UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУАДДИТИВНОЙ МЕРЫ НА БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВАХ ЧИСЛОВОЙ ПРЯМОЙ

ЙОСЕФ КАЛАС, Братислава

Будем заниматься построением полуаддитивной меры определенной на σ-борелевских множеств числовой прямой. Полуаддитивной мерой μ мы понимаем неотрицательную, полуаддитивную, монотонную, непрерывную сверху в $\emptyset$ функцию множества и $\mu(\emptyset)=0$. Построение этой полуаддитивной меры будет основано на работах [1] и [2]. В [2] показано: пусть f произвольная, неотрицательная и непрерывная функция, определенная на числовой прямой. Пусть на полукольце $\mathscr{D}$ всех ограниченных интервалов замкнутых слева и открытых справа определенная функция множества λ_f следующим образом:

$$\lambda_f(\langle a, b)) = \max_{\langle a, b\rangle} f - \min_{\langle a, b\rangle} f$$

Тогда если на кольце $\mathscr{R}$ порожденном полукольцом $\mathscr{D}$ определим функцию множества μ_f как

$$\mu_f(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_f(A_i) : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \supset A,\ A_i \in \mathscr{D} i = 1, 2, \ldots, n\right\} \text{ для всех } A \in \mathscr{R}$$

то в [2] показано, что μ_f полуаддитивная мера и больше того она является продолжением функции множества λ_f.

В [1] показано, что если полуаддитивная мера μ определенная на кольце $\mathscr{R}$ не имеет ускользающей нагрузки

$$(\text{если } A_n \in \mathscr{R},\ n = 1, 2, \ldots \text{ и } A_i \cap A_j = \emptyset\ i \neq j, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0)$$

то существует ее продолжение на порожденное σ-кольцо. Из предыдущего следует, что одной из возможностей построения полуаддитивной меры на борелевских множествах числовой прямой является «удобный» подбор функции f, которая «индуцирует» функцию множества λ_f. «Удобным» подбором мы понимаем, что отвечающая полуаддитивная мера μ_f определенная на кольце порожденном полукольцом $\mathscr{D}$ не имеет ускользающей нагрузки.

Пусть функция f непрерывная и с ограниченным изменением на числовой прямой. Покажем, что тогда функция множества λ_f удовлетворяет условию:

$$\text{если } A_n \in \mathscr{D},\ n = 1, 2, \dots \text{ и } A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j), \text{ то } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(A_n) < \infty \tag{i}$$

Замечание: Очевидно, что если какая-нибудь функция множества определенная на $\mathscr{D}$ удовлетворяет условию (i), то она не имеет ускользающей нагрузки.

Пусть $\langle a_n, b_n\rangle \in \mathscr{D}$, $n = 1, 2, \dots$ и $\langle a_i, b_i\rangle \cap \langle a_j, b_j\rangle = \emptyset$ если $i \neq j$

Тогда
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(< a_n, b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (\max_{\langle a_n, b_n\rangle} f - \min_{\langle a_n, b_n\rangle} f) \leqslant \sum_{n_i b_n \leqslant 0} (\max_{\langle a_n, b_n\rangle} f - \min_{\langle a_n, b_n\rangle} f) +$$
$$+ \sum_{n: a_n \geqslant 0} (\max_{\langle a_n, b_n\rangle} f - \min_{\langle a_n, b_n\rangle} f) + \bigvee_{-\infty}^{\infty}[f],$$

где $\bigvee_{-\infty}^{\infty}[f]$ обозначает полное изменение функции f на прямой $-\infty < x < \infty$.

Обозначим

$$M_1 = \{\tilde{a}_n, \tilde{b}_n: a_n \geqslant 0\} \text{ и } M_2 = \{\tilde{a}_n, \tilde{b}_n: b_n \leqslant 0\}$$

причём

$$f(\tilde{a}_n) = \max_{\langle a_n, b_n\rangle} f,\ f(\tilde{b}_n) = \min_{\langle a_n, b_n\rangle} f.$$

Мы покажем, что если даже card $M_1 = \chi_0$

то $\sum_{n: a_n \geqslant 0} \left(\max_{\langle a_n, b_n\rangle} f - \min_{\langle a_n, b_a\rangle} f\right) < \infty.$

Обозначим

$$x_0 = \inf\{M_1\},\ x_1 = \inf\{M_1 - \{x_0\}\}, \dots, x_n = \inf\{M_1 - \bigcup_{i=1}^{n-1}\{x_i\}\}, \dots$$

Тогда очевидно $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots$ и

$$\sum_{n: a_n \geqslant 0} \left(\max_{\langle a_n, b_n\rangle} f - \min_{\langle a_n, b_n\rangle} f\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |f(x_j) - f(x_{j-1})| < \infty \tag{1}$$

Аналогично можно показать, что если бы даже card $M_2 = \chi_0$, то

$$\sum_{n:\, b_n \leq 0} \left(\max_{\langle a_n,\, b_n \rangle} f - \min_{\langle a_n,\, b_n \rangle} f \right) < \infty \tag{2}$$

Тогда из (1) и (2) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f)\langle a_n,\, b_n)) < \infty,$$

значит λ_f удовлетворяет условию (i).

Мы покажем теперь, что тогда тоже полуаддитивная мера μ_f удовлетворяет условию (i), значит если $A_n \in \mathcal{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ если $i \neq j$ то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) < \infty.$$

Мы знаем, что для каждого n существуют $A_n^j \in \mathcal{D}$ $j = 1, \ldots, j_n$ такие, что

$$A_n = \bigcup_{j=1}^{j_n} A_n^j \text{ и } A_n^{jl} \cap A_n^{jk} = \emptyset \text{ если } k \neq l.$$

Из определения полуаддитивной меры μ_f следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_n} \lambda_f(A_n^j).$$

Очевидно, что удобным изменением обозначения можно писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{jn} \lambda_f(A_n^j) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_f(D_k)$$

причём $D_k \in \mathcal{D}$ $k = 1, 2, \ldots$ и $D_i \cap D_j = \emptyset$ если $i \neq j$. В силу того, что полуаддитивная мера λ_f удовлетворяет условию (i), то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_f(D_k) < \infty$$

и это значит, что тоже полуаддитивная мера μ_f удовлетворяет условию (i).

Замечание: Очевидно, один подкласс рассуждаемых функций есть например следующий класс функций f:

a) функция f абсолютно непрерывная на числовой прямой,

b) существует такое K, что функция f на интервалох $(-\infty, -K)$ и (K, ∞) монотонная,

c) существует

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l_1 < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2 < \infty$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Drewnowski, L.: Topological rings of sets, continuous set functions, integration II, Bull. Acad. Pol. Sci. 20 (1972).

[2] Калас, Й.: Построение полуаддитивной меры из функции множества определенной на полукольце, Mat. čas., 24, 1974, No 3.

[3] Rudin, W.: Analýza v reálnem a komplexním oboru, Academia Praha 1977.

Адрес автора:

Поступила в редакцию: 27. 6. 1980

Jozef Kalas
Katedra teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky MFF UK
Matematický pavilón
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

SÚHRN

KONŠTRUKCIA SUBADITÍVNEJ MIERY NA BORELOVSKÝCH MNOŽINÁCH REÁLNEJ OSI

Jozef Kalas, Bratislava

V práci sa konštruuje subaditívna miera na borelovských podmnožinách reálnej osi. Pri konštrukcii sa vychádza z prác [1] a [2]. Nakoniec sú definované dve triedy reálnych funkcií indukujúcich subaditívnu mieru definovanú na borelovských podmnožinách reálnej osi.

SUMMARY

A CONSTRUCTION A SUBADDITÍVE MEASURE ON THE BOREL SETS OF THE REAL LINE

Jozef Kalas, Bratislava

In the paper a subadditíve measure is constructed on the Borel sets of the real line. The construction is based on the results of papers [1] and [2]. Finally, two classes of real functions inducing the subadditíve measure on the Borel sets of the real line are given.

Адрес автора:

Поступила в редакцию: 27. 6. 1980

Jozef Kalas
Katedra teórie pravdepodobnosti a matematickej štatistiky MFF UK
Matematický pavilón
Mlynská dolina
842 15 Bratislava