UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

О СВОЙСТВАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\{Z[t_\nu(\tau)]\}$ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

В работе [6], в связи с формулой Римана—Зигеля (см. [7], стр. 94)

$$Z(t)=2\sum_{n<\bar{t}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}),\qquad \bar{t}=\sqrt{\frac{t}{2\pi}},\tag{1}$$

мы ввели в теорию $\zeta(s)$ семейство последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$ согласно условию

$$\vartheta[t_\nu(\tau)]=\pi\nu+\tau,\qquad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle\tag{2}$$

где $\nu_0\leqq\nu$ и ν_0,ν — целые положительные числа (ν_0 — фиксированное, достаточно большое число).

На основе (2) мы ввели следующие системы несвязных множеств

$$\begin{gathered}G_1=G_1(x,T,H_1)=\\ =\bigcup_{T\leqq t_{2\nu}\leqq T+H_1}\{t\colon t_{2\nu}(-x)<t<t_{2\nu}(x);\quad 0<x\leqq\pi/2\},\\ G_2=G_2(y,T,H_1)=\\ =\bigcup_{T\leqq t_{2\nu+1}\leqq T+H_1}\{t\colon t_{2\nu+1}(-y)<t<t_{2\nu+1}(y);\quad 0<y\leqq\pi/2\},\end{gathered}\tag{3}$$

где

$$H_1=T^{1/6}\Psi^2\ln^5T$$

и $\Psi=\Psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция ($t_\nu(0)=t_\nu$).

Отсюда, в результате синтеза дискретного и непрерывного подходов:

(a) суммирования по ν,

(b) интегрирования по τ,

мы получили интегральные теоремы о среднем, линейные относительно $Z(t)$, которые до тех пор отсутствовали в теории $\zeta(s)$. Вот они:

$$\frac{1}{m(G_1)}\int_{G_1} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim 2\frac{\sin x}{x},$$

$$\frac{1}{m(G_2)}\int_{G_2} Z(t)\,\mathrm{d}t \sim -2\frac{\sin y}{y},$$

($m(G_1)$, $m(G_2)$ — меры множеств G_1, G_2 соответственно). Эти формулы содержат новую информацию о распределении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ в промежутке $\langle T, T+H_1\rangle$.

В предлагаемой работе мы получим выражения для сумм

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H_2}\{Z[t_\nu(\tau)]-Z(t_\nu)\},$$

$$\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H_2}(-1)^\nu\{Z[t_\nu(\tau)]-Z(t_\nu)\},\quad H_2\in(0, \sqrt[4]{T}\rangle$$

и соответствующие интегральные формулы. Притом результаты получены в форме позволяющей доказать существенное влияние гипотезы Линделёфа на оценки соответствующих O-членов.

1. Приступим к перечислению результатов. Положим

$$F(\tau, T, H_2)=\sum_{T\leqq t_\nu\leqq T+H_2} Z[t_\nu(\tau)]. \tag{4}$$

Пусть

$$S(a, b)=\sum_{0<a\leqq n<b\leqq 2a} n^{it},\quad b\leqq\sqrt{\frac{t}{2\pi}}. \tag{5}$$

Имеет место

Теорема 1. Если

$$|S(a, b)|<A(\Delta)\sqrt{a}t^\Delta,\qquad \Delta\in(0, 1/6\rangle, \tag{6}$$

то

$$F(\tau, T, H_2)-F(0, T, H_2)=O(T^\Delta\ln T), \tag{7}$$

равномерно отностиельно $\tau\in\langle-\pi, \pi\rangle$.

В случае (см. [2])

$$\Delta=\frac{173}{1067}+\varepsilon,\qquad \varepsilon>0, \tag{8}$$

(ε — сколь угодно малое число) мы имеем

Следствие 1.

$$F(\tau, T, H_2)-F(0, T, H_2)=O(T^{\frac{173}{1067}+2\varepsilon}). \tag{9}$$

Следствие 2. По гипотезе Линделёфа ($\Delta \to \varepsilon/2$, [1], стр. 89)

$$F(\tau, T, H_2) - F(0, T, H_2) = O(T^{\varepsilon}). \tag{10}$$

Следствие 3. (Свойство наследственности) Если для некоторого $\bar{\tau} \in \langle -\pi, \pi \rangle$ имеет место

$$F(\bar{\tau}, T, H_2) = O(T^{\Delta} \ln T),$$

то,

$$F(\tau, T, H_2) = O(T^{\Delta} \ln T)$$

для всех $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

2. В работах [4], [5] мы получили (в случае (6)) соотношение

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H_2} (-1)^{\nu} Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{\Delta} \ln T). \tag{11}$$

Далее, в работе [6] мы показали, что соотношение (11) не является инвариантным относительно трансляций

$$t_\nu \to t_\nu(\tau).$$

А именно мы показали, что в случае (6) имеет место (см. [6], (46), (53))

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H_2} (-1)^{\nu} Z[t_\nu(\tau)] = \frac{1}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \cos \tau + O(T^{\Delta} \ln T), \tag{12}$$

(O — оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$), Следовательно (см. (11), (12)) имеет место

Формула.

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H_2} (-1)^{\nu} \{Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu)\} = -\frac{2}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \sin^2 \frac{\tau}{2} + O(T^{\Delta} \ln T). \tag{13}$$

Теперь из (7), (13) получается

Теорема 2. Из (6) следует

$$\begin{gathered}\sum_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H_2} \{Z[t_{2\nu}(\tau)] - Z(t_{2\nu})\} = -\frac{1}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \sin^2 \frac{\tau}{2} + O(T^{\Delta} \ln \mathrm{T}), \\ \sum_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H_2} \{Z[t_{2\nu+1}(\tau)] - Z(t_{2\nu+1})\} = \\ = \frac{1}{\pi} H_2 \ln \frac{T}{2\pi} \cdot \sin^2 \frac{\tau}{2} + O(T^{\Delta} \ln T),\end{gathered} \tag{14}$$

где O — оценки имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Примечание 1. Соотношения (13), (14) являются асимптотическими например в случае

$$H_3 = T^{\Delta}\Psi, \qquad \tau \neq 0. \tag{15}$$

Вычитая соотношения (14) при τ и $(-\tau)$ получаем

Следствие 4.

$$\sum_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H_2} \{Z[t_{2\nu}(\tau)] - Z[t_{2\nu}(-\tau)]\} = O(T^{\Delta} \ln T),$$

$$\sum_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H_2} \{Z[t_{2\nu+1}(\tau)] - Z[t_{2\nu+1}(-\tau)]\} = O(T^{\Delta} \ln T). \tag{16}$$

Примечание 2. Напомним, что из (7), независимо от (13), следует только оценка

$$F(\tau, T, H_2) - F(-\tau, T, H_2) = \sum_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H_2} \{Z[t_{2\nu}(\tau)] - Z[t_{2\nu}(-\tau)] +$$

$$+ \sum_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H_2} \{Z[t_{2\nu+1}(\tau)] - Z[t_{2\nu+1}(-\tau)\} = O(T^{\Delta} \ln T). \tag{17}$$

3. Пусть

$$Z[\alpha_{2\nu}(x)] = \frac{1}{t_{2\nu}(x) - t_{2\nu}(-x)} \int_{t_{2\nu}(-x)}^{t_{2\nu}(x)} Z(t)\, dt,$$

$$Z[\alpha_{2\nu+1}(y)] = \frac{1}{t_{2\nu+1}(y) - t_{2\nu+1}(-y)} \int_{t_{2\nu+1}(-y)}^{t_{2\nu+1}(y)} Z(t)\, dt, \tag{18}$$

где

$$\alpha_{2\nu}(x) \in \langle t_{2\nu}(-x), t_{2\nu}(x)\rangle, \quad \alpha_{2\nu+1}(y) \in \langle t_{2\nu+1}(-y), t_{2\nu+1}(y)\rangle$$

и числа

$$Z[\alpha_{2\nu}(x)], \quad Z[\alpha_{2\nu+1}(y)]$$

выражают средние значения функции $Z(t)$ в соответствующих промежутках.

Мы покажем, что совокупности разностей

$$Z[\alpha_{2\nu}(x)] - Z(t_{2\nu}), \quad Z[\alpha_{2\nu+1}(y)] - Z(t_{2\nu+1}), \qquad t_\nu \in \langle T, T+H_2\rangle$$

ведут себя закономерным образом. А именно, имеет место

Теорема 3. Из (6) следует, что

$$\sum_{T \leq t_{2\nu} \leq T+H_2} \{Z[\alpha_{2\nu}(x)] - Z(t_{2\nu})\} = -\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) H_2 \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{\Delta} \ln T),$$

$$\sum_{T \leq t_{2\nu+1} \leq T+H_2} \{Z[\alpha_{2\nu+1}(y)] - Z(t_{2\nu+1})\} = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{\sin y}{y}\right) H_2 \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{\Delta} \ln T). \tag{19}$$

Пусть

$$H_4 = T^{1/6}\Psi.$$

Пусть далее $R^{(-)}(T, \Psi, \Delta, x)$ обозначает количество $t_{2\nu} \in \langle T, T+H_4 \rangle$, для которых имеет место

$$Z[\alpha_{2\nu}(x)] < Z(t_{2\nu})$$

и $R^{(+)}(T, \Psi, \Delta, x)$ — количество $t_{2\nu+1} \in \langle T, T+H_4 \rangle$, для которых имеет место

$$Z[\alpha_{2\nu+1}(y)] > Z(t_{2\nu+1}).$$

Так как в случае (6) имеет место (ср. [3], (22))

$$Z(t) = O(T^{\Delta} \ln T), \qquad t \in \langle T, T+H_4 \rangle \tag{20}$$

и ([3], (23), $H \to H_4$)

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+H_4} 1 \sim \frac{1}{2\pi} H_4 \ln \frac{T}{2\pi}, \tag{21}$$

то из (19) получаем

Следствие 5.

$$R^{(-)}(T, \Psi, \Delta, x) > A(\Delta, \Psi, x) T^{1/6-\Delta}\Psi,$$

$$R^{(+)}(T, \Psi, \Delta, y) > A(\Delta, \Psi, y) T^{1/6-\Delta}\Psi.$$

В случае (8), полагая

$$R^{(-)}\left(T, \Psi, \frac{173}{1067}+\varepsilon, x\right) = R_1^{(-)},$$

$$R^{(+)}\left(T, \Psi, \frac{173}{1067}+\varepsilon, y\right) = R_1^{(+)},$$

получаем

Следствие 6.

$$R_1^{(-)} > A(\varepsilon, \Psi, x) T^{\frac{29}{6402}-2\varepsilon},$$

$$R_1^{(+)} > A(\varepsilon, \Psi, y) T^{\frac{29}{6402}-2\varepsilon}.$$

В случае справедливости гипотезы Линделэфа ($\Delta \to \varepsilon$, [1], стр. 89), полагая

$$R^{(-)}(T, \Psi, \varepsilon, x) = R_2^{(-)},$$

$$R^{(+)}(T, \Psi, \varepsilon, y) = R_2^{(+)},$$

получаем

Следствие 7.

$$R_2^{(-)} > A(\varepsilon, \Psi, x) T^{1/6-2\varepsilon},$$

$$R_2^{(+)} > A(\varepsilon, \Psi, y) T^{1/6-2\varepsilon}.$$

4. В этой части мы приведем

Доказательство теоремы 1. Прежде всего из (1) получаем (ср. [3], (57))

$$Z(t) = 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O(T^{-1/4}), \qquad P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

где $t \in \langle T, T+H_2 \rangle$. Так как (см. (2))

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] - \vartheta(t_\nu) = \tau,$$

то (см. [3], (40)—(42), t_ν, $t_\nu(\tau) \in \langle T, T+H_2 \rangle$)

$$t_\nu(\tau) - t_\nu = \frac{\tau}{\ln P_0} + O\left(\frac{H_2}{T \ln^2 T}\right).$$

Следовательно,

$$\sin\left(\frac{\tau}{2} - \frac{t_\nu(\tau) - t_\nu}{2} \ln n\right) = \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} + O\left(\frac{H_2}{T \ln T}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\tau}{2} - \frac{t_\nu(\tau) + t_\nu}{2} \ln n\right) = \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n) - t_\nu \ln n\right\} + O\left(\frac{H_2}{T \ln T}\right),$$

где

$$X(n) = \frac{\pi}{2} \frac{\ln \frac{P_0}{n}}{\ln P_0}, \qquad 0 < X(n) < \pi/2,$$

для $1 \leqq n < P_0$. Теперь (см. (2))

$$Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu) =$$

$$= 4(-1)^{\nu+1} \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} \sin\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n) - t_\nu \ln n\right\} +$$

$$+ O\left(\sqrt[4]{T} \cdot \frac{H_2}{T \ln T}\right) + O(T^{-1/4}) =$$

$$= 4(-1)^{\nu+1} \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin^2\left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} \cos(t_\nu \ln n) +$$

$$+ 2(-1)^\nu \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left\{\frac{2\tau}{\pi} X(n)\right\} \sin(t_\nu \ln n) + O(T^{-1/4}).$$

Отсюда (см. (4), [3], (59))

$$F(\tau, T, H_2) - F(0, T, H_2) = \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H_2} \{Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu)\} =$$

$$= -4 \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin^2 \left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H_2} (-1)^\nu \cos(t_\nu \ln n) +$$

$$+2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \left\{\frac{2\tau}{\pi} X(n)\right\} \sum_{T \leqq t_\nu \leqq T+H_2} (-1)^\nu \sin(t_\nu \ln n) + O(\ln T) =$$

$$= -4 W_1 + 2 W_2 + O(\ln T).$$

В сумму W_1 входит следующий типичный член (ср. [3], (54))

$$W_{11} = \sum_{n<P_0} \sin^2 \left\{\frac{\tau}{\pi} X(n)\right\} \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{\sqrt{n}} \sin \varphi,$$

где (ср. [3], (43), (50))

$$\varphi = t_\nu \ln n, \quad \frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\ln n}{\ln P_0} = \frac{\pi}{2} - X(n), \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \operatorname{ctg} X(n).$$

Следовательно,

$$W_{11} = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^2 \sum_{n<P_0} X \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\tau}{\pi} X\right)}{\left(\frac{\tau}{\pi} X\right)^2} \cdot \frac{X}{\sin X} \cdot \cos X \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \varphi. \tag{22}$$

Так как в случае (6)

$$\sum_{1 \geqq n < P_1 \leqq P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \varphi = O(T^\Delta \ln T)$$

то, применяя в (22) несколько раз преобразование Абеля, получаем оценку

$$W_{11} = O(T^\Delta \ln T)$$

и, следовательно,

$$W_1 = O(T^\Delta \ln T).$$

Аналогичную оценку получаем для W_2, так как

$$\sin(t_\nu \ln n) = \cos\left(t_\nu \ln n - \frac{\pi}{2}\right).$$

Доказательство теоремы 3. Так как (см. [6], (7), $H \to H_2$)

$$t_{2\nu}(x) - t_{2\nu}(-x) = \frac{2x}{\ln P_0} + O\left(\frac{xH_2}{T \ln^2 T}\right),$$

то ((6), (18), (20), [6], (52), $H \to H_2$)

$$\int_{-x}^{x} Z[t_{2\nu}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = \ln P_0 \int_{t_{2\nu}(-x)}^{t_{2\nu}(x)} Z(t)\,\mathrm{d}t + O(xH_2 T^{-5/6}) =$$

$$= [t_{2\nu}(x) - t_{2\nu}(-x)] Z[\alpha_{2\nu}(x)] \ln P_0 + O(xH_2 T^{-5/6}) =$$

$$= 2xZ[\alpha_{2\nu}(x)] + O\left(T^{1/6} \cdot \frac{xH_2}{T}\right) + O(xH_2 T^{-5/6}) =$$

$$= 2xZ[\alpha_{2\nu}(x)] + O(xH_2 T^{-5/6})$$

и (см. (21), $H_4 \to H_2$)

$$\int_{-x}^{x} \sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+H_2} \{Z[t_{2\nu}(\tau)] - Z(t_{2\nu})\}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= 2x \sum_{T \leqq t_{2\nu} \leqq T+H_2} \{Z[\alpha_{2\nu}(x)] - Z(t_{2x})\} + O(xH_2 T^{-5/6} . H_2' \ln T).$$

Далее,

$$\int_{-x}^{x} \sin^2 \frac{\tau}{2}\,\mathrm{d}\tau = x - \sin x\,.$$

Следовательно, интегрируя первое соотношение в (14) по $\tau \in \langle -x, x \rangle$, получаем первое соотношение в (19) и, аналогичным образом — второе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карацуба, А. А.: Основы аналитической теории чисел. Москва 1975.

[2] Колесник, Г. А.: Об оценке некоторых тригонометрических сумм. Acta Arith., 25 (1973), 7—30.

[3] Мозер, Ян: Об одной сумме в теории дзета-функции Римана. Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[4] Мозер, Ян: Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. Acta Arith., 31 (1976), 45—51.

[5] Мозер, Ян: Добавление к работе: Об одной теореме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. Acta Arith., 35 (1979), 403—404.

[6] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана–Зигеля. Acta Arith., 42 (1982), 1—10.
[7] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцийу: 3. 6. 1981

SÚHRN

O VLASTNOSTIACH POSTUPNOSTI $\{Z[t_\nu(\tau)]\}$ V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

V práci sa skúmajú sumy

$$\sum_{T \le t_\nu \le T+H} \{Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu)\},$$

$$\sum_{T \le t_\nu \le T+H} (-1)^\nu \{Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu)\}, \quad H \in (0, \sqrt[4]{T})$$

a zodpovedajúce integrálne vzorce. Výsledky sú vyjadrené v tvare, ktorý umožňuje dokázať podstatný vplyv Lindelöfovej hypotézy na odhady zodpovedajúcich O-členov. Postupnosť $\{t_\nu(\tau)\}$ je definovaná vzťahom $\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $(t_\nu(0) = t_\nu)$, pričom $\vartheta(t)$ a $Z(t)$ sú funkcie vchádzajúce do Riemannovho—Siegelovho vzorca.

SUMMARY

ON PROPERTIES OF THE SEQUENCE $\{Z[t_\nu(\tau)\}$ IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

In this paper the sums

$$\sum_{T \le t_\nu \le T+H} \{Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu)\},$$

$$\sum_{T \le t_\nu \le T+H_2} (-1)^\nu \{Z[t_\nu(\tau)] - Z(t_\nu)\}, \quad H \in (0, \sqrt[4]{T})$$

and associated integral formulas are investigated. The results are expressed in the form which makes it possible to prove the essential influence of the Lindelöf hypothesis on the estimates of O-members. The sequence $\{t_\nu(\tau)\}$ is defined by $\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu + \tau$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$, $(t_\nu(0) = t_\nu)$, where $\vartheta(t)$ and $Z(t)$ are functions entering in the Riemann—Siegel formula.