Über den Funktionenkörper der Normfläche einer zentral einfachen Algebra*)

Von *Ansgar Heuser* in Regensburg

In seiner Arbeit [2] konstruiert S. Amitsur zu gegebener zentral einfacher Algebra $\mathfrak{A}$ einen „generischen Zerfällungskörper" (s. u.); dieser läßt sich als der Körper der rationalen Funktionen auf dem $\mathfrak{A}$ entsprechenden „Severi-Brauer-Schema" ansehen (vgl. [6], chap. X, § 6). Einer solchen Algebra $\mathfrak{A}$ ist daneben ein weiterer Funktionenkörper in natürlicher Weise zugeordnet, nämlich der Körper $k(X)$ der rationalen Funktionen auf der Normhyperfläche X von $\mathfrak{A}$. Ziel dieser Note ist der Beweis zweier Sätze über diesen Körper:

Theorem I. *Der Körper $k(X)$ ist stets ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.*

Theorem II. *Ist $\mathfrak{A}$ ein verschränktes Produkt, so ist $k(X)$ auch generischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.*

Im folgenden bezeichne k stets einen festen (unendlichen) Körper k, $Br(k)$ seine Brauergruppe.

1. Definition 1 (Amitsur). Es sei ξ ein Element von $Br(k)$: dann heißt ein Körper $K|k$ generischer Zerfällungskörper von ξ, wenn gilt:

i) K zerfällt ξ.

ii) Zu jedem Zerfällungskörper $L|k$ von ξ gibt es eine Stelle $\varphi: K \to L \cup \infty$ über k (Sprechweise: „L ist k-Spezialisierung von K").

Die Existenz solcher Körper wurde in [2] gezeigt, vgl. auch [5].

Definition 2. Zwei Körper $K|k$ und $K'|k$ heißen äquivalent über k, wenn es Stellen $\varphi: K \to K' \cup \infty$ und $\varphi': K' \to K \cup \infty$ über k gibt.

Satz 1 (Amitsur). *Mit einem Zerfällungskörper $K|k$ von ξ ist auch jede k-Spezialisierung $L|k$ ein solcher* ([2]: Theorem 9. 1).

Bemerkung. Ist also $K|k$ generischer Zerfällungskörper zu einem ξ, so gilt dies auch für jeden zu K im obigen Sinne äquivalenten Körper $K'|k$.

---

*) Die Arbeit gibt einen Teil der Dissertation des Autors wieder. Universität Regensburg 1977.

2. Rangpolynom und reduzierte Norm (vgl. etwa [1]: chap. VIII; [3]: Kap. IV, § 7). Es sei $\mathfrak{A}$ eine zentral einfache k-Algebra der Dimension $m = n^2$, $e_1, \ldots, e_m$ eine k-Basis von $\mathfrak{A}$. $T_1, \ldots, T_m$ seien Unbestimmte über k: dann heißt das Minimalpolynom $R(Z) \in k(T_1, \ldots, T_m)[Z]$ des „allgemeinen Elements"

$$z = T_1 e_1 + \cdots + T_m e_m \in \mathfrak{A} \otimes k(T_1, \ldots, T_m)$$

über $k(T) := k(T_1, \ldots, T_m)$ das *Rangpolynom* von $\mathfrak{A}$. Für dieses gilt:

1) $R(Z; T) = \det\left(Z \cdot \mathrm{id} - \sum_{i=1}^{m} T_i \cdot \varrho(e_i)\right) \in k[Z; T]$ mit einer k-Darstellung $\varrho: \mathfrak{A} \to M_n(\bar{k})$ ($\bar{k}|k$ algebraischer Abschluß).

2) R ist eine absolut irreduzible Form (in den Variablen Z; $T_1, \ldots, T_m$) über k vom Grade n, die in Z normiert ist.

3) R ist als Polynom in Z über $k(T)$ separabel.

Bezeichnet Nred die reduzierte Norm von $\mathfrak{A} \otimes k(Z; T)$ über $k(Z; T)$, folgt demnach

$$R(Z; T) = \mathrm{Nred}(Z \cdot 1_{\mathfrak{A}} - z)$$

und

$$(-1)^n R(0; T) = \mathrm{Nred}(z) =: P(T_1, \ldots, T_m)$$

mit einer absolut irreduziblen Form P vom Grade n über k, der *Normform* der Algebra $\mathfrak{A}$. Diese definiert eine Hyperfläche X im projektiven Raum $\mathbf{P}_k^{m-1}$, die *Normfläche* von $\mathfrak{A}$.

Genau dann ist ein Element $\alpha \neq 0$ einer zentral einfachen Algebra Nullteiler, wenn seine reduzierte Norm $\mathrm{Nred}(\alpha)$ verschwindet, also:

Bemerkung. In einer Erweiterung $L|k$ besitzt X genau dann L-rationale Punkte, wenn die Algebra $\mathfrak{A} \otimes L$ Nullteiler enthält.

Die Formen R und P sind durch $\mathfrak{A}$ bis auf nichtsinguläre lineare Transformation der Variablen T_i eindeutig bestimmt, die Körper

$$F(\mathfrak{A}) := k(T)[Z] \big/ (R(Z)) \quad \text{und} \quad N(\mathfrak{A}) := \mathrm{Quot}\left(k[T] \big/ (P)\right)$$

also bis auf k-Isomorphie.

Nach Konstruktion gilt:

1) $F(\mathfrak{A}) \cong k(T)(z) \subset \mathfrak{A} \otimes k(T)$.

2) Der Funktionenkörper $k(X)$ von X ist der Unterkörper der homogenen Funktionen vom Grade 0 in $N(\mathfrak{A})$.

Bemerkung. Der Körper $F(\mathfrak{A})$ ist ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.

Beweis. $[k(T)(z) : k(T)] = n$; also ist $F(\mathfrak{A})$ über $k(T)$ isomorph zu einem maximalen kommutativen Unterring von $\mathfrak{A} \otimes k(T)$, der zugleich Körper, demnach Zerfällungskörper von $\mathfrak{A} \otimes k(T)$ ist.

Die in diesem Abschnitt eingeführten Bezeichnungen werden im folgenden beibehalten.

3. Die Körper $F(\mathfrak{A})$ und $N(\mathfrak{A})$ stehen in einfacher Beziehung zueinander:

Satz 2. *$F(\mathfrak{A})$ ist (über k) isomorph zu einer einfach transzendenten Erweiterung von $N(\mathfrak{A})$.*

Beweis. $F(\mathfrak{A}) \cong k(T_1, \ldots, T_m; z)$ mit der Relation $R(z; T) = 0$. Man wähle $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in k$ mit

$$1_{\mathfrak{A}} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$$

und setze $y_i := \lambda_i z - T_i$, $1 \leqq i \leqq m$, und damit $k(T; z) = k(y_1, \ldots, y_m)(z)$. Es folgt

$$\mathrm{Nred}\left(Z \cdot \mathrm{id} - \sum_{i=1}^{m} T_i e_i\right) = \mathrm{Nred}\left(\sum_{i=1}^{m} (\lambda_i Z - T_i)\, e_i\right),$$

mit anderen Worten

$$R(Z; T) = P(\lambda_1 Z - T_1, \ldots, \lambda_m Z - T_m).$$

Spezialisiert man Z zu z:

$$R(z; T) = 0 = P(y_1, \ldots, y_m).$$

Also $\operatorname{tr\,deg}_k k(y_1, \ldots, y_m) \leqq m-1$, andererseits $\operatorname{tr\,deg}_k k(y_1, \ldots, y_m)(z) = m$, folglich:

1) z transzendent über $k(y_1, \ldots, y_m)$,

2) $\operatorname{tr\,deg}_k k(y_1, \ldots, y_m) = m-1$; d. h.

$$k(y_1, \ldots, y_m) \cong \mathrm{Quot}\, k[Y_1, \ldots, Y_m] \big/ (P(Y_1, \ldots, Y_m)) \cong N(\mathfrak{A}).$$

Daraus erhält man schon

Theorem I. *Der Funktionenkörper der Normfläche einer zentral einfachen Algebra $\mathfrak{A}$ ist ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Der Körper $N(\mathfrak{A})$ ist einfach transzendente Erweiterung seines Unterkörpers $k(X)$, also zu diesem im Sinne von Definition 2 äquivalent; $N(\mathfrak{A})$ seinerseits ist zu $F(\mathfrak{A})$ nach eben bewiesenem Satz äquivalent — dieser Körper jedoch ist, wie in Abschnitt 2. bemerkt, ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$. Aus Satz 1 folgt die Behauptung.

4. Wann ist nun $k(X)$ darüberhinaus generischer Zerfällungskörper? Der nächste Satz liefert zunächst eine Umformulierung:

Satz 3. *$\mathfrak{A}$ sei zentral einfache k-Algebra der Dimension n^2, X ihre Normhyperfläche; dann sind äquivalent:*

i) *$k(X)$ ist generischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.*

ii) *Es gibt einen generischen Zerfällungskörper $K|k$ von $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft: K enthält einen Unterkörper $K'|k$, so daß $K|K'$ eine einfache Erweiterung vom Grade n ist.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii): Der zu $k(X)$ äquivalente Körper $F(\mathfrak{A})$ hat diese Eigenschaft:

$$F(\mathfrak{A}) = k(T_1, \ldots, T_m)(z).$$

ii) $\Rightarrow$ i): Sei $K|k$ generischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$, $K = K'(\alpha)$ mit einem Unterkörper $K'|k$ von K, α algebraisch vom Grade n über K'. Man betrachte die Algebra

$$\mathfrak{A}' := \mathfrak{A} \otimes K';$$

als Zerfällungskörper vom Grade n über K' läßt sich K (über K') in $\mathfrak{A}'$ einbetten, insbesondere gibt es eine Darstellung

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \quad \text{mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K'.$$

α ist Nullstelle seines charakteristischen Polynoms, das durch Spezialisierung der Variablen T_i auf α_i aus dem Rangpolynom $R(Z; T)$ entsteht:

$$R(\alpha; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 0.$$

Da α über K' den Grad n hat, ist $R(Z; \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in K'[Z]$ bereits das Minimalpolynom von α über K'.

Es gibt nun zunächst eine Stelle $\tilde{\varphi}: k(T_1, \ldots, T_m) \to k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \cup \infty$ über k mit $\tilde{\varphi}(T_i) = \alpha_i$ $(1 \leqq i \leqq m)$; diese läßt sich auf die Erweiterung $F(\mathfrak{A}) = k(T)(z)$ fortsetzen zu einer Stelle

$$\varphi: F(\mathfrak{A}) \to \Omega \cup \infty$$

in den algebraischen Abschluß Ω von $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

$z \in F(\mathfrak{A})$ ist ganz über $k[T_1, \ldots, T_m]$, insbesondere ganz über dem Bewertungsring von $\tilde{\varphi}$, liegt demnach im Bewertungsring von φ: sei

$$\beta := \varphi(z) \in \Omega.$$

β genügt der Gleichung

$$\varphi(R(z; T)) = 0 = R(\beta, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

erzeugt also über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ einen Körper vom Grade n; da andererseits der Restklassenkörper zu φ ganz allgemein über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ höchstens den Grad $[F(\mathfrak{A}): k(T)] = n$ hat, muß der Körper $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)(\beta)$ bereits der volle Restklassenkörper sein:

$$\varphi: F(\mathfrak{A}) \to k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)(\beta) \cup \infty.$$

α und β sind Nullstellen des gleichen irreduziblen Polynoms über $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$; der Restklassenkörper zu φ läßt sich also (über k) in K einbetten und damit die Stelle φ sich als Stelle

$$\varphi: F(\mathfrak{A}) \to K \cup \infty$$

ansehen. Damit ist der Körper $F(\mathfrak{A})$ (und also auch $k(X)$) als zu K äquivalent nachgewiesen, folglich ebenfalls generischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$.

Korollar. *Ist der Normflächenkörper der Algebra $\mathfrak{A}$ generischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$, so auch der Normflächenkörper jeder Algebra $\mathfrak{A} \otimes M_r(k)$, $r \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist der Körper $F(\mathfrak{A})$ generischer Zerfällungskörper, $F(\mathfrak{A}) = k(T_1, \ldots, T_m)(z)$.

Man bilde den Körper $K := F(\mathfrak{A})(S)$ mit einer Unbestimmten S — dieser ist dann immer noch generischer Zerfällungskörper zu $\mathfrak{A}$.

K enthält $K' := k(T_1, \ldots, T_m)(S')$ mit $[K:K'] = rn$; ferner ist die Erweiterung $K = K'(z, S)|K'$ nach dem Satz vom primitiven Element einfach, da z separabel über $k(T)$ und damit über K' ist. Nach dem Kriterium Satz 3 ist dann der Funktionenkörper der Normfläche von $\mathfrak{A} \otimes M_r(k)$ ebenfalls generischer Zerfällungskörper.

Mit dieser Beobachtung gewinnt Satz 3 die Formulierung:

Satz 3'. *Sei $\xi \in Br(k)$, s der Schurindex von ξ (= Wurzel aus der Dimension des ξ repräsentierenden Schiefkörpers), $\mathfrak{A}$ eine zentral einfache k-Algebra der Klasse ξ mit* $\dim \mathfrak{A} = r^2 s^2$, $r \in \mathbb{N}$: *dann sind äquivalent*:

i) *Der Normflächenkörper von $\mathfrak{A}$ ist generischer Zerfällungskörper von ξ.*

ii) *ξ besitzt einen generischen Zerfällungskörper $K|k$ mit der Eigenschaft: K enthält einen Unterkörper $K'|k$, so daß K einfache Erweiterung vom Grade $r's$ von K mit einem Teiler r' von r ist.*

Bemerkung. Für hinreichend „großes" r (im Sinne der Teilbarkeitsrelation) ist Bedingung ii) stets erfüllt: der von Amitsur-Roquette angegebene generische Zerfällungskörper $K|k$ ist eine endlich erzeugte separable (sogar reguläre) Erweiterung von k, besitzt also eine separierende Transzendenzbasis B; $K|k(B)$ ist demnach eine einfache algebraische Erweiterung, deren Grad Vielfaches von s sein muß, da die rein transzendente Erweiterung $k(B)|k$ den Index von ξ unverändert läßt.

Im Falle verschränkter Produkte kann man dies explizit verfolgen; erinnert sei an:

5. Konstruktion eines generischen Zerfällungskörpers (nach Roquette [5]). $L|k$ sei galoissche Erweiterung mit der Gruppe G; diese operiert (von links) auf der projektiven linearen Gruppe $PGL_n(L)$. Die Cohomologiemenge $H^1(G, PGL_n(L))$ beschreibt die Klassen zentral einfacher k-Algebren der Dimension n^2 mit Zerfällungskörper L (vgl. [6]: chap. X, § 5); dabei ist der Zusammenhang der folgende:

i) Zu einer solchen Algebra $\mathfrak{A}$ sei

$$\varrho: \mathfrak{A} \to M_n(L)$$

eine L-Darstellung; zu jedem $\sigma \in G$ gibt es ein $P_\sigma \in GL_n(L)$ mit

$$\varrho(a)^\sigma = P_\sigma^{-1} \varrho(a) P_\sigma \quad \text{für alle } a \in \mathfrak{A};$$

die Klassen der P_σ modulo L^* bilden einen 1-Cozykel.

ii) Umgekehrt repräsentiere man einen 1-Cozykel mit Werten in $PGL_n(L)$ durch Matrizen $P_\sigma \in GL_n(L)$ und definiere eine Algebra $\mathfrak{A}$ durch

$$\mathfrak{A} := \{A \in M_n(L) | A^\sigma = P_\sigma^{-1} A P_\sigma \quad \text{für alle } \sigma \in G\}.$$

Sei nun eine n^2-dimensionale k-Algebra $\mathfrak{A}$ gegeben, L ein galoisscher Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ mit $\mathrm{Gal}(L|k) = G$. $\{P_\sigma | \sigma \in G\}$ sei ein System von Matrizen aus $GL_n(L)$, die modulo L^* die zu $\mathfrak{A}$ gehörende Cohomologieklasse repräsentieren. Man wähle Unbestimmte $\{T_\sigma | \sigma \in G\}$ über L; auf dem Körper $L(T)_0$ der homogenen rationalen Funktionen in den T_σ vom Grade 0 über L operiert G durch:

$$\sigma \in G, f \in L(T)_0: \quad \sigma(f) = f^\sigma(P_\sigma(T_\varrho)_{\varrho \in G});$$

dabei sei f^σ die durch Konjugation der Koeffizienten aus f hervorgehende Funktion, $P_\sigma(T_\varrho)$ die Linearform $\sum\limits_{\tau \in G} p_{\varrho,\tau} T_\tau$ mit $P_\sigma = (p_{\varrho,\tau})_{\varrho,\tau \in G}$.

Dann ist der Fixkörper $K := L(T)_0^G$ unter dieser Operation ein generischer Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & L(T)_0 = L \cdot K \arrow[dd, dash, "G"] \\
L \arrow[ur, dash] \arrow[dd, dash, "G"'] & \\
 & K \\
k \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

6. Darstellung eines verschränkten Produkts. Die Algebra $\mathfrak{A}$ sei ein verschränktes Produkt, d.h. sie enthalte einen galoisschen Unterkörper $L|k$ vom Grade n über k. Dann gibt es eine Basis $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ $(G = \mathrm{Gal}(L|k))$ von $\mathfrak{A}$ über L ($\mathfrak{A}$ als L-Links-Vektorraum betrachtet) mit

$$u_\sigma u_\tau = c_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau}, \quad c_{\sigma,\tau} \in L^*, \quad \sigma, \tau \in G$$

und

$$u_\sigma \alpha u_\sigma^{-1} = \alpha^\sigma \quad \text{für alle } \alpha \in L \subset \mathfrak{A}.$$

Die $c_{\sigma,\tau}$ bilden einen 2-Cozykel; dabei sei $u_{\mathrm{id}} = 1_{\mathfrak{A}}$ gewählt, so daß also $c_{\mathrm{id},\sigma} = c_{\sigma,\mathrm{id}} = 1$ für alle $\sigma \in G$.

Die Darstellung durch Rechtstranslation

$$\mathfrak{A}^0 \longrightarrow \mathrm{End}_L(\mathfrak{A}), \ a \longmapsto (b \longmapsto ba) \quad (\mathfrak{A}^0 \text{ die zu } \mathfrak{A} \text{ invers-isomorphe Algebra})$$

liefert in der Basis $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ nach Übergang zur transponierten die Darstellung

$$\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow M_n(L)$$

mit $\varphi(u_\sigma) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & c_{\tau,\sigma} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \tau \\ \tau\sigma & \end{array}$ und $\varphi(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \alpha^\tau & \\ & & \ddots \end{pmatrix} & \tau, \\ \tau & \end{array}$ $\sigma \in L$. Mit den Matrizen

$$P_\sigma := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & c_{\sigma,\tau}^{-1} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \sigma\tau \\ \tau & \end{array}$$

folgt dann (wie aus der Cozykelbedingung für $c_{\sigma,\tau}$ folgt):

$$\varphi(\mathfrak{A}) = \{A \in M_n(L) | P_\sigma A^\sigma = A P_\sigma \quad \text{für alle } \sigma \in G\}.$$

Die $\mathfrak{A}$ entsprechende Cohomologieklasse wird also durch den Cozyklus $\{P_\sigma\}$ repräsentiert; die Operation von G auf $L(T)_0$ (siehe 5.) sieht demnach explizit so aus:

$$\sigma \in G, f \in L(T)_0: \quad \sigma(f) = f^\sigma\big((c_{\sigma,\varrho}^{-1} T_{\sigma\varrho})_{\varrho \in G}\big).$$

Erzeuger von $K := L(T)_0^G$. Die hier angegebene Konstruktion folgt Amitsur ([2]: §10, pp. 36ff), umgeht jedoch einen Fehler beim Beweis von Cor. 10. 1.

i) Sei $L=k(\omega)$, $L(T)_0=K\cdot L=K(\omega)$; man wähle ein festes $\sigma\in G$, $\sigma\neq\mathrm{id}$, und betrachte das Element

$$t := T_\sigma T_{\mathrm{id}}^{-1} \in L(T)_0.$$

Es gilt

$$t = x_1 + x_2\omega + \cdots + x_n\omega^{n-1} \text{ mit gewissen } x_i\in K,$$

$$\varrho(t) = x_1 + x_2\varrho(\omega) + \cdots + x_n\varrho(\omega)^{n-1},\ \varrho\in G;$$

dieses Gleichungssystem ist nicht singulär, da $L|k$ separabel ist, also

$$L(\{\varrho(t)|\varrho\in G\}) = L(x_1,\ldots,x_n)\subset L(T)_0.$$

Explizit:

$$\varrho(t) = c_{\sigma,\sigma}^{-1} T_{\varrho\sigma} T_\varrho^{-1},$$

die homogenen Funktionen $T_{\varrho\sigma}T_\varrho^{-1}$, $\varrho\in G$, die $L(T)_0$ über L erzeugen, liegen demnach alle im Körper $L(\{\varrho(t)|\varrho\in G\}) = L(x_1,\ldots,x_n)$:

$$L(T)_0 = L(x_1,\ldots,x_n).$$

Der Unterkörper $k(x_1,\ldots,x_n)$ von K erfüllt

$$k(x_1,\ldots,x_n)\cdot L = K\cdot L = L(T)_0;$$

da $K|k$ regulär ist ([5]: Lemma 3, p. 425), K also zu L über k linear disjunkt, folgt:

$$K = k(x_1,\ldots,x_n).$$

ii) Für jedes $\varrho\in G$ gilt ($\sigma\in G$ immer noch fest, $\sigma\neq\mathrm{id}$):

$$\varrho(t)T_\varrho - c_{\varrho,\sigma}^{-1}T_{\varrho\sigma} = 0.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in den T_ϱ mit Koeffizienten in $L(T)$, die Koeffizientenmatrix hat die Gestalt

$$\Delta - \Sigma,$$

wobei Δ die Diagonalmatrix aus den $\varrho(t)$ und Σ die monomiale Matrix

$$\Sigma = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{\varrho,\sigma}^{-1} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} & \varrho \\ \varrho\sigma & \end{array}$$

ist; Σ ist nichts anderes als $\varphi(u_\sigma^{-1})^t$. Es gilt also:

$$\det(\Delta-\Sigma) = 0 = g(x_1,\ldots,x_n) \text{ mit einem Polynom } g\in L[X_1,\ldots,X_n].$$

Die Koeffizienten von g liegen bereits in k, denn für ein $\tau \in G$:

$$g^\tau(x_1, \ldots, x_n) = \det(\Delta^\tau - \Sigma^\tau);$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\omega^{i-1} \cdot 1_{\mathfrak{A}}),$$

also

$$\Delta^\tau = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\omega^{i-1} \cdot 1_{\mathfrak{A}})^\tau = \sum_{i=1}^{n} x_i P_\tau^{-1} \varphi(\omega^{i-1} \cdot 1_{\mathfrak{A}}) P_\tau = P_\tau^{-1} \Delta P_\tau.$$

Ebenso: $\Sigma^t = \varphi(u_\sigma^{-1})$, also $(\Sigma^t)^\tau = P_\tau^{-1} \Sigma P_\tau$, da $\varphi(u_\sigma^{-1}) \in \mathfrak{A}$,

$$\det(\Delta - \Sigma)^\tau = \det\big(P_\tau^{-1}(\Delta - \Sigma) P_\tau\big) = \det(\Delta - \Sigma) = g(x_1, \ldots, x_n).$$

Dabei ist $g(X_1, \ldots, X_n)$ von der Form

$$g(X_1, \ldots, X_n) = N_{L(T)_0/K}(X_1 + X_2\omega + \cdots + X_n\omega^{n-1})$$
$$+ \text{Formen vom Grade} < n \text{ in } X_1, \ldots, X_n.$$

g ist normiert in X_1, ferner irreduzibel (da die Normform es ist). $\operatorname{tr}\deg_k K = n-1$: also

$$K = k(x_2, \ldots, x_n)(x_1)$$

mit algebraisch unabhängigen $x_2, \ldots, x_n$; x_1 algebraisch vom Grade n über $k(x_2, \ldots, x_n)$.

Als Resultat ergibt sich:

Satz 4. *Ist $\mathfrak{A}$ ein verschränktes Produkt zur galoisschen Erweiterung $L|k$ vom Grade n, so hat der Amitsur-Roquettesche generische Zerfällungskörper $K|k$ die Gestalt:*

$$K = k(x_1, \ldots, x_n)$$

mit der Relation $F_n(x_1, \ldots, x_n) + F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + F_0(x_1, \ldots, x_n)$, wo die F_i Formen über k vom Grade i sind; F_n ist die — in der Variablen x_1 normierte — Normform der Erweiterung $L|k$.

Bemerkung. Ist $L|k$ zyklisch mit $\operatorname{Gal}(L|k) = \langle\sigma\rangle$, $\mathfrak{A} = (L, \sigma, \alpha)$ mit einem $\alpha \in L^*$, so hat diese Relation die einfache Form:

$$N_{L|k}(x_1 + x_2\omega + \cdots + x_n\omega^{n-1}) - \alpha.$$

Satz 4 liefert sofort (mit dem Kriterium Satz 3):

Theorem II. *Der Funktionenkörper der Normfläche eines verschränkten Produkts ist generischer Zerfällungskörper dieser Algebra.*

Korollar. *Sei $\xi \in Br(k)$, $s_0 := \min\{[L:k] \mid L$ galoisscher Zerfällungskörper von $\xi\}$; dann ist der Normflächenkörper jeder ξ repräsentierenden Algebra $\mathfrak{A}$, deren Dimension Vielfaches von s_0^2 ist, generischer Zerfällungskörper von ξ.*

Bemerkung. s_0 ist jedenfalls ein Teiler von $(\operatorname{ind}\xi)!$, wo $\operatorname{ind}\xi$ den Schurindex von ξ bezeichne.

Beweis des Korollars. ξ wird dargestellt durch ein verschränktes Produkt $\mathfrak{B}$ mit

$$\dim \mathfrak{B} = s^2;$$

der Normflächenkörper jeder Algebra

$$\mathfrak{A} = M_r(k) \otimes \mathfrak{B}, \quad r \in \mathbb{N}$$

ist nach dem Korollar zu Satz 3 und dem eben bewiesenen Theorem generischer Zerfällungskörper von ξ.

Bemerkung. Im Falle einer Quaternionenalgebra $\mathfrak{A}$ ist die Normform P eine quadratische Form; die Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ sind genau die Körper $L|k$, über denen P isotrop wird: alle diese Körper entstehen durch k-Spezialisierung aus dem Funktionenkörper von P, wie M. Knebusch ([4]) gezeigt hat (vgl. auch [7]). Theorem II verallgemeinert diesen Sachverhalt.

Literatur

[1] *A. A. Albert*, Structure of algebras, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **24**, 3. ed., 1968.
[2] *S. A. Amitsur*, Generic splitting fields of central simple algebras, Ann. of Math. **62** (1955), 8—43.
[3] *M. Deuring*, Algebren, 2. Aufl., Ergebnisse der Mathematik, Berlin-Heidelberg-New York 1968.
[4] *M. Knebusch*, Generic splitting of quadratic forms. I, Proc. London Math. Soc. (3) **33** (1976), 65—93.
[5] *P. Roquette*, On the Galois cohomology of the projective linear group, Math. Ann. **150** (1963), 411—439.
[6] *J.-P. Serre*, Corps locaux, 2ᵉ ed., Paris 1968.
[7] *E. Witt*, Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz, Math. Z. **39** (1935), 462—467.

Fachbereich Mathematik der Universität, Universitätsstraße 31, D-8400 Regensburg

Eingegangen 22. September 1977