UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

СТРУКТУРА ОДНОЙ ФОРМУЛЫ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА—ИНГАМА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

Как известно ([1], стр. 294, ср. [5], стр. 142) имеет место следующая формула Харди—Литтлвуда

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|^2 \mathrm{d}t = T\ln T + (2c-1-\ln 2\pi)T + O(\sqrt{T}\ln T) \tag{1}$$

с оценкой Ингама для остаточного члена (c — постоянная Эйлера).

Полагая, например, $V=\sqrt{T}\Psi\ln T$, ($\Psi=\Psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция), получаем

$$\int_T^{T+V} Z^2(t)\,\mathrm{d}t = V\ln T + (2c-\ln 2\pi)V + O(\sqrt{T}\ln T), \tag{2}$$

(относительно $Z(t)$ см. [5], стр. 94).

В этой работе мы находим в промежутке $\langle T, T+V\rangle$ два несвязных множества (более точно — два семейства несвязных множеств), относительно которых мы обнаруживаем асимметрию в распределении значений функции $Z^2(t)$.

1. Пусть (ср. [3], (1), (3))

$$F_1(v) = F_1(v\,;\,T,\,V) =$$

$$= \bigcup_{T\leqq t_\nu\leqq T+V} \{t\colon t_\nu(-v)<t<t_\nu(v),\ 0<v\leqq\pi/4\}, \tag{3}$$

$$F_2(w) = F_2(w\,;\,T,\,V) =$$

$$= \bigcup_{T\leqq t_\nu\leqq T+V} \{t\colon t_\nu(\pi/2-w)<t<t_\nu(\pi/2+w),\ 0<w\leqq\pi/4\}. \tag{4}$$

Очевидно (см. [4], (8), $H\to V$)

$$m(F_1)=\frac{2v}{\pi}V+O(v\Psi^2),\quad m(F_2)=\frac{2w}{\pi}V+O(w\Psi^2), \tag{5}$$

где $m(F_1)$, $m(F_2)$ обозначает меры множеств F_1, F_2 соответственно.

Имеет место

Теорема.

$$\int_{F_1(v)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2v}{\pi}V\ln\frac{T}{2\pi}+\frac{2}{\pi}(2vc+\sin 2v)V+O(\sqrt{T}\ln T), \tag{6}$$

$$\int_{F_2(w)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2w}{\pi}V\ln\frac{T}{2\pi}+\frac{2}{\pi}(2wc-\sin 2w)V+O(\sqrt{T}\ln T). \tag{7}$$

Следствие 1.

$$\int_{F_1(v)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t-\int_{F_2(v)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}V\sin 2v+O(\sqrt{T}\ln T), \tag{8}$$

$$\int_{F_1(v)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t+\int_{F_2(v)} Z^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{4v}{\pi}V\ln\frac{T}{2\pi}+\frac{8vc}{\pi}V+O(\sqrt{T}\ln T). \tag{9}$$

Полагая $F_1(\pi/4)=\bar{F}_1$, $F_2(\pi/4)=\bar{F}_2$ и принимая во внимание, что (см. (5))

$$m(\bar{F}_1)\sim m(\bar{F}_2)\sim\frac{1}{2}V, \tag{10}$$

получаем (см. (8))

Следствие 2.

$$\frac{1}{m(\bar{F}_1)}\int_{\bar{F}_1} Z^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{m(\bar{F}_2)}\int_{\bar{F}_2} Z^2(t)\,\mathrm{d}t\sim\frac{8}{\pi}. \tag{11}$$

Примечание 1. Соотношение (11) выражает упоминавшуюся асимметрию в распределении значений функции $Z^2(t)$ относительно множеств $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, составляющих (в основном) промежуток $\langle T, T+V\rangle$.

2. Основой для доказательства теоремы является следующая

Лемма.

$$\sum_{T\leq t_v\leq T+V} Z^2[t_v(\tau)]=\frac{1}{2\pi}V\ln^2\frac{T}{2\pi}+$$

$$+\frac{1}{\pi}(c+\cos 2\tau)V\ln\frac{T}{2\pi}+O(\sqrt{T}\ln^2 T),\qquad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle. \tag{12}$$

Доказательство. Из формулы Римана—Зигеля ([4], (2)) обычным способом получаем (ср. [2], (57), (58),

$$H\to V=\sqrt{T}\Psi\ln T,\ P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}})$$

$$Z(t)=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(T^{-1/4}\Psi\ln T). \tag{13}$$

Отсюда (см. [4], (1), (13), $t_v(\tau)\in\langle T, T+V\rangle$)

$$Z^2[t_v(\tau)]=S_1+O(T^{1/6}\ln T\,.\,T^{-1/4}\Psi\ln T)+O(T^{-1/2}\Psi^2\ln^2 T)=$$
$$=S_1+O(T^{-1/12}\Psi\ln^2 T), \tag{14}$$

где

$$S_1=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{n}+2\cos 2\tau+4S_2+2S_3\cos 2\tau+2S_4\sin 2\tau, \tag{15}$$

$$S_2=\sum_{m<n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left[t_v(\tau)\ln\frac{n}{m}\right], \tag{16}$$

$$S_3=\sum_{\substack{m,\,n\\ mn\geqq 2}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos[t_v(\tau)\ln(mn)], \tag{17}$$

$$S_4=\sum_{\substack{m,\,n\\ mn\geqq 2}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sin[t_v(\tau)\ln(mn)]. \tag{18}$$

Применяя для любого фиксированного $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ метод ван дер Корпута—Титчмарша ([6], стр. 101—105), получаем оценку

$$\sum_{T\leqq t_v\leqq T+V}(4S_2+2S_3\cos 2\tau+2S_4\sin 2\tau)=O(\sqrt{T}\ln^2 T). \tag{19}$$

Наконец, применяя формулу

$$2\sum_{n<P_0}\frac{1}{n}=\ln\frac{T}{2\pi}+2c+O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \tag{20}$$

в силу (14), (15), (19), [3], (23), $(H\to V)$, получаем (12).

Теперь мы завершим

Доказательство теоремы.

(a) Интегрируя (12) по τ в промежутке $\langle -v, v\rangle$, (ср. [4], (52), $H\to V$, $x\to v$) получаем (6).

(b) Полагая в (12) $\tau\to\pi/2-\tau$, $(\cos 2\tau\to-\cos 2\tau)$, и интегрируя по τ в промежутке $\langle -w, w\rangle$, получаем (7), если принять во внимание, что

$$\int_{-w}^{w}Z^2\left[t_v\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)\right]d\tau=\int_{\pi/2-w}^{\pi/2+w}Z^2[t_v(x)]\,dx. \tag{21}$$

Примечание 2. Полагая в (9) $v=\pi/4$ получаем (2), т. е. (14)—(21) представляет собой новое доказательство формулы (2).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ingham, A. E.: Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function. Proc. London Math. Soc. (2), 27 (1926), 273—300.

[2] Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[3] Мозер, Ян: Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. Acta Arith., 31 (1976), 45—51.

[4] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля. Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[5] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана. Москва 1953.

[6] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV. Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 19. 5. 1981

SÚHRN

O ŠTRUKTÚRE JEDNÉHO HARDYHO—LITTLEWOODOVHO—INGHAMOVHO VZORCA V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

V tejto práci sú odvodené nové vety o strednej hodnote pre funkciu $Z^2(t)$, vzhľadom na dva systémy nesúvislých množín, definovaných v intervale $\langle T, T+\sqrt{T}\Psi(T)\ln T\rangle$ ($\Psi(T)$ je ľubovoľne pomaly rastúca k $+\infty$ funkcia a $Z(t)$ je funkcia vchádzajúca do Riemannovho—Siegelovho vzorca).

SUMMARY

ON THE STRUCTURE OF A HARDY—LITTLEWOOD—INGHAM FORMULA IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

In this paper new mean-value theorems for $Z^2(t)$ with respect to two collections of disconected sets defined in the segment $\langle T, T+\sqrt{T}\Psi(T)\ln T\rangle$ are given ($\Psi(T)$ — is an arbitraryly slowly increasing to $+\infty$ and $Z(t)$ is a function expressed by mean of the Riemann—Siegel formula).