UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

ОБ ОДНОЙ ЛЕММЕ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

Предлагаемая работа посвящена анализу некоторых возможностей кроющихся в работе Харди—Литтлвуда [2], и работе Е. К. Титчмарша [9]

Применяя дискретную точку зрения Е. К. Титчмарша к процессу усреднения Харди—Литтлвуда, мы получаем новые результаты в обоих направлениях.

I. Перечисление результатов

1. Пусть

$$\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi \tag{1}$$

и $\{\bar{t}_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением ([6], (9))

$$\vartheta_1(\bar{t}_\nu)=\frac{\pi}{2}\nu,\qquad \nu=1,2,\ldots. \tag{2}$$

Положим

$$J=J(T,U,M)=\sum_{T\leqq \bar{t}_\nu\leqq T+U}\left\{\sum_{k=0}^{M}Z(\bar{t}_\nu+\omega k)\right\}^2=$$

$$=\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leqq \bar{t}_\nu\leqq T+U}Z(\bar{t}_\nu+\omega k)Z(\bar{t}_\nu+\omega l), \tag{3}$$

где

$$\omega=\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}},\quad U=T^{5/12}\Psi\ln^3 T,\quad \ln T<M<\sqrt[3]{\Psi}\ln T, \tag{4}$$

и $\Psi = \Psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая $k+\infty$ функция. Мы покажем, исходя из формулы Римана—Зигеля ([7], стр. 94)

$$Z(t) = 2\sum_{m<\bar{t}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t\ln n) + O(t^{-1/4}), \qquad \bar{t} = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{5}$$

где ([7], стр. 383)

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{6}$$

что имеет место

Теорема.

$$J = AMU\ln^2 T + o(MU\ln^2 T), \tag{7}$$

(A — абсолютная постоянная).

Явно отметим, что величина J является дискретным аналогом непрерывной величины, рассмотренной Харди и Литтлвудом ([2], стр. 305, Лемма 18) и соотношение (7) относится к более короткому промежутку, чем соответствующее соотношение Харди и Литтлвуда (у Харди и Литтлвуда $U = T^{1/2+a}$, $a>0$, у нас $U = T^{5/12}\Psi\ln^3 T$).

Пусть Q_1 обозначает количество $\bar{t}_\nu \in \langle T, T+U\rangle$. Так как ([6], (32))

$$Q_1 = \frac{1}{\pi}U\ln\frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U^2}{T}\right), \tag{8}$$

то (см. (4), (7))

$$\frac{J}{Q_1 \cdot (M+1)^2} = \frac{1}{Q_1}\sum_{T\leqq \bar{t}_\nu \leqq T+U}\left\{\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} Z(\bar{t}_\nu + \omega k)\right\}^2 \sim B\frac{\ln T}{M}, \tag{9}$$

(B — абсолютная постоянная). Следовательно, среднее арифметическое последовательности $\{Z(\bar{t}_\nu+\omega k)\}_{k=0}^{M}$ уменьшается (по абсолютному значению) в среднем, если M возрастает. Значит, относительно дискретной совокупности

$$Z(\bar{t}_\nu + \omega k); \quad T \leqq \bar{t}_\nu \leqq T+U,\ k=0, 1, \dots, M \tag{10}$$

имеет место явление Харди—Литтлвуда (ср. [2], стр. 315).

В силу этого явления кажется весьма вероятным, что дискретная совокупность (10) содержит информацию о нулях нечетного порядка функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Мы действительно извлечем отсюда (в одном из последующих сообщений) новую информацию о функции $N_0(T+U)-N_0(T)$, ($N_0(T)$ — число нулей функции $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $t\in(0,\,T\rangle$).

2. Доказательство теоремы опирается на следующее вспомогательные утверждения.

Пусть

$$\bar{t}_{\bar{\nu}}=\min_{\bar{t}_\nu\in\langle T,\,T+U\rangle}\{\bar{t}_\nu\},\quad \bar{t}_{\bar{\nu}+N}=\max_{\bar{t}_\nu\in\langle T,\,T+U\rangle}\{\bar{t}_\nu\},\tag{11}$$

$$\bar{\omega}_0=\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{T\ln^3\frac{T}{2\pi}}-\pi\frac{\bar{t}_{\bar{\nu}}-T}{T\ln^2\frac{T}{2\pi}},\tag{12}$$

$$Q=Q(T)=\frac{\pi}{T\ln^2\frac{T}{2\pi}},\tag{13}$$

$$D(p)=\sum_{q=1}^{p}\{1-(1-Q)^q\},\quad 1\leqq p\leqq N-1,\ D(0)=0.\tag{14}$$

Имеет место

Лемма A.

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1}=\bar{t}_{\bar{\nu}+1}+\bar{\omega}_0p-\bar{\omega}_0D(p)+0\left(\frac{U^3}{T^2\ln T}\right),\quad 0\leqq p\leqq N-1.\tag{15}$$

Пусть

$$S_1(T,\,U,\,M)=\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{T\leqq\bar{t}_\nu\leqq T+U}\cos\left(\bar{t}_\nu\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right),\tag{16}$$

где

$$\varphi_1=k\omega\ln\frac{P_0}{m}-l\omega\ln\frac{P_0}{n},\quad 0\leqq k,\,l\leqq M,\ P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\tag{17}$$

(k, l — целые положительные числа). Имеет место

Лемма B.

$$S_1(T,\,U,\,M)=O(MT^{5/12}\ln^3T).\tag{18}$$

Пусть

$$S_2(T,\,U,\,M)=$$

$$=\sum\sum_{m,\,n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{T\leqq\bar{t}_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu\cos\left[\bar{t}_\nu\ln(mn)+\varphi_2\right],\tag{19}$$

где

$$\varphi_2 = -k\omega \ln \frac{P_0}{n} - l\omega \ln \frac{P_0}{m}. \tag{20}$$

Имеет место

Лемма C.

$$S_2(T, U, M) = O(T^{5/12} \ln^2 T). \tag{21}$$

Доказательства лемм A, B, C помещены в главах II, III соответственно и доказательство теоремы — в главе IV.

II Доказательство леммы A

3. Прежде всего (ср. [6], (30), (31))

$$\bar{t}_{\nu+1} - \bar{t}_\nu = \frac{\pi}{2\vartheta_1'(\bar{t}_\nu)} + O\left\{\frac{\vartheta_1''(\bar{t}_\nu)}{[\vartheta_1'(\bar{t}_\nu)]^3}\right\} = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{U}{T \ln^2 T}\right), \tag{22}$$

для $\bar{t}_\nu \in \langle T, T+U \rangle$. Однако, соотношение (22) оказывается недостаточно точным для наших целей и мы должны выделить следующие члены в этом соотношении. Считая $\bar{t}_\nu$ определенным для всякого $\nu \geqq 1$, (ср. [9], стр. 102), в силу (1), (2) мы имеем

$$\frac{d\bar{t}_\nu}{d\nu} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\vartheta_1'(\bar{t}_\nu)} = \frac{\pi}{\ln \frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}}, \tag{23}$$

$$\frac{d^2\bar{t}_\nu}{d\nu^2} = -\frac{\pi^2}{4} \frac{\vartheta_1''(\bar{t}_\nu)}{[\vartheta_1'(\bar{t}_\nu)]^3} = -\frac{\pi^2}{\bar{t}_\nu \ln^3 \frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}}, \tag{24}$$

$$\frac{d^3\bar{t}_\nu}{d\nu^3} = -\frac{\pi^3}{8} \frac{\vartheta_1^{(3)}}{(\vartheta_1')^4} + \frac{3\pi^3}{8} \frac{(\vartheta_1'')^2}{(\vartheta_1')^5} = O\left(\frac{1}{\bar{t}_\nu^2 \ln^4 \bar{t}_\nu}\right). \tag{25}$$

Следовательно, используя формулу Тейлора,

$$\bar{t}_{\nu+1} - \bar{t}_\nu = \frac{\pi}{\ln \frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}} - \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\bar{t}_\nu \ln^3 \frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\bar{t}_\nu^2 \ln^4 \bar{t}_\nu}\right). \tag{26}$$

Далее, при $\bar{t}_\nu \in \langle T, T+U \rangle$,

$$\frac{1}{\ln \frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}} = \frac{1}{\ln \frac{T}{2\pi}} - \frac{\bar{t}_\nu - T}{T \ln^2 \frac{T}{2\pi}} + F(T).(\bar{t}_\nu - T)^2 + O\left(\frac{U^3}{T^3 \ln^2 T}\right), \tag{27}$$

где

$$F(T)=\frac{1}{2T^2\ln^2\frac{T}{2\pi}}\left(1+\frac{2}{\ln\frac{T}{2\pi}}\right), \tag{28}$$

и

$$\frac{1}{\bar{t}_\nu\ln^3\frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}}=\frac{1}{T\ln^3\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right). \tag{29}$$

Значит, (см. (13)),

$$\bar{t}_{\nu+1}-\bar{t}_\nu=\bar{\omega}-Q.(\bar{t}_\nu-T)+\pi F.(\bar{t}_\nu-T)^2+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right), \tag{30}$$

где

$$\bar{\omega}=\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{T\ln^3\frac{T}{2\pi}}. \tag{31}$$

4. В силу (22), (28), (30), (см. (11), $1\leqq p\leqq N-1$),

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})=$$

$$=-Q.(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})+\pi F.[(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-T)^2-(\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1}-T)^2]+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right)=$$

$$=-Q.(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})+\pi F.(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})[(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-T)+(\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1}-T)]+$$

$$+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right)=$$

$$=-Q.(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})+O\left(\frac{1}{T^2\ln^2 T}\cdot\frac{1}{\ln T}\cdot U\right)+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right)=$$

$$=-Q.(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right),$$

т. е.

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p}=(1-Q)(\bar{t}_{\bar{\nu}+p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})+O\left(\frac{U}{T^2\ln^3 T}\right)=$$

$$=(1-Q)(\bar{t}_{\bar{\nu}-p}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p-1})+R_1(p), \tag{32}$$

для $p=1,\ldots,N-1$ и, следовательно,

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1}-\bar{t}_{\bar{\nu}+p}=(1-Q)^p(\bar{t}_{\bar{\nu}+1}-\bar{t}_{\bar{\nu}})+\sum_{l=0}^{p-1}(1-Q)^l R_1(p-l)=$$

$$=(1-Q)^p(\bar{t}_{\bar{\nu}+1}-\bar{t}_{\bar{\nu}})+O\left(\frac{UN}{T^2\ln^3 T}\right), \tag{33}$$

так как (см. (13)), $0<(1-Q)^l \leqq 1$. Складывая соотношения (33), получаем

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1} - \bar{t}_{\bar{\nu}+1} = (\bar{t}_{\bar{\nu}+1} - \bar{t}_{\bar{\nu}}) \sum_{q=1}^{p} (1-Q)^q + O\left(\frac{UN^2}{T^2 \ln^3 T}\right). \tag{34}$$

Однако, в силу (28), (30), (31),

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+1} - \bar{t}_{\bar{\nu}} = \frac{\pi}{\ln \frac{T}{2\pi}} - \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{T \ln^3 \frac{T}{2\pi}} - \pi \frac{\bar{t}_{\bar{\nu}} - T}{T \ln^2 \frac{T}{2\pi}} +$$

$$+ O\left(\frac{U}{T^2 \ln^3 T}\right) = \bar{\omega}_0 + O\left(\frac{U}{T^2 \ln^3 T}\right). \tag{35}$$

Наконец, из (34) в силу (14), (35),

$$\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1} = \bar{t}_{\bar{\nu}+1} + \bar{\omega}_0 \sum_{q=1}^{p} (1-Q)^q + O\left(\frac{UN}{T^2 \ln^3 T}\right) + O\left(\frac{UN^2}{T^2 \ln^3 T}\right) =$$

$$= \bar{t}_{\bar{\nu}+1} + \bar{\omega}_0 p - \bar{\omega}_0 D(p) + O\left(\frac{U^3}{T^2 \ln T}\right), \tag{36}$$

где мы использовали, что $N = O(U \ln T)$, (см. (8)). В случае $p=0$ полагаем остаточный член в $(36)=0$.

III Доказательство лемм B, C

5. В силу (11) мы имеем (см. (16), (17))

$$\sum_{T \leqq \bar{t}_\nu \leqq T+U} \cos\left(\bar{t}_\nu \ln \frac{n}{m} + \varphi_1\right) = \cos\left(\bar{t}_{\bar{\nu}} \ln \frac{n}{m} + \varphi_1\right) + W, \tag{37}$$

где (см. (15))

$$W = \sum_{p=0}^{N-1} \cos\left(\bar{t}_{\bar{\nu}+p+1} \ln \frac{n}{m} + \varphi_1\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} \cos\left\{\bar{t}_{\bar{\nu}+1} \ln \frac{n}{m} + \bar{\omega}_0 p \ln \frac{n}{m} - \bar{\omega}_0 D(p) \ln \frac{n}{m} + \varphi_1\right\} + O\left(\frac{U^3 N}{T^2 \ln T}\right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} \cos D_1 \cos(\Omega_1 p + \varphi_3) + \sum_{p=0}^{N+1} \sin D_1 \sin(\Omega_1 p + \varphi_3) + O\left(\frac{U^4}{T^2}\right), \tag{38}$$

где

$$D_1 = D_1(p; m, n) = \bar{\omega}_0 D(p) \ln \frac{n}{m}, \tag{39}$$

и

$$\Omega_1 = \omega_0 \ln \frac{n}{m}, \quad \varphi_3 = \bar{t}_{\nu+1} \ln \frac{n}{m} + \varphi_1. \tag{40}$$

Далее,

$$1-(1-Q)^q = Q\sum_{m=0}^{q-1}(1-Q)^{q-1-m} < Qq \tag{41}$$

и (см. (8), (13), (14))

$$D(p) = \sum_{q=1}^{p}\{1-(1-Q)^q\} = O(Qp^2) = O(QN^2) = O\left(\frac{U^2}{T}\right). \tag{42}$$

Следовательно, в силу (12), (39), (42),

$$D_1 = O\left(\frac{1}{\ln T}\cdot\frac{U^2}{T}\cdot\ln P_0\right) = O\left(\frac{U^2}{T}\right) = o(1). \tag{43}$$

Используя в (38) формулу Тейлора, получаем (см. (37))

$$\sum_{T\le \bar{t}_\nu \le T+U}\cos\left(\bar{t}_\nu \ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right) = \cos\left(\bar{t}_\nu \ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right) +$$

$$+\sum_{p=0}^{N-1}\cos(\Omega_1 p+\varphi_3) + \sum_{p=0}^{N-1}\left\{-\frac{D_1^2}{2!}+\frac{D_1^4}{4!}+O(D_1^6)\right\}\cos(\Omega_1 p+\varphi_3) +$$

$$+\sum_{p=0}^{N-1}\left\{D_1-\frac{D_1^3}{3!}+O(D_1^5)\right\}\sin(\Omega_1 p+\varphi_3) + O\left(\frac{U^4}{T^2}\right). \tag{44}$$

6. Положим

$$S_{11} = \sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}\cos(\Omega_1 p+\varphi_3). \tag{45}$$

Однако, в силу (35), $(m<n)$,

$$0<\Omega_1<\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}\ln\frac{n}{m} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ln\frac{n}{m}}{\ln P_0}<\frac{\pi}{2}, \tag{46}$$

и следовательно, аналогично случаю [4], (25) получается

Лемма 1.

$$S_{11} = \frac{1}{2}\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{\cos\varphi_3}{\sqrt{mn}} + \frac{1}{2}\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{\cos(\Omega_1\bar{N}+\varphi_3)}{\sqrt{mn}} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1\right)}{\sqrt{mn}}\sin\varphi_3+\frac{1}{2}\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\Omega_1\right)}{\sqrt{mn}}\sin(\Omega_1\bar{N}+\varphi_3)=$$

$$=\frac{1}{2}S_{111}+\frac{1}{2}S_{112}-\frac{1}{2}S_{113}+\frac{1}{2}S_{114}, \tag{47}$$

где $\bar{N}=N-1$.

Так как (см. (17), (40))

$$S_{111}=\operatorname{Re}\left\{e^{i(k-l)\omega\ln P_0}\sum_m \frac{1}{\sqrt{m}}e^{-i(\bar{t}_{\nu+1}+k\omega)\ln m}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}e^{i(\bar{t}_{\nu+1}+l\omega)\ln n}\right\}, \tag{48}$$

то (ср. [10], стр. 197) имеет место

Лемма 2.

$$S_{111},\ S_{112}=O(T^{5/12}\ln T). \tag{49}$$

Так как (см. (27), (40))

$$\varphi_3=(\bar{t}_{\nu+1}+l\omega)\ln\frac{n}{m}+(k-l)\omega\ln\frac{P_0}{m}=T_1\ln\frac{n}{m}+\varrho_1, \tag{50}$$

то

$$S_{113}=\frac{2}{\bar{\omega}_0}\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{\Omega_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\Omega_1}{2}\cos\varrho_1\frac{\sin\left(T_1\ln\frac{n}{m}\right)}{\sqrt{mn}\ln\frac{n}{m}}+$$

$$+\frac{2}{\bar{\omega}_0}\sum_{m<n<P_0}\sum \frac{\Omega_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\Omega_1}{2}\sin\varrho_1\frac{\cos\left(T_1\ln\frac{n}{m}\right)}{\sqrt{mn}\ln\frac{n}{m}}=$$

$$=\frac{2}{\bar{\omega}_0}S_{113}^1+\frac{2}{\bar{\omega}_0}S_{113}^2. \tag{51}$$

Положим

$$S_{113}^1=S_{113}^1(m<n<2m)+S_{113}^1(n\geqq 2m)=S_{113}^{11}+S_{113}^{12}. \tag{52}$$

Так как суммы S_{113}^{11}, S_{113}^{12} родственны (соответственно) суммам U_2, U_3 в работе [10], стр. 196, 197, мы попробуем показать, что оценки наших сумм получаются методом Е. К. Титчмарша, [10], стр. 197, 198.

Разница заключается в том, что у Е. К. Титчмарша встречается следующая m — сумма ([10], стр. 198, $n=m+r$, $r\leqq\lambda$; [8], стр. 136)

$$\sigma_1=\sum_{\frac{1}{2}K<m\leqq K}\frac{\left(\frac{m+r}{m}\right)^{iT}}{\sqrt{m(m+r)}\ln\frac{m+r}{m}}=O(K^{-1/2}T^{1/2}r^{-1/2})+O(K^{3/2}T^{-1/2}r^{-3/2}) \tag{53}$$

а в нашем случае,

$$\sigma_2=\sum_{\frac{1}{2}K<m\leqq K}A_1(m,r)A_2(m)\frac{\sin\left(T_1\ln\frac{m+r}{m}\right)}{\sqrt{m(m+r)}\ln\frac{m+r}{m}}, \tag{54}$$

где

$$A_1=\frac{\Omega_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\Omega_1}{2},\quad A_2=\cos\varrho_1 \tag{55}$$

Однако, последовательность $\{A_1\}$, $m\in\left(\frac{1}{2}K,K\right\rangle$, (при фиксированном r), возрастает и ограничена единицей (см. (46)). Далее, (см. (4), (17), (50)),

$$\varrho_1=O(M). \tag{56}$$

Следовательно, промежуток $\left(\frac{1}{2}K,K\right\rangle$ можно подразделить на $O(M)$ промежутков так, что на всяком

(a) или $A_2>0$ и $\{A_2\}$ возрастает (убывает),
(b) или $-A_2$ обладает этими свойствами.

Применяя преобразование Абеля (в количестве $O(M)$) получаем

$$\sigma_2=O(M.K^{-1/2}T^{1/2}r^{-1/2})+O(M.K^{3/2}T^{-1/2}r^{-3/2}). \tag{57}$$

Значит,

$$S_{113}^{11}=O(MT^{5/12}\ln^2T). \tag{58}$$

В случае S_{113}^{12} мы получаем (ср. [10], стр. 197, U_3)

$$S_{113}^{12}=O(MT^{5/12}\ln^2T), \tag{59}$$

и, следовательно, (см. (52)),

$$S^1_{113}=O(MT^{5/12}\ln^2 T). \tag{60}$$

Что же касается суммы S^2_{113} (см. (51)), то, аналогично изложенному выше, получаем

$$S^2_{113}=O(MT^{5/12}\ln^2 T) \tag{61}$$

а в силу (12), (51), (60), (61),

$$S_{113},\ S_{114}=O(MT^{5/12}\ln^3 T), \tag{62}$$

при этом, в случае S_{114} имеем (см. (40), (50)),

$$\Omega_1\bar{N}+\varphi_3=T_2\ln\frac{n}{m}+\varrho_1,\ T_2=T_1+\bar{\omega}_0\bar{N}. \tag{63}$$

Значит, имеет место (см. (47), (49), (62))

Лемма 3.

$$S_{11}=O(MT^{5/12}\ln^3 T). \tag{64}$$

7. *Положим*

$$S_{12}=\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}\sin(\Omega_1 p+\varphi_3). \tag{65}$$

Если вместо формулы [6], (65) в надлежащем месте используем формулу [6], (66) приводящую к членам родственным тем, которые входят в [4], (25), то, способом (45)—(63) получается

Лемма 4.

$$S_{12}=O(MT^{5/12}\ln^3 T). \tag{66}$$

Положим ($s=1,\dots,4$, $M_1\leqq N-1$)

$$S_{13}=\sum_{m<n<P_0}\sum\frac{\left(\ln\dfrac{n}{m}\right)^s}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{M_1}\sin(\Omega_1 p+\varphi_3). \tag{67}$$

Для этой суммы (как в случае S_{12}) получается

$$S_{13}=O(MT^{5/12}\ln^7 T), \tag{68}$$

так как $(\ln n/m)^s$ вносит в общий член соответствующей суммы типа σ_2 (см. (54)) сомножитель

$$A_3(m,r,s)=\left(\ln\frac{m+r}{m}\right)^s=\left\{\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)\right\}^s<A\ln^4 T, \tag{69}$$

при этом $\{A_3\}$ убывает для $m\in(1/2K,K\rangle$.

Далее, (см. (39)),

$$S_{14}=\sum_{p=0}^{N-1}\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{D_1^s}{\sqrt{mn}}\sin(\Omega_1 p+\varphi_3)=$$

$$=\bar{\omega}_0^s\sum_{p=0}^{N-1}D^s(p)\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{\left(\ln\frac{n}{m}\right)^s}{\sqrt{mn}}\sin(\Omega_1 p+\varphi_3). \tag{70}$$

Так как последовательность $D^s(p)$ возрастает (см. (14)), то, применяя преобразование Абеля, в силу (42), (43), (68) получаем

$$S_{14}=O\left(\frac{1}{\ln T}\cdot\frac{U^2}{T}\cdot\max_{M_1\leqq N-1}|S_{13}|\right)=O(MT^{1/4}\Psi^2\ln^{12}T) \tag{71}$$

Следовательно, имеет место

Лемма 5.

$$\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}D_1^s\exp\{i(\Omega_1 p+\varphi_3)\}=O(MT^{1/4}\Psi^2\ln^{12}T), \tag{72}$$

для $s=1,\ldots,4$.

Наконец, в силу (8), (43), (см. (44)),

$$\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}O(D_1^5)=O(T^{1/12}\Psi^{11}\ln^{34}T), \tag{73}$$

$$\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}O\left(\frac{U^4}{T^2}\right)=O(T^{1/6}\Psi^4\ln^{12}T), \tag{74}$$

и, очевидно, (ср. (48)),

$$\sum\sum_{m<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(\bar{t}_{\bar{\nu}}\ln\frac{n}{m}+\varphi_1\right)=O\left(T^{5/12}\ln T\right). \tag{75}$$

Следовательно, в силу (44), (45), (64), (72)—(75), (см. (16)),

$$S_1(T,U,M)=O(MT^{5/12}\ln^3 T). \tag{76}$$

Лемма В доказана.

8. В этой части помещено доказательство леммы С. Прежде всего (ср. (19), (44), $mn\geqq 2$, очевидно, $S_2(m=n=1)=O(1)$),

$$\sum_{T\leqq \bar{t}_\nu\leqq T+U}(-1)^\nu\cos\{\bar{t}_\nu\ln(mn)+\varphi_2\}=$$

$$=(-1)^{\bar{\nu}}\cos\{\bar{t}_{\bar{\nu}}\ln(mn)+\varphi_2\}+(-1)^{\bar{\nu}+1}\sum_{p=0}^{N-1}(-1)^p\cos(\Omega_2 p+\varphi_4)+$$

$$+(-1)^{\bar{\nu}+1}\sum_{p=0}^{N-1}\left\{-\frac{D_2^2}{2!}+\frac{D_2^4}{4!}+O(D_2^6)\right\}(-1)^p\cos(\Omega_2 p+\varphi_4)+$$

$$+(-1)^{\bar{\nu}+1}\sum_{p=0}^{N-1}\left\{D_2-\frac{D_2^3}{3!}+O(D_2^5)\right\}(-1)^p\sin(\Omega_2 p+\varphi_4)+O\left(\frac{U^4}{T^2}\right), \tag{77}$$

где (ср. (40))

$$\Omega_2=\bar{\omega}_0\ln(mn),\quad \varphi_4=\bar{t}_{\bar{\nu}+1}\ln(mn)+\varphi_2,\quad D_2=\bar{\omega}_0 D(p)\ln(mn). \tag{78}$$

Положим,

$$S_{21}=\sum_{\substack{m,\,n<P_0\\ mn\geq 2}}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{p=0}^{N-1}(-1)^p\cos(\Omega_2 p+\varphi_4). \tag{79}$$

Так как (ср. (46)) $\Omega_2\in(0,\pi)$, то (см. [3], (51), (53), $\bar{N}=N-1$)

$$\sum_{p=0}^{\bar{N}}(-1)^p\cos(\Omega_2 p+\varphi_4)=\frac{1}{2}\cos\varphi_4+\frac{(-1)^{\bar{N}}}{2}\cos(\Omega_2\bar{N}+\varphi_4)+$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_2\right)\sin\varphi_4-\frac{(-1)^{\bar{N}}}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_2\right)\sin(\Omega_2\bar{N}+\varphi_4). \tag{80}$$

Следовательно, имеет место

Лемма 6.

$$S_{21}=\frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum\frac{\cos\varphi_4}{\sqrt{mn}}+\frac{(-1)^{\bar{N}}}{2}\sum_{m,n}\sum\frac{\cos(\Omega_2\bar{N}+\varphi_4)}{\sqrt{mn}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_2\right)}{\sqrt{mn}}\sin\varphi_4-\frac{(-1)^{\bar{N}}}{2}\sum_{m,n}\sum\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_2\right)}{\sqrt{mn}}\sin(\Omega_2\bar{N}+\varphi_4)=$$

$$=\frac{1}{2}S_{211}+\frac{1}{2}S_{212}+\frac{1}{2}S_{213}-\frac{1}{2}S_{214}. \tag{81}$$

Обычным способом получаются оценки

$$S_{211},\ S_{212}=O(T^{5/12}\ln T). \tag{82}$$

Положим (см. (12), (78))

$$\bar{\omega}_0=\frac{\pi}{2\ln P_0}-\delta_1,\quad 0<\delta_1=O\left(\frac{1}{T\ln^3 T}\right), \tag{83}$$

$$\frac{1}{2}\Omega_2=\frac{1}{2}\bar{\omega}_0\ln(mn)=\frac{\pi}{2}\frac{\ln(mn)}{\ln P_0^2}-\delta_2=\frac{\pi}{2}-X-\delta_2, \tag{84}$$

где

$$X=\frac{\pi}{2}\frac{\ln\dfrac{P_0^2}{mn}}{\ln P_0^2}, \quad \delta_2=\frac{1}{2}\delta_1\ln(mn). \tag{85}$$

Очевидно,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\Omega_2\right)=\operatorname{ctg}(X+\delta_2)=\operatorname{ctg}X_1, \tag{86}$$

$$\frac{dX_1}{dm}=-\frac{\pi}{2n\ln P_0^2}\left(1-\frac{1}{\pi}\delta_1\cdot\ln P_0^2\right)<0, \tag{87}$$

(так как $1/2\Omega_2\in(0, \pi/2)$ то $X_1\in(0, \pi/2)$). Далее,

$$\begin{aligned} S_{213}&=\sum_{m,n}\sum\frac{\operatorname{ctg}X_1}{\sqrt{mn}}\sin\varphi_4= \\ &=\frac{4}{\pi}\ln P_0\sum_{m,n}\sum X_1\operatorname{ctg}X_1\cdot\frac{X}{X+\delta_2}\cdot\frac{\sin\varphi_4}{\sqrt{mn}\ln\dfrac{P_0^2}{mn}}= \\ &=\frac{4}{\pi}\ln P_0.\operatorname{Im}\left\{\sum_m\frac{e^{i\varrho_2}}{\sqrt{m}}\sum_n B_1.B_2.\frac{e^{iT_3\ln n}}{\sqrt{n}\ln\dfrac{P_0^2}{mn}}\right\}, \end{aligned} \tag{88}$$

где (см. (78))

$$\begin{gathered} B_1=X_1\operatorname{ctg}X_1, \quad B_2=\frac{X}{X+\delta_2}, \quad \varphi_4=T_3\ln n+\varrho_2, \\ T_3=\bar{t}_{\nu+1}+k\omega, \quad \varrho_2=(\bar{t}_{\nu+1}+l\omega)\ln m-(k+l)\omega\ln P_0, \end{gathered} \tag{89}$$

при этом, $\{B_1(n)\}$, $\{B_2(n)\}$ — монотонные последовательности (при фиксированном m) и $B_1, B_2\in(0, 1)$.

Теперь оценка суммы S_{213} получается методом Е. К. Титчмарша (применяя в надлежащем месте два раза преобразование Абеля):

(a) $S_{213}(m<n<2m)$ — способом [10], стр. 205, см. V_1,
(b) $S_{213}(n\geqq 2m)$ — способом [10], стр. 206, см. W_1.

В результате получаем

$$S_{213}=O(\ln T.T^{5/12}\ln T)=O(T^{5/12}\ln^2 T). \tag{90}$$

Аналогичным способом,

$$S_{214}=O(T^{5/12}\ln^2 T), \tag{91}$$

при этом,

$$\Omega_2\bar{N}+\varphi_4=T_4\ln n+\varrho_3,\quad T_4=T_3+\bar{N}\bar{\omega}_0,\quad \varrho_3=\bar{N}\bar{\omega}_0\ln m+\varrho_2. \tag{92}$$

Следовательно, в силу (82), (90), (91) имеет место

Лемма 7.

$$S_{21}=O(T^{5/12}\ln^2 T). \tag{93}$$

Наконец, способом (65)—(76) получаем оценку (21). Лемма C доказана.

IV Доказательство теоремы

9. Пусть

$$G(N,u)=\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nu\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)}\right)^2,\quad F(N)=\int_0^{\pi/6}G(N,u)\,du. \tag{94}$$

Имеет место

Лемма 8.

$$F(N)=AN+O(1), \tag{95}$$

где $0<A$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Так как ([1], стр. 44)

$$\frac{1}{2}G(N,u)=\frac{1}{2}N+\sum_{k=1}^{N-1}(N-k)\cos(ku), \tag{96}$$

то ($N-1=6N_1+r$, $0\leqq r\leqq 5$)

$$\frac{1}{2}F(N)-\frac{\pi}{12}N=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{N-k}{k}\sin\left(\frac{\pi}{6}k\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N_1}\sum_{q=1}^{5}\frac{N_1-(6n+q)}{6n+q}\sin\left\{\frac{\pi}{6}(6n+q)\right\}+O(1)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n\sum_{q=1}^{5}\frac{N-(6n+q)}{6n+q}\sin\left(\frac{\pi}{6}q\right)+O(1)=$$

$$=N\sum_{n=0}^{N_1}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\frac{1}{6n+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{6n+2}+\frac{1}{6n+3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{6n+4}+\frac{1}{2}\frac{1}{6n+5}\right)+O(1)=$$

$$=N\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+5}\right)+\frac{1}{6n+3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{6n+2}+\frac{1}{6n+4}\right)\right\}+O(1)=\frac{1}{2}AN+O(1). \tag{97}$$

Доказательство леммы 8 закончено.

Пусть

$$V(T, M)=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\cos\left\{(k-l)\omega\ln\frac{P_0}{n}\right\}. \tag{98}$$

Имеет место

Лемма 9.

$$V(T, M)=AM\ln\frac{T}{2\pi}+O(\ln T), \tag{99}$$

где $0<A$ — абсолютная постоянная.

Доказательство. Так как (см. (4)),

$$0<\omega\ln\frac{P_0}{n}\leqq\omega\ln P_0=\frac{\pi}{2}, \tag{100}$$

то, используя обычную формулу (см. например [3], (52)), имеем

$$\sum_{k=0}^{M}\cos\left(k\omega\ln\frac{P_0}{n}-l\omega\ln\frac{P_0}{n}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{M}\cos(\Omega k+\varphi)=\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(M+1)\Omega\right\}}{\sin\left\{\frac{1}{2}\Omega\right\}}\cos\left(\frac{1}{2}M\Omega+\varphi\right), \tag{101}$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\cos\left\{(k-l)\omega\ln\frac{P_0}{n}\right\}=$$

$$=\frac{\sin\left\{\frac{1}{2}(M+1)\Omega\right\}}{\sin\left\{\frac{1}{2}\Omega\right\}}\sum_{l=0}^{M}\cos\left(\Omega l-\frac{1}{2}M\Omega\right)=G(M+1, \Omega) \tag{102}$$

где

$$\Omega=\Omega(T, n)=\omega\ln\frac{P_0}{n}. \tag{103}$$

Значит, (см. (98)),

$$V(T, M)=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{n}G(M+1, \Omega)=$$

$$=2\left(\sum_{n<P_0^{2/3}}+\sum_{P_0^{2/3}\leqq n<P_0}\right)\frac{1}{n}G(M+1, \Omega)=V_1+V_2. \tag{104}$$

Так как в случае суммы V_1, (см. (4)),

$$\frac{1}{2}\Omega=\frac{1}{2}\omega\ln\frac{P_0}{n}\geqq\frac{1}{2}\omega\ln\frac{P_0}{P_0^{2/3}}=\frac{\pi}{12}, \tag{105}$$

то

$$V_1 = O(\ln T). \tag{106}$$

Для изучения суммы V_2 мы применим формулу суммирования Эйлера--Маклорена ([7], стр. 19)

$$\sum_{a \leqq n < b} \varphi(n) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right)\varphi(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right)\varphi(b), \tag{107}$$

в случае

$$a = P_0^{2/3},\quad b = P_0,\quad \varphi(x) = \frac{1}{x}\,G\left(M+1,\ \omega \ln \frac{P_0}{x}\right). \tag{108}$$

Прежде всего, (см. (94), (95)),

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{P_0^{2/3}}^{P_0} G\left(M+1,\ \omega \ln \frac{P_0}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{1}{\omega}\int_0^{\pi/6} G(M+1,\ u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{1}{\omega}\,F(M+1) = AM \ln \frac{T}{2\pi} + O(\ln T). \tag{109}$$

Далее, (см. (108), $x \in \langle P_0^{2/3},\ P_0\rangle$,

$$\varphi'(x) = O\left(\frac{M^2}{x^2}\right) - \frac{\omega}{x^2}\frac{\partial G(M+1,\ u)}{\partial u},\quad u = \omega \ln \frac{P_0}{x}. \tag{110}$$

Однако, (см. (96)),

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G(M+1,\ u)}{\partial u} = -\sum_{k=1}^{M} k(M+1-k)\sin ku = O(M^3). \tag{111}$$

Следовательно,

$$\varphi'(x) = O\left(\frac{M^2}{x^2}\right) + O\left(\frac{M^3\omega}{x^2}\right), \tag{112}$$

и, (см. (4)),

$$\int_{P_0^{2/3}}^{P_0} \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = O\left(P_0\,\frac{M^2 + \omega^2 M^3}{T^{2/3}}\right) = o(1). \tag{113}$$

Еще заметим, что (см. (100), (108)),

$$\varphi(P_0^{2/3}) = O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{T}}\right) = o(1),\quad \varphi(P_0) = O\left(\frac{M^2}{\sqrt{T}}\right) = o(1). \tag{114}$$

Теперь, в силу (104), (106), (107), (109), (113), (114) получаем (99). Доказательство леммы 9 закончено.

Положим (см. (98))

$$W = \sum_{T \leq t_\nu \leq T+U} V(T, M). \tag{115}$$

В силу (8), (99), (см. (4)), имеет место

Лемма 10.

$$W = AMU \ln^2 T + O(U \ln^2 T). \tag{116}$$

где $0 < A$ — абсолютная постоянная.

10. Исходим из формулы Р и м а н а—З и г е л я (5). Так как $U < \sqrt{T}$, то (см. (1), (6), ср. [5], (30), (31))

$$\begin{aligned} Z(t) &= 2 \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta - t \ln n) + O(T^{-1/4}) = \\ &= 2 \sum_{m<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_1 - t \ln n) + O(T^{-1/4}), \end{aligned} \tag{117}$$

для $t \in \langle T, T+U \rangle$. Далее, (см. (1), (2)),

$$\vartheta_{1,k} = \vartheta_1(\bar{t}_\nu + k\omega) = \frac{\pi}{2}\nu + \vartheta_1'(\bar{t}_\nu)k\omega + \frac{1}{2}\vartheta_1''(d)(k\omega)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\nu + k\omega \ln P_0 + O\left(\frac{k\omega U}{T}\right) + O\left(\frac{k^2\omega^2}{T}\right) = \frac{\pi}{2}\nu + k\omega \ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right), \tag{118}$$

где $d = \bar{t}_\nu + k\omega\delta_3$, $0 < \delta_3 < 1$. Значит,

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,k} + \vartheta_{1,l} &= \pi\nu + (k+l)\omega \ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right), \\ \vartheta_{1,k} - \vartheta_{1,l} &= (k-l)\omega \ln P_0 + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right). \end{aligned} \tag{119}$$

Так как ([7], стр. 94, 109)

$$\sum\sum_{m,n<P_0} \frac{1}{\sqrt{mn}} = O(\sqrt{T}), \quad Z(t) = O(T^{1/6} \ln t), \tag{120}$$

То из (117) получаем

$$Z(\bar{t}_\nu + k\omega) Z(\bar{t}_\nu + l\omega) =$$

$$= 2 \sum\sum_{m,n<P_0} \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left(\bar{t}_\nu \ln \frac{n}{m} + k\omega \ln \frac{P_0}{m} - l\omega \ln \frac{P_0}{n}\right) +$$

$$+2\sum\sum_{m,\,n<P_0}\frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}}\cos\left\{\bar{t}_\nu \ln(mn)-k\omega\ln\frac{P_0}{n}-l\omega\ln\frac{P_0}{m}\right\}+$$

$$+O\left(\sqrt{T}\cdot\frac{MU}{T\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T)=$$

$$=S_3+S_4+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T). \qquad (121)$$

Теперь, в силу (115), (116),

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leq \bar{t}_\nu\leq T+U} S_3(m=n)=AMU\ln^2 T+O(U\ln^2 T), \qquad (122)$$

а в силу (18), (21),

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leq \bar{t}_\nu\leq T+U} S_3(m\neq n)=O(M^3T^{5/12}\ln^3 T), \qquad (123)$$

$$\sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T\leq \bar{t}_\nu\leq T+U} S_4=O(M^2T^{5/12}\ln^2 T). \qquad (124)$$

Далее, (см. (8), (121)),

$$\sum_k\sum_l\sum_{\bar{t}_\nu}\left\{O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T)\right\}=$$

$$=O\left(\frac{M^3U^2}{\sqrt{T}}\right)+O(M^2UT^{-1/12}\ln^2 T) \qquad (125)$$

и (см. (3), (121)—(125))

$$J=AMU\ln^2 T+O(U\ln^2 T)+O(M^3T^{5/12}\ln^3 T)+$$

$$+O\left(\frac{M^3U^2}{\sqrt{T}}\right)+O(M^2UT^{-1/12}\ln^2 T)=AMU\ln^2 T+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5. \qquad (126)$$

Так как следующие величины

$$\frac{Q_2}{MU\ln^2 T}=O\left(\frac{1}{M}\right),\quad \frac{Q_3}{MU\ln^2 T}=O\left(\frac{M^2}{\Psi\ln^2 T}\right),$$
$$\frac{Q_4}{MU\ln^2 T}=O\left(\frac{M^2U}{\sqrt{T}\ln^2 T}\right),\quad \frac{Q_5}{MU\ln^2 T}=O\left(\frac{M}{T^{1/12}}\right), \qquad (127)$$

стремятся к нулю при $T\to\infty$ в случае (4), то из (126) следует (7).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джексон, Д.: Ряды Фурье и ортогональные полиномы, Москва 1948.

[2] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta-function on critical line, Math. Zs., (1921), 283—317.

[3] Мозер, Ян.: Об одной сумме в терии дзета-функции Римана, Acta Arith., 31 (1976), 31—43.

[4] Мозер, Ян: Об одной теореме Харди-Диттлвуда в теории здета-функции Римана. Acta Arith., 31 (1976), 45—51.

[5] Мозер, Ян: О законе Грама в теории дзета-функции Римана, Acta Arith., 32 (1977), 107—113.

[6] Мозер, Ян: О поведении функций Re $\{\zeta(s)\}$, Im $\{\zeta(s)\}$ в критической полосе, Acta Arith., 34 (1977), 25—35.

[7] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[8]—[10] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, III, IV, V, Quart. J. Math. 3 (1932), 133—141; 5 (1934), 98—105; 195—210.

Адрес автора:

Поступила в редакцию: 13. 5. 1980

Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

SUMMARY

ON A HARDY—LITTLEWOOD LEMMA IN THE THEORY OF RIEMANN'S ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let $\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi$ and $\{\bar{t}_\nu\}$ denotes the sequence defined as $\vartheta_1(\bar{t}_\nu)=\frac{\pi}{2}\nu$, $\nu=1,2,\ldots$. In the present paper the theorem on mean value (a discrete analogue of the Hardy—Littlewood theorem (1921))

$$\sum_{T\leq\bar{t}_\nu\leq T+U}\left\{\sum_{k=0}^{M}Z(\bar{t}_\nu+\omega k)\right\}^2\sim AMU\ln^2 T,\quad T\to+\infty,$$

is proved. Above $0<A$ is the absolute constant, $\omega=\pi/\ln\frac{T}{2\pi}$, $U=T^{5/12}\psi\ln^3 T$, $\ln T<M<\sqrt[3]{\Psi}\ln T$, Ψ is an arbitrary slowly increasing to $+\infty$ function, $Z(t)$ is the function defined by Riemann—Siegel formula.

SÚHRN

O JEDNEJ HARDY—LITTLEWOODOVEJ LEME V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech $\vartheta_1(t)=\frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\pi$ a $\{\bar{t}_\nu\}$ označuje postupnosť definovanú vzťahom $\vartheta_1(\bar{t}_\nu)=\frac{\pi}{2}\nu$, $\nu=1,2,\ldots$. V tejto práci je dokázaná veta o strednej hodnote (diskrétny analóg Hardyho—Littlewoodovej vety (1921))

$$\sum_{T \leq t_\nu \leq T+U} \left\{ \sum_{k=0}^{M} Z(\bar{t}_\nu + \omega k) \right\}^2 \sim AMU \ln^2 T, \quad T \to +\infty,$$

kde $0 < A$ je absolútna konštanta, $\omega = \pi / \ln \frac{T}{2\pi}$, $U = T^{5/12} \psi \ln^3 T$, $\ln T < \sqrt[3]{\Psi} \ln T$, Ψ je ľubovoľne pomaly rastúca $k + \infty$ funkcia, $Z(t)$ je funkcia definovaná Riemannovým—Siegelovým vzorcom.