UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

НОВЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРИБЛИЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

В предлагаемой работе мы вводим некоторые несвязные множества и получаем интегральные теоремы о среднем для функции

$$V(t, \delta) = \operatorname{Im}\left\{\zeta\left(\frac{1}{2} + \delta + it\right)\right\}, \; 0 < \delta_1 \leqq \delta \leqq \frac{1}{4} - \Delta, \; \Delta \in (0, 1/6\rangle, \tag{1}$$

относительно этих множеств.

1. *Пусть*

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}\, t \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\, t - \frac{1}{8}\,\pi \tag{2}$$

и $\{\tilde{t}_\nu(\tau)\}$ обозначает семейство последовательностей, определенное соотношением

$$\vartheta_1[\tilde{t}_\nu(\tau)] = \frac{\pi}{2}\,\nu + \frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}, \qquad \tau \in \langle -\pi, \pi\rangle, \tag{3}$$

где $\nu = 1, 2, \ldots$. Очевидно $\tilde{t}_\nu(0) = \tilde{t}_\nu$, (см. [3], (27)).

Пусть

$$\begin{aligned} M_1 &= M_1(x, T, H) = \bigcup_{T \leqq \tilde{t}_{2\nu} \leqq T+H} \{t\colon \tilde{t}_{2\nu}(-x) < t < \tilde{t}_{2\nu}(x),\; 0 < x \leqq \pi/2\}, \\ M_2 &= M_2(y, T, H) = \bigcup_{T \leqq \tilde{t}_{2\nu+1} \leqq T+H} \{t\colon \tilde{t}_{2\nu+1}(-y) < t < \tilde{t}_{2\nu+1}(y),\; 0 < y \leqq \pi/2\}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$H = (2\pi)^{-\delta} T^{\Delta+\delta} \Psi(T), \tag{5}$$

и $\Psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция.

Из приближенного функционального уравнения Харди—Литтлвуда ([4], стр. 82)

$$\zeta(s)=\sum_{n\leq u}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n\leq v}\frac{1}{n^{1-s}}+O(u^{-\sigma})+O(t^{1/2-\sigma}v^{\sigma-1}), \tag{6}$$

$(s=\sigma+it,\ 2\pi uv=t)$ следует (см. [3], (15)—(26)), что

$$-V(t,\delta)=\sum_{n<P_0}\frac{\sin(t\ln n)}{n^{1/2+\delta}}+\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{n<P_0}\frac{\sin(2\vartheta_1-t\ln n)}{n^{1/2-\delta}}+$$

$$+O(T^{-1/4}),\ t\in\langle T,T+H\rangle,\ P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}. \tag{7}$$

Пусть

$$S(a,b)=\sum_{a\leq n<b\leq 2a}n^{it},\ b\leq\sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{8}$$

обозначает элементарную тригонометрическую сумму. Имеет место

Теорема. Если

$$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta}, \tag{9}$$

то

$$\int_{M_1}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{\pi}\frac{H}{(P_0)^{2\delta}}\sin x+O(T^{\Delta}),$$

$$\int_{M_2}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\frac{H}{(P_0)^{2\delta}}\sin y+O(T^{\Delta}). \tag{10}$$

Примечание 1. Соотношения (10) являются асимптотическими (см. (5)).

Примечание 2. В случае (см. [2])

$$\Delta=\frac{173}{1067}+\varepsilon,\qquad \varepsilon>0 \tag{11}$$

имеем (см. (5))

$$H_1=(2\pi)^{-\delta}T^{\frac{173}{1067}+\varepsilon+\delta} \tag{12}$$

(ε — сколь угодно малое число).

Примечание 3. В случае справедливости гипотезы Линделёфа ($\Delta=\varepsilon$, см. [1], стр. 89) имеем

$$H_2=(2\pi)^{-\delta}T^{\varepsilon+\delta}, \tag{13}$$

т. е. 100%-ое улучшение показателя 173/1067 в (12).

2. В этой части мы получим некоторые следствия из теоремы. Так как, в силу (3),

$$\vartheta_1[\tilde{t}_{2\nu}(x)]-\vartheta_1[\tilde{t}_{2\nu}(-x)]=x,\ \vartheta_1[\tilde{t}_{2\nu+1}(y)]-\vartheta_1[\tilde{t}_{2\nu+1}(-y)]=y, \tag{14}$$

то способом [5], стр. 102, (стр. [3], (29)—(31)), получаем

$$\begin{gathered}\tilde{t}_{2\nu}(x)-\tilde{t}_{2\nu}(-x)=\frac{2x}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{xH}{T\ln^2 T}\right),\\ \tilde{t}_{2\nu+1}(y)-\tilde{t}_{2\nu+1}(-y)=\frac{2y}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{yH}{T\ln^2 T}\right),\end{gathered} \tag{15}$$

для $\tilde{t}_{2\nu}(-x),\ \tilde{t}_{2\nu+1}(y)\in\langle T,\ T+H\rangle$. В силу (4), (15) и [3], (32) имеем

$$m(M_1)=\frac{x}{\pi}H+O(x),\quad m(M_2)=\frac{y}{\pi}H+O(y), \tag{16}$$

где $m(M_1)$, $m(M_2)$ обозначают меры множеств M_1, M_2 соответственно. Теперь из теоремы получаем.

Следствие 1. Если имеет место (9), то

$$\begin{gathered}\frac{1}{m(M_1)}\int_{M_1}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t\sim-\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\frac{\sin x}{x},\\ \frac{1}{m(M_2)}\int_{M_2}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\frac{\sin y}{y}.\end{gathered} \tag{17}$$

Так как $M_1\cap M_2=\emptyset$, $[\tilde{t}_{2\nu}(\pi/2)=\tilde{t}_{2\nu+1}(-\pi/2)$, см. (3), (4)], то имеет место

Следствие 2. Если имеет место (9), то

$$\int_{M_1\cup M_2}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{H}}{(\mathrm{P}_0)^{2\delta}}(\sin y-\sin x)+O(T^{\Delta}),\ x\neq y,\\ O(T^{\Delta}),\ x=y.\end{cases} \tag{18}$$

Так как из (7), (9) следует, что

$$V(t,\delta)=O(T^{\Delta}\ln T),\qquad t\in\langle T,\ T+H\rangle, \tag{19}$$

То, в силу (15),

$$\int_T^{T'}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t=O(T^{\Delta}),\quad \int_{T''}^{T+H}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t=O(T^{\Delta}), \tag{20}$$

для $|T'-T|$, $|T+H-T''|=O(1/\ln T)$. Еще напомним, что (см. (3)),

$$\tilde{t}_{2\nu}(\pi/2)=\tilde{t}_{2\nu+1}(-\pi/2),\quad \tilde{t}_{2\nu+1}(\pi/2)=\tilde{t}_{2\nu+2}(-\pi/2). \tag{21}$$

Теперь, полагая в (18), (второе соотношение), $x=\pi/2$, получаем

Следствие 3. Если имеет место (9), то

$$\int_T^{T+H} V(t,\delta)\,\mathrm{d}t = O(T^\Delta). \tag{22}$$

Примечание 4. Всякому из случаев (17), (18), (22) соответсвуют формулы двух типов, в силу подстановок $H\to H_1$, $H\to H_2$, (см. (12), (13)).

Наконец мы вводим следующую гипотезу:

$$\int_{M_1} V(t,\delta)\,\mathrm{d}t - \int_{M_2} V(t,\delta)\,\mathrm{d}t = \int_{M_1\cap M_2} |V(t,\delta)|\,\mathrm{d}t + o(H),\quad x=y. \tag{23}$$

Из (10), $(x=y=\pi/2)$, получаем

Следствие 4. По гипотезе (23), имеет место

$$\frac{1}{H}\int_T^{T+H} |V(t,\delta)|\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{\pi(P_0)^{2\delta}}. \tag{24}$$

В следующих частях работы помещено доказательство теоремы.

3. В работе [3], (72) мы показали, что из (9) следует оценка

$$\sum_{T\leq \tilde{t}_\nu\leq T+H} V(\tilde{t}_\nu,\delta) = O(T^\Delta \ln T). \tag{25}$$

В этой части мы покажем, что имеет место

Лемма 1. Из (9) следует оценка

$$\sum_{T\leq \tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H} V[\tilde{t}_\nu(\tau),\delta] = O(T^\Delta \ln T), \tag{26}$$

равномерно относительно $\tau\in\langle -\pi,\pi\rangle$.

Примечание 5. Содержание леммы 1 выразим так: оценка (25) является инвариантной относительно трансляций

$$\tilde{t}_\nu \to \tilde{t}_\nu(\tau),\qquad \tau\in\langle -\pi,\pi\rangle. \tag{27}$$

Доказательство. Напомним, что при доказательстве оценки (21) основную роль играли соотношения ([3], (31), (32))

$$\begin{gathered} \tilde{t}_{\nu+1}-\tilde{t}_\nu = \frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}} + O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right), \\ \sum_{t\leq \tilde{t}_\nu\leq T+H} 1 = \frac{1}{\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(1), \end{gathered} \tag{28}$$

где $\tilde{t}_\nu, \tilde{t}_{\nu+1}\in\langle T, T+H\rangle$. Тем же самым способом, ([5], стр. 102, [3], (29)—(32)) в случае семейства последовательностей $\{\tilde{t}_\nu(\tau)\}$, (см. (3)) получаем соотношения

$$\tilde{t}_{\nu+1}(\tau)-\tilde{t}_\nu(\tau)=\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right),$$

$$\sum_{T\leq\tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}1=\frac{1}{\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(1), \tag{29}$$

$(\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle,\ \tilde{t}_\nu(\tau),\ \tilde{t}_{\nu+1}(\tau)\in\langle T,T+H\rangle)$, вполне характеризующие это семейство.

Из формулы (7) получаем

$$-V[\tilde{t}_\nu(\tau),\delta]=(-1)^\nu\frac{\cos\tau}{(P_0)^{2\delta}}+(-1)^\nu\frac{\cos\tau}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{2\leq n<P_0}\frac{\cos[\tilde{t}_\nu(\tau)\ln n]}{n^{1/2-\delta}}+$$

$$+(-1)^\nu\frac{\sin\tau}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{2\leq n<P_0}\frac{\sin[\tilde{t}_\nu(\tau)\ln n]}{n^{1/2-\delta}}+\sum_{2\leq n<P_0}\frac{\sin[\tilde{t}_\nu(\tau)\ln n]}{n^{1/2+\delta}}+O(T^{-1/4})=$$

$$=(-1)^\nu\frac{\cos\tau}{(P_0)^{2\delta}}+S_1+S_2+S_3+O(T^{-1/4}). \tag{30}$$

Так как, аналогично случаю [3], (33), (63), (64),

$$\sum_{t\leq\tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}(S_1+S_2+S_3)=O(T^\Delta\ln T), \tag{31}$$

то из (30) следует (26).

4. В работе [3], (69) мы показали, что из (9) следует асимптотическое соотношение

$$-\sum_{T\leq\tilde{t}_\nu\leq T+H}(-1)^\nu V(\tilde{t}_\nu,\delta)=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^\Delta\ln T). \tag{32}$$

В этой части мы покажем, что имеет место

Лемма 2. Из (9) следует, что

$$-\sum_{T\leq\tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}(-1)^\nu V[\tilde{t}_\nu(\tau),\delta]=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^\Delta\ln T). \tag{33}$$

Примечание 6. Формула (32) не является инвариантной относительно трансляций $\tilde{t}_\nu\to\tilde{t}_\nu(\tau)$, $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ (ср. примечание 5).

Примечание 7. Для $\tau\neq-\pi/2,\ \pi/2$ всякое из соотношений (33) является асимптотическим.

Доказательство. Из (30) в силу (29) следует, что

$$-\sum_{T\leq\tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}(-1)^\nu V[\tilde{t}_\nu(\tau),\delta]=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+$$

$$+\frac{\cos\tau}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{2\leq n<P_0} n^{-1/2+\delta}\sum_{T\leq \tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}\cos[\tilde{t}_\nu(\tau)\ln n]+$$

$$+\frac{\sin\tau}{(P_0)^{2\delta}}\sum_{2\leq n<P_0} n^{-1/2+\delta}\sum_{T\leq \tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}\sin[\tilde{t}_\nu(\tau)\ln n]+$$

$$+\sum_{2\leq n<P_0} n^{-1/2-\delta}\sum_{T\leq \tilde{t}_\nu(\tau)\leq T+H}(-1)^\nu\sin[\tilde{t}_\nu(\tau)\ln n]+O(\ln T)= \tag{34}$$

$$=\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\cdot\frac{H}{\pi}\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+S_4+S_5+S_6+O(\ln T).$$

Так как, аналогично случаю [3], (49), (62), (63), (64)

$$S_4+S_5+S_6=O(T^\Delta\ln T), \tag{35}$$

то из (34) следует (33).

5. В силу (26), (33) получается

Лемма 3. Из (9) следует, что

$$\sum_{T\leq \tilde{t}_{2\nu}(\tau)\leq T+H} V[\tilde{t}_{2\nu}(\tau),\delta]=-\frac{1}{2\pi(P_0)^{2\delta}}H\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^\Delta\ln T), \tag{36}$$

$$\sum_{T\leq \tilde{t}_{2\nu+1}(\tau)\leq T+H} V[\tilde{t}_{2\nu+1}(\tau),\delta]=\frac{1}{2\pi(P_0)^{2\delta}}H\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^\Delta\ln T). \tag{37}$$

Теперь мы завершим

Доказательство теоремы. Так как (см. (2))

$$\vartheta_1'(t)=\frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}, \tag{38}$$

то из (3) получаем

$$\left(\frac{d\tilde{t}_\nu(\tau)}{d\tau}\right)^{-1}=2\ln P_0+O\left(\frac{H}{T}\right), \tag{39}$$

для $\tilde{t}_\nu(\tau)\in\langle T, T+H\rangle$. Отсюда, (см. (19), $t=\tilde{t}_{2\nu}(\tau)$),

$$\int_{-x}^{x} V[\tilde{t}_{2\nu}(\tau)\ \delta]\,d\tau=2\ln P_0\int_{\tilde{t}_{2\nu}(-x)}^{\tilde{t}_{2\nu}(x)} V(t,\delta)\,dt+O(HT^{\Delta-1}) \tag{40}$$

Далее, (см. (19), (28), (29)),

$$\sum_{T\leq \tilde{t}_{2\nu}(\tau)\leq T+H} V[\tilde{t}_{2\nu}(\tau),\delta]=\sum_{T\leq \tilde{t}_{2\nu}\leq T+H} V[\tilde{t}_{2\nu}(\tau),\delta]+O(T^\Delta\ln T). \tag{41}$$

Наконец, интегрируя (36), (после преобразования (41)), по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, получаем первое соотношение в (10), и. аналогичным способом — второе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Карацуба, А. А.: Основы аналитической теории чисел, Москва 1975.

[2] Колесник, Г. А.: Об оценках некоторых тригонетрических сумм, Acta Arith., 25 (1973), 7—30.

[3] Мозер, Ян: О поведении функций Re $\{\zeta(s)\}$, Im $\{\zeta(s)\}$ в критической полосе. Acta Arith., 34 (1977), 25—35.

[4] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

[5] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zetafunction of Riemann IV, Quart. J. Math. 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 11. 6. 1980

SÚHRN

NOVÉ DÔSLEDKY Z PRIBLIŽNEJ FUNKCIONÁLNEJ ROVNICE V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

Nech

$$V(t,\delta)=\mathrm{Im}\left\{\zeta\left(\frac{1}{2}+\delta+it\right)\right\},\quad 0<\delta_1\leqq\delta\leqq\delta_2<\frac{1}{12},$$

$$H=(2\pi)^{-\delta}T^{1/6+\delta}\Psi(T)$$

kde $\Psi(T)$ je ľubovoľne pomaly rastúca $k+\infty$ funkcia. V práci sú definované dve sústavy $M_1=M_1(x)$, $M_2=M_2(y)$, $0<x$, $y\leqq\pi/2$ nesúvislých množín, vzhľadom na ktoré platia tieto vety o strednej hodnote:

$$\frac{1}{m(M_1)}\int_{M_1}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t\sim-\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\frac{\sin x}{x},$$

$$\frac{1}{m(M_2)}\int_{M_2}V(t,\delta)\,\mathrm{d}t\sim\frac{1}{(P_0)^{2\delta}}\frac{\sin y}{y},\qquad m(M_1\cup M_2)\leqq H,$$

kde $P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}$ a $m(M_1)$, $m(M_2)$ označujú miery množín M_1, M_2 odpovedajúco.

SUMMARY

A NEW CONSEQUENCES FROM THE APPROXIMATE FUNCTIONAL EQUATION IN THE THEORY OF RIEMANN ZETA-FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

Let

$$V(t, \delta) = \mathrm{Im}\left\{\zeta\left(\frac{1}{2} + \delta + it\right)\right\}, \quad 0 < \delta_1 \leqq \delta \leqq \delta_2 < \frac{1}{12},$$

$$H = (2\pi)^{-\delta} T^{1/6+\delta} \Psi(T)$$

where $\Psi(T)$ is a function arbitrary slowly increasing to $+\infty$. In the paper there are defined two families $M_1 = M_1(x)$, $M_2 = M_2(y)$, $0 < x$, $y \leqq \pi/2$ of non-connected sets such that the following mean value theorems are valid:

$$\frac{1}{m(M_1)} \int_{M_1} V(t, \delta)\, \mathrm{d}t \sim -\frac{1}{(P_0)^{2\delta}} \frac{\sin x}{x},$$

$$\frac{1}{m(M_2)} \int_{M_2} V(t, \delta)\, \mathrm{d}t \sim \frac{1}{(P_0)^{2\delta}} \frac{\sin y}{y}, \quad m(M_1 \cup M_2) \leqq H,$$

where $P_0 = \sqrt{\dfrac{T}{2\pi}}$ and $m(M_1)$, $m(M_2)$ denote the measures of the sets M_1, M_2 respectively.