UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ А. СЕЛЬБЕРГА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. В работе [7] А. Сельберг получил кроме других результатов также некоторую информацию о попадании нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$ в короткие промежутки. А именно, Теорема С А. Сельберга ([7], стр. 49), в случае промежутка

$$\langle T,\ T+T^{1/2+\varepsilon}\rangle, \qquad 0<\varepsilon,$$

утверждает, что мера множества тех значений $t\in\langle T,\ T+T^{1/2+\varepsilon}\rangle$, для которых промежуток

$$\left(t,\ t+\frac{\Psi(t)}{\ln t}\right), \qquad 0<\Psi(t)\leqq\sqrt{\ln t},$$

($\Psi(t)$ — возрастающая к $+\infty$ функция при $t\to\infty$) содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$ есть $\sim T^{1/2+\varepsilon}$ (ср. [7], стр. 49, первые три строки доказательства).

Пусть

$$\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}\,t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}\,t-\frac{1}{8}\,\pi$$

и $\{g_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением (см. [5], $\bar{t}_\nu=g_\nu$, ср. [2], [3])

$$\vartheta_1(g_\nu)=\frac{\pi}{2}\,\nu, \qquad \nu=1,2,\ldots.$$

Заметим, что Теорема С А. Сельберга не дает никакой информации о попадании нулей нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$ в промежутки

$$\left(g_\nu,\ g_\nu+\frac{\Psi(g_\nu)}{\ln g_\nu}\right)$$

в случае

$$g_\nu \in \langle T, T+T^{1/2+\varepsilon} \rangle,$$

так как множество этих значений имеет меру нуль, т. е. это множество значений g_ν является исключительным для Теоремы С А. Сельберга.

С другой стороны, в работах [5], [6], в результате синтеза двух глубоких концепций английских ученых:

(а) метода усреднения Харди—Литтлвуда, [1],

(б) дискретного метода Е. К. Титчмарша, [8],

мы построили дискретный вариант усреднения типа Харди—Литтлвуда относительно более короткого чем $\langle T, T+T^{1/2+\varepsilon} \rangle$ промежутка а тем самым мы получили новые результаты в обоих направлениях. Специально мы получили оценку ([6])

$$N_0(T+T^{5/12}\Psi \ln^3 T)-N_0(T)>A(\Psi)T^{5/12}\Psi \ln^3 T,$$

($N_0(T)$ — обозначает количество нулей функции $\zeta(1/2+it)$, $t\in(0, T)$, $0<A(\Psi)$ — постоянная, зависящая от выбора Ψ) а тем самым 16,6 % улучшение показателя 1/2 Харди—Литтлвуда в аналогичной оценке от 1921 г.

В работах [5], [6] основную роль играла введенная нами последовательность $\{g_\nu\}$. Отсюда следует, что было бы полезно иметь результат типа Теоремы С А. Сельберга относительно:

(в) более короткого чем $\langle T, T+T^{1/2+\varepsilon} \rangle$ промежутка,

(г) исключительного множества значений g_ν входящих в этот более короткий промежуток.

2. В этой части сформулируем и докажем соответствующий результат.

Пусть ([6], (7))

$$\omega=\frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}},\quad U=T^{5/12}\Psi \ln^3 T,\quad \ln T<M<\sqrt[3]{\Psi}\ln T \tag{1}$$

(относительно других встречающихся ниже обозначений см. [5], [6]).

Пусть $G(T, \Psi, \bar{\Psi})$ обозначает количество значений $g_\nu\in\langle T, T+U\rangle$ для которых промежуток

$$(g_\nu, g_\nu+\bar{\Psi}(g_\nu)) \tag{2}$$

содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$, где $\bar{\Psi}(t)$ есть функция типа $\Psi(t)$, удовлетворяющая условию (ср. (1))

$$\frac{\bar{\Psi}}{\sqrt[3]{\Psi}}=o(1). \tag{3}$$

Имеет место

Теорема 1.

$$G(T, \Psi, \bar{\Psi}) \sim \frac{1}{\pi} U \ln T, \qquad T \to +\infty. \tag{4}$$

Так как ([5], (8))

$$\sum_{T \leqq g_\nu \leqq T+U} 1 \sim \frac{1}{\pi} U \ln T, \tag{5}$$

то в силу теоремы 1 для «почти всех» $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$ промежуток (2) содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$.

Доказательство теоремы 1. Основой доказательства является оценка ([6], (27))

$$R < A \frac{U \ln^2 T}{M}, \tag{6}$$

($0 < A$ — абсолютная постоянная) где R — число $g_\nu^* \in \langle T, T+U \rangle$, для которых значения

$$Z(g_\nu^* + k\omega), \qquad k = 0, 1, \ldots, M$$

сохраняют знак (см. [6], (20), (22)).

Далее,

$$\bar{\Psi}(g_\nu) \geqq \bar{\Psi}(T), \qquad g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$$

и

$$\frac{\bar{\Psi}(T)}{\omega} \sim \frac{1}{\pi} \bar{\Psi} \ln T > \frac{1}{2\pi} \bar{\Psi} \ln T \geqq \left[\frac{1}{2\pi} \bar{\Psi} \ln T\right] = M_1$$

(см. (1), неравенства для M и (3)). Полагая в (6) $M = M_1$ получаем, что

$$R = o(U \ln T).$$

Однако, для количества всех значений $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$ имеет место (5). Отсюда следует утверждение теоремы 1.

Еще заметим следующее. Пусть $N(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta(s)$, $s = \sigma + it$, попадающих в прямоугольник $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$. Очевидно (см. [9], стр. 211)

$$N(T+U) - N(T) \sim \frac{1}{2\pi} U \ln T. \tag{7}$$

Примечание. Соотношение (4) не противоречит соотношению (7) так как, конечно, многие из промежутков (2) пересекаются.

3. Пусть $\{g_\nu(\tau)\}$ обозначает бесконечное семейство последовательнос-

тей, определенное согласно условию (ср. [4])

$$\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2}, \qquad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle .$$

В этой части мы покажем как ведут себя результаты полученные в работах [5], [6] и теорема 1 этой работы, относительно трансляций

$$g_\nu \to g_\nu(\tau), \qquad \tau \in \langle -\pi, \pi \rangle . \tag{8}$$

Прежде всего (ср. [5], (22)—(36)) имеет место

Лемма $\bar{\text{A}}$.

$$g_{\bar\nu_1+p+1}(\tau) = g_{\bar\nu_1}(\tau) + \bar\omega_0 p - \bar\omega_0 D(p) + O\left(\frac{U^3}{T^2 \ln T}\right),$$

$$p = 0, 1, \ldots, N_1 - 1,$$

где (ср. [5], (11))

$$g_{\bar\nu_1}(\tau) = \min_{g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle} \{g_\nu(\tau)\},$$

$$g_{\bar\nu_1+N_1}(\tau) = \max_{g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle} \{g_\nu(\tau)\}$$

и $\bar\nu_1 = \bar\nu_1(\tau)$, $N_1 = N_1(\tau)$. Притом O-оценка имеет место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Далее, так как (ср. [5], (118))

$$\bar\vartheta_{1,k} = \vartheta_1[g_\nu(\tau) + k\omega] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2} + k\omega \ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right), \tag{9}$$

то (ср. [5], (121))

$$\begin{aligned} &Z[g_\nu(\tau) + k\omega] Z[g_\nu(\tau) + l\omega] = \\ &= 2 \sum\sum_{m,n<P_0} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left\{g_\nu(\tau) \ln \frac{n}{m} + k\omega \ln \frac{P_0}{n} - l\omega \ln \frac{P_0}{m}\right\} + \\ &+ 2 \sum\sum_{m,n<P_0} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}} \cos\left\{g_\nu(\tau) \ln (mn) - \tau - k\omega \ln \frac{P_0}{n} - l\omega \ln \frac{P_0}{m}\right\} + \\ &+ O\left(\frac{MU}{\sqrt{T} \ln T}\right) + O(T^{-1/12} \ln T), \end{aligned} \tag{10}$$

притом O — оценки в (9), (10) имеют место равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Теперь в силу (10) полагаем (ср. [5], (16), (17))

$$\bar{S}_1(T, U, M, \tau) = \sum_{m<n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g_\nu(\tau) \leqq T+U} \cos\left\{g_\nu(\tau) \ln \frac{n}{m} + \varphi_1\right\},$$

где

$$\varphi_1 = k\omega \ln \frac{P_0}{m} - l\omega \ln \frac{P_0}{n},$$

и, (ср. [5], (19), (20))

$$\bar{S}_2(T, U, M, \tau) = \sum_{m,\, n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \sum_{T \leqq g_\nu(\tau) \leqq T+U} (-1)^\nu \cos\{g_\nu(\tau) \ln(mn) + \bar{\varphi}_2\},$$

где

$$\bar{\varphi}_2 = -k\omega \ln \frac{P_0}{n} - l\omega \ln \frac{P_0}{m} - \tau = \varphi_2 - \tau.$$

Так как

$$T \leqq g_\nu(\tau) \leqq T+U$$

и

$$\bar{S}_2(T, U, M, \tau) = \operatorname{Re}\left\{e^{-i\tau} \sum_{m,\, n<P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \sum_{T \leqq g_\nu(\tau) \leqq T+U} (-1)^\nu \exp\{i[g_\nu(\tau) \ln(mn) + \varphi_2]\}\right\}$$

то имеют место следующие оценки (ср. [5], (18), (21), (37)—(93))

Лемма $\bar{\text{В}}$.

$$\bar{S}_1(T, U, M, \tau) = O(MT^{5/12} \ln^3 T),$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Лемма $\bar{\text{С}}$.

$$\bar{S}_2(T, U, M, \tau) = O(T^{5/12} \ln^2 T),$$

равномерно относительно $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

Пусть (ср. [5], (3))

$$\bar{J} = \bar{J}(T, U, M, \tau) = \sum_{T \leqq g_\nu(\tau) \leqq T+U} \left\{\sum_{k=0}^{M} Z[g_\nu(\tau) + k\omega]\right\}^2.$$

Теперь способом [5], (94)—(127) получаем, что имеет место (ср. [6], (13))

Лемма $\bar{\alpha}$.

$$\bar{J} = AMU \ln^2 T + o(MU \ln^2 T),$$

($0<A$ — абсолютная постоянная) равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Далее, вместо [6], (37), (38) имеем

$$4\cos\bar{\vartheta}_k \cos\bar{\vartheta}_l \cos(\bar{\vartheta}_k-\bar{\vartheta}_l)=$$

$$=1+(-1)^{k+l}+(-1)^{\nu+k}\cos\tau+(-1)^{\nu+l}\cos\tau+O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right),$$

$$-4\cos^2\bar{\vartheta}_k=-2-2(-1)^{\nu+k}\cos\tau+O\left(\frac{MU}{T\ln T}\right).$$

Положим (ср. [6], (15), (16))

$$\bar{\mathbf{N}}=\sum_{T\leqq g_\nu(\tau)\leqq T+U}|\bar{\mathbf{K}}|^2,$$

$$\bar{\mathbf{K}}=\sum_{k=0}^{M}\{e^{-i\vartheta[g_\nu(\tau)+k\omega]}Z[g_\nu(\tau)+k\omega]-1\}.$$

Теперь способом [6], (32)—(60) получаем, что имеет место (ср. [6], (17))

Лемма $\bar{\beta}$.

$$\bar{\mathbf{N}}=O(MU\ln^2 T),$$

равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Далее введем (ср. [6], (8)—(10)) следующее

Определение. Промежуток

$$\langle g_\nu(\tau)+k(\nu)\omega,\ g_\nu(\tau)+(k(\nu)+1)\omega\rangle,$$

где

$$g_\nu(\tau)\in\langle T, T+U\rangle,\ \tau\in\langle -\pi,\pi\rangle,\ 0\leqq k(\nu)\leqq M_2=[\delta\ln T],\ \delta>1$$

и $k(\nu)$ — целое число, назовем правильным, если

$$Z[g_\nu(\tau)+k(\nu)\omega].Z[g_\nu(\tau)+(k(\nu)+1)\omega]<0.$$

Пусть $G_1(T, U, \delta, \tau)$ обозначает количество не пересекающихся правильных промежутков $\subset\langle T, T+U\rangle$. Способом [6], (18)—(31) получается

Теорема 2. Существуют $\delta_0>1$, $A(\Psi, \delta_0)>0$, $T_0(\Psi, \delta_0)>0$ такие, что

$$G_1(T, U, \delta_0, \tau)>A(\Psi, \delta_0)U,\ T\geqq T_0(\Psi, \delta_0), \tag{11}$$

для всех $\tau\in\langle -\pi, \pi\rangle$.

Содержание теоремы 2 выразим еще так: оценка снизу [6], (11) для количества правильных (относительно $\{g_\nu\}$) промежутков является инвариантной относительно трансляций (8).

После всего сказанного ясно, что, наконец, мы получили и обобщение теоремы 1. А именно, пусть $G_2(T, \Psi, \bar{\Psi}, \tau)$ обозначает количество значений $g_\nu(\tau) \in \langle T, T+U \rangle$ для которых промежуток

$$(g_\nu(\tau), g_\nu(\tau) + \bar{\Psi}[g_\nu(\tau)])$$

содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$. Имеет место

Теорема 3,

$$G_2(T, \Psi, \bar{\Psi}, \tau) \sim \frac{1}{\pi} U \ln T, \; T \to +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line. Math. Zs., 10 (1921), 283—317.

[2] Мозер, Ян: О поведении функций Re $\{\zeta(s)\}$, Im $\{\zeta(s)\}$ в критической полосе. Acta Arith., 34 (1977), 25—35.

[3] Мозер, Ян: Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана. Acta Arith., 36 (1980), 147—156.

[4] Мозер, Ян: Новые следствия из формулы Римана—Зигеля. Acta Arith., 42 (1982), 1—10.

[5] Мозер, Ян: Об одной лемме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. 42—43 (1983), 7—26.

[6] Мозер, Ян: Улучшение теоремы Харди—Литтлвуда о плотности нулей функции $\zeta(1/2+it)$. Acta Math. Univ. Comen. 42—43 (1983), 41—50.

[7] Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta-function. Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1942), No. 10.

[8] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

[9] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

Адрес автора
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 22. 9. 1981

SÚHRN

O JEDNEJ A. SELBERGOVEJ VETE V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech $\vartheta_1(t) = \frac{1}{2} t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} \pi$ a $\{g_\nu\}$ označuje postupnosť definovanú vzťahom $\vartheta_1(q_\nu) = \frac{\pi}{2} \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Nech $0 < \Psi = \Psi(t)$ je funkcia rastúca k $+\infty$ pri $t \to +\infty$. Nech $G(T, \Psi, \bar{\Psi})$ označuje počet takých $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$, $U = T^{5/12}\psi \ln^3 T$, pre ktoré interval

$$(g_\nu, g_\nu + \bar{\Psi}(g_\nu)) \tag{1}$$

obsahuje nulový bod nepárneho rádu funkcie $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, kde $\bar{\Psi}$ je funkcia typu Ψ, ktorá spĺňa podmienku $\bar{\Psi}/\sqrt[3]{\Psi} = o(1)$. V práci je dokázané, že

$$G(T, \Psi, \bar{\Psi}) \sim \frac{1}{\pi} U \ln T, \; T \to +\infty. \tag{2}$$

Pretože počet všetkých $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$ je $\sim \frac{1}{\pi} U \ln T$, výsledok (2) vyjadríme takto: pre „skoro všetky" $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$ interval (1) obsahuje nulový bod nepárneho rádu funkcie $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Uvedená veta je tiež zovšeobecnená na prípad nekonečného systému postupností $\{g_\nu(\tau)\}$, definovaných vzťahom $\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2}$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

SUMMARY

ON AN A. SELBERG THEOREM IN THE THEORY OF RIEMANN'S ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let $\vartheta_1(t) = \frac{1}{2} t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{8}\pi$ and $\{g_\nu\}$ denote a sequence defined as $\vartheta_1(g_\nu) = \frac{\pi}{2}\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Let $0 < \Psi = \Psi(t)$ be an increasing to infinity function for $t \to +\infty$. Let $G(T, \Psi, \bar{\Psi})$ denote the number of $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$, $U = T^{5/12}\psi \ln^3 T$ for which the interval

$$(g_\nu, g_\nu + \bar{\Psi}(g_\nu)) \tag{1}$$

contains a zero point of odd order of the function $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, where $\bar{\Psi}$ is of the type Ψ, satysfiing the condition $\bar{\Psi}/\sqrt[3]{\Psi} = o(1)$. It is proved that

$$G(T, \Psi, \bar{\Psi}) \sim \frac{1}{\pi} U \ln T, \; T \to +\infty. \tag{2}$$

Since the number of all $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$ is $\sim \frac{1}{\pi} U \ln T$, the result (2) can be expressed as follows: for „almost all" $g_\nu \in \langle T, T+U \rangle$ the interval (1) contains a zero point of odd order of the function $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$. The above theorem is also generalized for the case of an infinite collection of sequences $\{g_\nu(\tau)\}$ which are defined by $\vartheta_1[g_\nu(\tau)] = \frac{\pi}{2}\nu + \frac{\tau}{2}$, $\tau \in \langle -\pi, \pi \rangle$.