingungen genügen. Jedem Elementartheiler $(\varrho-c_\lambda)^{e_\lambda}$ von $\varrho\varphi-\psi$ entspricht dann ein Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$, welcher denselben Exponenten e_λ hat und für den Werth $\frac{\gamma_1 c_\lambda-\gamma}{\eta_1 c_\lambda-\eta}$ des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ verschwindet.**)

§ 2.

Aus der Ungleichheit $q'\geqq s+\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)+\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ kann man die folgenden wichtigen Folgerungen ziehen:

a) *Ist* φ *irgend eine reelle quadratische Form mit* n *Variablen von nicht verschwindender Determinante*†) *und* ψ *eine beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl* q' *als Charakteristik, so hat die gleich Null gesetzte Determinante von* $\varrho\varphi-\psi$ *wenigstens* $n-2q'$ *reelle Wurzeln* ϱ; *hat die Gleichung* $|\varrho\varphi-\psi|=0$

---

da die Formenschar $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ reell ist, so sind die imaginären Elementartheiler paarweise von gleichem Grade vorhanden; diese verschwinden für conjugirt imaginäre Werthe des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$; mithin ist die Summe sämmtlicher imaginären Elementartheiler stets eine gerade Zahl $2s$.

*) Die Determinante von $\mu\mathfrak{P}+\nu\mathfrak{Q}$ besitzt dann und nur dann einen Elementartheiler, der für den Werth $\frac{\gamma}{\eta}$ des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ Null wird, falls die Form $\gamma\mathfrak{P}+\eta\mathfrak{Q}$ eine verschwindende Determinante hat.

**) Vergl. in Bezug hierauf *Weierstrass* in Bd. II der Ges. Werke, S. 24.

†) Vergl. die Anmerkung auf S. 63.

genau $n-2q'$ reelle Wurzeln, so gehören diese reellen Wurzeln zu einfachen Elementartheilern der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$, ausgenommen etwa die Wurzeln $\varrho=0$, bei welchen auch die Zahl 2 als Elementartheilerexponent auftreten darf.

b) *Ist φ irgend eine reelle quadratische Form mit n Variablen von nicht verschwindender Determinante*) und ψ eine beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik, so kann die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$, wobei ϱ ein variabler Parameter ist, nicht mehr als q' Elementartheiler, die nicht ein- oder zweifach sind, besitzen. Hat die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ genau q' Elementartheiler, die nicht ein- oder zweifach sind, so sind diese drei- oder vierfach. Besitzt die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ genau q' drei- oder vierfache Elementartheiler, so hat die Gleichung $|\varrho\varphi-\psi|=0$ nur reelle Wurzeln; die zwei- und vierfachen Elementartheiler gehören in diesem Falle nur zu etwa auftretenden Wurzeln $\varrho=0$.*

Aus jedem dieser zwei Sätze folgt, wenn man für ψ eine reelle quadratische Form mit der Charakteristik $q'=0$ setzt, das in der Einleitung besprochene *Gundelfinger*sche Theorem.

Ist ψ eine reelle quadratische Form mit der Charakteristik $q'=1$, so ergeben sich folgende Resultate. Die Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ besitzt entweder:

1. Nur ein- oder zweifache Elementartheiler, die ausschliesslich für reelle Wurzeln verschwinden, die etwa zweifach auftretenden Elementartheiler gehören nur zu den Wurzeln $\varrho=0$,

oder:

2. nur ein- oder zweifache Elementartheiler, von denen zwei für conjugirt imaginäre Grössen, alle übrigen für reelle Wurzeln verschwinden, die etwa zweifach auftretenden Elementartheiler können nur zu den Wurzeln $\varrho=0$ gehören,

oder:

3. nur reelle Wurzeln, von denen eine von Null verschiedene Wurzel zu einem zweifachen Elementartheiler, alle anderen von Null verschiedenen

*) Der Satz bleibt, wie aus dem letzten Theorem des § 1 hervorgeht, auch gültig, wenn φ eine reelle quadratische Form mit n Variablen *von verschwindender Determinante* ist, nur muss man dann voraussetzen, dass jedenfalls $|\varrho\varphi-\psi|$ nicht identisch Null sein darf.

Wurzeln zu einfachen Elementartheilern gehören, die Wurzeln $\varrho = 0$ können zu ein- oder zweifachen Elementartheilern gehören,

oder:

4. nur reelle Wurzeln, von denen eine von Null verschiedene Grösse zu einem dreifachen Elementartheiler, alle anderen von Null verschiedenen Wurzeln zu einfachen Elementartheilern gehören, die Wurzeln $\varrho = 0$ können zu ein- oder zweifachen Elementartheilern gehören,

oder:

5. n reelle Wurzeln, von denen die von Null verschiedenen zu einfachen Elementartheilern gehören, die Wurzeln $\varrho = 0$ aber vertheilen sich auf einfache, zweifache sowie einen dreifachen oder auf einfache, zweifache sowie einen vierfachen Elementartheiler.

§ 3.

Hat man eine beliebige reelle quadratische Form ψ von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik, so kann man stets reelle quadratische Formen φ von nicht verschwindender Determinante finden, dass die Determinante der Formenschar $\varrho\varphi - \psi$, wobei ϱ ein reeller variabler Parameter ist, beliebig vorgegebene Elementartheiler besitzt; jedoch muss man bei der willkürlichen Vorgabe der Elementartheiler dafür Sorge tragen, dass die imaginären Elementartheiler paarweise conjugirt imaginär von gleichem Grade gegeben sind, dass die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler genau gleich dem Defect von ψ wird und dass schliesslich die fundamentale Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$$

erfüllt ist.

Der Beweis für den aufgestellten Satz ist folgender: Entsprechend dem gegebenen System von Elementhartheilern kann man sich die reelle quadratische Form $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum\limits_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ bilden; diese Form ist durch die gegebenen Elementartheiler völlig bestimmt, nur in Bezug auf die Grössen ε_λ, die gleich $+1$ oder -1 sein können und bei der Bildung von T_λ auftreten, herrscht noch eine Willkürlichkeit. Diese Grössen ε_λ können wir uns so bestimmen, dass unsere Form $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma} T_\lambda + \sum\limits_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}} V_\lambda$ denselben Trägheitsindex wie die Form ψ erhält. Betrachten wir jetzt die Formenschar:

$$\varrho\Big[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}\varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$

$$+2\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}\{(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$

$$-(\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}'_{\lambda 0})\}\Big]-\Big[\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}T_\lambda+\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}V_\lambda\Big],$$

so hat dieselbe die vorgegebenen Elementartheiler (vergl. Seite 57). Da $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}T_\lambda+\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}V_\lambda$ denselben Trägheitsindex und denselben Rang wie ψ hat, so giebt es eine reelle lineare Substitution von nicht verschwindender Determinante, welche $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}T_\lambda+\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}V_\lambda$ in ψ überführt; wendet man diese Substitution auf

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\sigma}\varepsilon_\lambda(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$

$$+2\sum_{\lambda=\sigma+1}^{\lambda=\sigma+\frac{\tau-\sigma}{2}}\{(\mathfrak{X}_{\lambda 0}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}_{\lambda 1}\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}_{\lambda 0})$$

$$-(\mathfrak{X}'_{\lambda 0}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}+\mathfrak{X}'_{\lambda 1}\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-2}+\cdots+\mathfrak{X}'_{\lambda e_\lambda-1}\mathfrak{X}'_{\lambda 0})\}$$

an, so erlangt man eine reelle quadratische Form φ von nicht verschwindender Determinante, so dass die Determinante der reellen Formenschar $\varrho\varphi-\psi$ die vorgegebenen Elementartheiler besitzt.

Der soeben bewiesene Satz zeigt, dass die aus den Elementartheilerexponenten der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ gebildete Zahl $s+\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)+\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ bei geeigneter Wahl einer reellen quadratischen Form φ von nicht verschwindender Determinante stets die Zahl q' d. h. die Charakteristik der gegebenen Form ψ erreichen kann. Hieraus gewinnt man folgende Folgerungen:

Der höchste mögliche Elementartheilerexponent, der zu einem reellen, für einen von Null verschiedenen Werth verschwindenden Elementartheiler der Determinante der Formenschar $\varrho\varphi-\psi$ gehören kann, falls ψ eine gegebene reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik ist und für φ jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante gesetzt werden kann, ist gleich $2q'+1$. Ist $q'=\frac{r}{2}$, wobei r den Rang von ψ bedeutet, so ist *das Maximum für einen Elementartheilerexponenten, der zu einem reellen, für einen von Null verschiedenen Werth verschwindenden Elementartheiler gehört, gleich* $2q' = r$.

Hieraus ergiebt sich die folgende *Definition* der Charakteristik einer reellen quadratischen Form ψ von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante:

1. *Die Charakteristik von* ψ *ist gleich der grössten in* $\frac{\lambda}{2}$ *enthaltenen ganzen Zahl, wenn* λ *das Maximum des Elementartheilerexponenten, der zu einem reellen, für einen von Null verschiedenen Werth verschwindenden Elementartheiler der Determinante von* $\varrho\varphi - \psi$ *gehört, bedeutet; hierbei soll für* φ *jede beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante gesetzt werden können.*

Aus dem ersten Satze dieses Paragraphen fliessen noch folgende weitere *Definitionen der Charakteristik:*

2. *Die Charakteristik einer reellen quadratischen Form* ψ *von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante ist der höchste Exponent, welcher bei einem imaginären Elementartheiler der Determinante der reellen Formenschar* $\varrho\varphi - \psi$ *auftritt; für* φ *kann hierbei jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante gesetzt werden.*

3. *Die Maximalzahl für sämmtliche verschiedene imaginäre Wurzeln der gleich Null gesetzten Determinante von* $\varrho\varphi - \psi$, *wobei* ϱ *einen Parameter bedeutet, und* φ *jede beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante ist, giebt uns den doppelten Werth der Charakteristik der gegebenen reellen quadratischen Form* ψ *von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante an.*

4. *Die Anzahl der reellen Elementartheiler der Determinante von* $\varrho\varphi - \psi$, *welche vom zweiten Grade sind und für einen von Null verschiedenen Werth des* ϱ *verschwinden, giebt für ihr Maximum, wenn man für* φ *jede beliebige reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante setzt, die Charakteristik der gegebenen reellen quadratischen Form* ψ *von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante an.*

Ist ψ eine reelle quadratische Form von *verschwindender Determinante* mit der Charakteristik q', so hat die Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ einen Elementartheiler ϱ^{λ}, das Maximum für λ, wenn man für φ alle reellen quadratischen Formen von nicht verschwindender Determinante setzt, ist nach dem ersten Satze dieses Paragraphen $\lambda = 2q'+2$, sollte jedoch $q' = \frac{r}{2}$ sein, wobei r der Rang von ψ ist, so wird $\lambda = 2q'+1$.

Hieraus folgt:

Ist ψ eine reelle quadratische Form von verschwindender Determinante, so ist die Charakteristik von ψ gleich der grössten in $\frac{\lambda-1}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl, wenn λ den Maximalwerth des Exponenten für einen Elementartheiler ϱ^λ der Determinante von $\varrho\varphi-\psi$ bedeutet und man für φ jede reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante setzen kann.

§ 4.

Die vorstehenden Untersuchungen wollen wir jetzt auf Scharen *Hermitescher Formen* ausdehnen. Ist $\Phi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta}x_\alpha \overline{x}_\beta$ eine bilineare Form, bei welcher $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\beta\alpha}$ conjugirt imaginäre Grössen sind, so heisst Φ bekanntlich eine *Hermite*sche Form. Man kann zu jeder *Hermite*schen Form auf unendlich viele Arten zwei lineare Substitutionen von nicht verschwindender Determinante:

$$x_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} p_{\alpha k}\zeta_k, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, n,$$
$$\overline{x}_\alpha = \sum_{k=1}^{k=n} \overline{p}_{\alpha k}\overline{\zeta}_k,$$

bei welchen $p_{\alpha k}$ und $\overline{p}_{\alpha k}$ conjugirt imaginäre Grössen sind, finden, dass die *Hermite*sche Form Φ in die folgende Normalform:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q}\zeta_\alpha\overline{\zeta}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r}\zeta_\alpha\overline{\zeta}_\alpha$$

übergeht. Die Zahlen r und q sind hierbei genau analog wie bei den quadratischen reellen Formen Attribute der Hermiteschen Form und ganz unabhängig von den gewählten überführenden Substitutionen; r heisst der Rang, q der Trägheitsindex der *Hermite*schen Form. Die ***Charakteristik*** von Φ kann mithin ebenso wie bei den reellen quadratischen Formen als kleinere der zwei Zahlen q und $r-q$ definirt werden; führt man nach Herrn *Frobenius* die Signatur $\sigma = 2q-r$ einer *Hermite*schen Form ein, so ist $q' = \frac{r-|\sigma|}{2}$; hiebei bedeutet $|\sigma|$ den absoluten Betrag der Signatur. Die Zahl $n-r$ wollen wir wie bei den reellen quadratischen Formen den Defect d der *Hermite*schen Form nennen.

Betrachtet man in Φ die n Variablenpaare x_α und $\bar{x}_\alpha$ als conjugirt imaginär und setzt:

$$x_\alpha = u_\alpha + i v_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, n$$
$$\bar{x}_\alpha = u_\alpha - i v_\alpha,$$

wobei die $2n$ Grössen u_α, v_α reelle Variable bedeuten und $i = \sqrt{-1}$ ist, so geht die *Hermite*sche Form Φ über in eine reelle quadratische Form φ von den $2n$ reellen Variablen u_α, v_α. Hat Φ den Rang r und den Trägheitsindex q, so hat φ den Rang $2r$ und den Trägheitsindex $2q$. Die Charakteristik von φ hat den Werth $2q'$, der Defect von φ ist gleich $2d$, wenn Φ die Charakteristik q' und den Defect d besitzt. —

Wenn $\varrho\Phi - \Psi = \varrho \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta - \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta$ eine Schar von *Hermite*schen Formen mit n Variablenpaaren ist, so kann man ihr also, falls man: $x_\alpha = u_\alpha + i v_\alpha$, $\bar{x}_\alpha = u_\alpha - i v_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n$, $i = \sqrt{-1}$ setzt, die Schar reeller quadratischer Formen $\varrho\varphi - \psi$ mit $2n$ Variablen zuordnen; dann gilt folgende Relation: die Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ ist gleich dem Quadrat der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$, also $|\varrho\varphi - \psi| = |\varrho\Phi - \Psi|^2$. Besitzt die Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$ die Elementartheiler $(\varrho - c_1)^{e_1}$, $(\varrho - c_2)^{e_2}$, $(\varrho - c_3)^{e_3}, \ldots, (\varrho - c_\tau)^{e_\tau}$, so hat die Determinante von $\varrho\varphi - \psi$ die Elementartheiler $(\varrho - c_1)^{e_1}, (\varrho - c_1)^{e_1}, (\varrho - c_2)^{e_2}, (\varrho - c_2)^{e_2}, (\varrho - c_3)^{e_3}, (\varrho - c_3)^{e_3}, \ldots, (\varrho - c_\tau)^{e_\tau}, (\varrho - c_\tau)^{e_\tau}$. Nehmen wir nun an, Ψ sei eine *Hermite*sche Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q', so gilt nach dem Fundamentalsatz des § 1 für die zugeordnete reelle quadratische Form ψ mit der Charakteristik $2q'$ die Ungleichheit:

$$2q' \geqq 2s + 2\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + 2\Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right);$$

hierbei bedeutet $2s$ die Summe der Exponenten der imaginären Elementartheiler*) der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$; h durchläuft bei $\Sigma E\left(\frac{h}{2}\right)$ alle Exponenten sämmtlicher reellen Elementartheiler der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$, welche nicht für $\varrho = 0$ verschwinden; h' nimmt die Werthe aller Exponenten sämmtlicher für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler der Determinante von $\varrho\Phi - \Psi$ an. Mithin wird $q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ und der Funda-

*) Zu jedem imaginären Elementartheiler $(\varrho - c_\lambda)^{e_\lambda}$ der Determinante einer Schar $\varrho\Phi - \Psi$ von *Hermite*schen Formen gehört ein zweiter Elementartheiler $(\varrho - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$, bei dem $c_{\lambda'}$ conjugirt imaginär zu c_λ und $e_{\lambda'} = e_\lambda$ ist.

mentalsatz des § 1 bleibt auch für *Hermite*sche Formen unverändert gültig. Er lautet also:

Ist Φ eine Hermitesche Form von nicht verschwindender Determinante, so genügen die Elementartheilerexponenten der Determinante der Formenschar $\varrho\Phi - \Psi$, falls Ψ eine Hermitesche Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Werth der Charakteristik bedeutet und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, der Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right).$$

Hierbei ist $2s$ die Summe der Exponenten aller Elementartheiler, die für einen imaginären Werth des ϱ verschwinden; h durchläuft in der obigen Summe die Exponenten aller Elementartheiler, die von einem reellen, von Null verschiedenen Werth des ϱ annullirt werden, und h' nimmt die Werthe der Exponenten aller Elementartheiler, die für $\varrho = 0$ verschwinden, an. $E\left(\frac{h}{2}\right)$ bedeutet die grösste in $\frac{h}{2}$, $E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$ die grösste in $\frac{h'-1}{2}$ enthaltene ganze Zahl. Die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementartheiler ist ganz unabhängig von Φ und gleich dem Defect d von Ψ.

Infolge dieses Theorems bleiben alle im § 1 und § 2 für reelle quadratische Formen ausgesprochenen Resultate *unverändert auch für Hermitesche Formen gültig.* Der specielle Satz, welcher sich für die Determinante einer Schar von *Hermite*schen Formen $\varrho\Phi - \Psi$, wenn Φ eine *Hermite*sche Form von nicht verschwindender Determinante und Ψ eine solche von verschwindender Determinante mit der Charakteristik $q' = 0$ ist, ergiebt, war *Weierstrass* schon lange bekannt; dies geht aus einen Briefe, den Herr *Frobenius* im November 1881 an *Weierstrass* richtete, hervor. Dieser Brief, in dem Herr *Frobenius* auf *Weierstrass*' Veranlassung „dieses merkwürdige Resultat, welches *Weierstrass* in der Theorie einer speciellen Art von bilinearen Formen erhalten hatte", mit den von *Frobenius* in der Theorie der bilinearen Formen angewandten Hülfsmitteln*) bewies, ist jedoch erst 1896 in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich**)

---

*) *G. Frobenius*, Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen. Dieses Journal Bd. 84.

**) *G. Frobenius*, Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen. (Auszug aus einem Briefe an *K. Weierstrass.*) Jubelband der Züricher naturforschenden Gesellschaft, p. 20.

im Druck erschienen. Zuerst publicirt wurde das für eine Schar *Hermite*scher Formen, welche eine semidefinite *Hermite*sche Form enthält, gültige Theorem von Herrn *Gundelfinger**), der diesen Satz unabhängig gefunden hatte. Das bei einer definiten *Hermite*schen Form gültige Resultat ist schon allgemein 1864 von Herrn *Christoffel***) bewiesen worden. Die Verhältnisse, welche für Scharen von *Hermite*schen Formen, wenn die Charakteristik einer *Hermite*schen Form von nicht verschwindender Determinante, die in der Schar enthalten ist, bekannt ist, statthaben, habe ich zuerst ohne Beweis in meinem Brief an Herrn *Klein* angegeben†); hier liegt die Ausdehnung auf Formen von verschwindender Determinante vor. Durch diese Untersuchungen ist das *Christoffel-Weierstrass-Gundelfinger*sche Theorem über definite und semidefinite *Hermite*sche Formen, welche in einer Schar *Hermite*scher Formen enthalten sind, als erstes Glied in eine Kette ähnlicher Sätze eingegliedert.

Auch die Resultate des § 3 behalten für *Hermitesche Formen ihre unveränderte Gültigkeit.* Es gilt also vorzüglich der Satz:

Hat man eine beliebige Hermitesche Form Ψ von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante mit der Zahl q' als Charakteristik, so kann man stets Hermitesche Formen Φ von nicht verschwindender Determinante finden, dass die Determinante der Formenschar $\varrho\Phi - \Psi$, wobei ϱ ein reeller variabler Parameter ist, beliebig vorgegebene Elementartheiler besitzt; jedoch muss man bei der willkürlichen Vorgabe der Elementartheiler darauf achten, dass die imaginären Elementartheiler paarweise conjugirt imaginär von gleichem Grade gegeben sind, dass die Anzahl der für $\varrho = 0$ verschwindenden Elementar-

---

*) *S. Gundelfinger*, Vorlesungen über analytische Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von *F. Dingeldey*, p. 74.

**) *Christoffel*, Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass*. Dieses Journal Bd. 63 (1864). In speciellerer Form wurde dieser Satz schon vorher von *Hermite* (Comptes Rendus, tome 41) und von *Clebsch* (dieses Journal Bd. 57 und Bd. 62) angegeben.

†) Erst während der Drucklegung des vorliegenden Aufsatzes werden mir die Untersuchungen von Herrn *Corrado Segre*, auf welche mich der geschätzte Herr Verfasser gütigst brieflich aufmerksam machte, zugänglich. In Herrn *Segres* „Nuovo campo di ricerche geometriche", Nota IV., Atti della reale academia delle scienze di Torino vol. 26, 16. Nov. 1890, S. 16 Anm. findet sich das specielle Theorem, welches dem Satze 3 des § 3 im Falle *Hermite*scher Formen von nicht verschwindender Determinante entspricht, angegeben.

theiler genau gleich dem Defect von Ψ ist und dass schliesslich die fundamentale Ungleichheit:

$$q' \geqq s + \Sigma E\left(\frac{h}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{h'-1}{2}\right)$$

erfüllt ist.

Der Beweis lässt sich auf folgende Art führen: Man kann die gegebene *Hermite*sche Form Ψ, welche den Rang r und den Trägheitsindex q hat, stets durch zwei conjugirt imaginäre Substitutionen von nicht verschwindender Determinante in die Normalform:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha$$

überführen. Betrachten wir dann die reelle quadratische Form $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha^2 - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha^2$, welche gleichen Rang, gleichen Trägheitsindex und gleiche Charakteristik wie Ψ hat, so kann man nach dem ersten Satz des § 3 stets reelle quadratische Formen $\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta$ von nicht verschwindender Determinante finden, dass die Determinante der Schar reeller quadratischer Formen:

$$\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta - \left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha^2 - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha^2\right]$$

die vorgegebenen Elementartheiler hat. Ersetzt man diese Schar reeller quadratischer Formen durch die Formenschar:

$$\varrho \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta - \left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha\right],$$

so repräsentirt die letztere Schar wegen der Realität der Coefficienten $b_{\alpha\beta}$ und der Relation $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ eine Schar *Hermite*scher Formen. Die Determinante dieser Formenschar hat, da sie mit der Determinante der Schar reeller quadratischer Formen identisch ist, genau dieselben Elementartheiler wie jene. Wendet man auf $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ die zwei conjugirt imaginären Substitutionen von nicht verschwindender Determinante, welche $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=q} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha - \sum_{\alpha=q+1}^{\alpha=r} \xi_\alpha \bar{\xi}_\alpha$ in Ψ überführen, an, so geht $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta} \xi_\alpha \bar{\xi}_\beta$ in eine *Hermite*sche Form Φ von nicht verschwindender Determinante über. Da bei linearen Transformationen einer Schar bilinearer Formen die Elementartheiler invariant bleiben, so hat die Schar *Hermite*scher Formen $\varrho\Phi - \Psi$ die vorgelegten Elementartheiler.

Vermöge des bewiesenen Satzes bleiben auch die im § 3 gegebenen

Definition der Charakteristik einer reellen quadratischen Form *unverändert* gültig, wenn man überall statt der Worte „*quadratische Form*" die Worte „*Hermitesche Form*" setzt.

Auf die Untersuchung der Determinante einer Schar *Hermite*scher Formen, die uns bisher in diesem Paragraphen beschäftigte, kann auch die Frage nach den Elementartheilern *der charakteristischen Function einer besonderen Gattung bilinearer Formen* zurückgeführt werden. Diese bilinearen Formen sind auf folgende Art definirt: Es soll sich S nach der von Herrn *Frobenius**) dargelegten Symbolik als Product $A\cdot B$ zweier *Hermite*scher Formen A und B darstellen lassen, eine der zwei *Hermite*schen Formen habe dabei eine von Null verschiedene Determinante. Anders ausgedrückt: Die zu betrachtende bilineare Form $S = \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} s_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ soll so beschaffen sein, dass sich ihre Coefficienten aus den Coefficienten zweier *Hermite*scher Formen $A = \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta}x_\alpha \overline{x}_\beta$ und $B = \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n}\sum\limits_{\beta=1}^{\beta=n} b_{\alpha\beta}x_\alpha \overline{x}_\beta$ in der Form $s_{\alpha\beta} = \sum\limits_{k=1}^{k=n} a_{\alpha k}\cdot b_{k\beta}$ componiren lassen, hierbei habe entweder die Determinante von A oder die von B einen von Null verschiedenen Werth.**) Wenn $|A|$ von Null verschieden ist, so kann für die charakteristische Function von S d. i. die Determinante von $\varrho\, E-S$, wobei $E = \sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=n} x_\alpha y_\alpha$ und ϱ ein reeller variabler Parameter ist, geschrieben werden:

$$|-S+\varrho E| = |-A\cdot B+\varrho E| = |A|\cdot|-B+\varrho A^{-1}|.$$

Mithin hat also $|\varrho E-S|$ dieselben Elementartheiler wie die Determinante der aus *Hermite*schen Formen gebildeten Formenschar $\varrho A^{-1}-B$; ich bemerke noch, dass für jede *Hermite*sche Form A, wenn $|A|$ von Null verschieden ist, die *Hermite*sche Form A^{-1}, welche die reciproke Form von A ist, denselben Trägheitsindex wie A besitzt. Wenn $|B|$ von Null verschieden ist, so wird: $|\varrho E-S| = |\varrho E-A.B| = |\varrho B^{-1}-A|.|B|$, also hat $|\varrho E-S|$ dieselben Elementartheiler wie $|\varrho B^{-1}-A|$. Auf jeden Fall kann mithin die Frage nach den Elementartheilern der charakteristischen Function dieser speciellen Formengattung S auf die Untersuchung der Determinante einer Schar *Hermite*scher Formen zurückgeführt werden.

---

*) *G. Frobenius,* dieses Journal Bd. 84.

**) Vergl. *S. Gundelfinger,* Kegelschnitte, S. 70.