UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

ОБ ОДНОЙ БИКВАДРАТНОЙ СУММЕ В ТЕОРИИ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

ЯН МОЗЕР, Братислава

1. В работе [2] мы показали, что

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) = O(N \ln^4 N), \tag{1}$$

(обозначения см. там же). Притом задачу об оценке суммы входящей в (1) мы свели к оценке определенной биквадратной суммы, для которой мы получили оценку

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu) = O(T \ln^5 T). \tag{2}$$

Итак, при этом способе доказательства, улучшение оценки (1) следует из улучшения оценки (2). Однако, мы сейчас покажем, что оценку (2) нельзя улучшить. А именно покажем, что имеет место

Теорема.

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu) \sim \frac{1}{2\pi^3} T \ln^5 T, \quad T \to +\infty. \tag{3}$$

Так как ([2], (11))

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) < A \sum_{\tilde{t}_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu), \tag{4}$$

то получаем

Следствие. Оценку (1) нельзя улучшить способом опирающимся на упоминавшуюся биквадратную сумму.

2. В этой части мы получим оценку (ср. [2], (62))

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} S_4 = O(T \ln^4 \mathrm{T}). \tag{62'}$$

Используем соотношение ([1], стр. 296)

$$\sum_{r=1}^{x-k} d(r)d(r+k)<4x(\ln x+1)^2 \sum_{d\mid k} \frac{1}{d}, \qquad x \geqq k. \tag{5}$$

Имеем (ср. [2], (53), $x=\frac{T}{2\pi}$ и [1], стр. 298)

$$\sum_{m<n}\sum \frac{d(m)d(n)}{\sqrt{mn}} S_{62}=$$

$$=O\left\{\sum_{r=1}^{x} \sum_{m=1}^{x-(2A+r)} \frac{d(m)}{\sqrt{m}} \cdot \frac{d(m+r+2A)}{\sqrt{m}} \cdot \frac{m \ln (m+1)}{r}\right\}=$$

$$=O\left\{\ln T \sum_{r=1}^{x} \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{x-(2A+r)} d(m)d(m+r+2A)\right\}=$$

$$=O\left\{\ln T \sum_{r=1}^{x} \frac{1}{r} x(\ln x+1)^2 \sum_{d\mid(r+2A)} \frac{1}{d}\right\}=$$

$$=O\left\{T \ln^3 T \sum_{r=1}^{x} \frac{1}{r+2A} \sum_{d\mid(r+2A)} \frac{1}{d}\right\}=$$

$$=O(T \ln^3 T) \sum_{dd'\leqq x} \frac{1}{dd'} \cdot \frac{1}{d}=$$

$$=O(T \ln^3 T) \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \sum_{d'=1}^{x} \frac{1}{d'}=O(T \ln^4 T), \tag{6}$$

где использовано, что $m+2A+r=n\leqq x$, т. е. $m\leqq x-(2A+r)$. Следовательно, в силу (6) и [2], (49), (60), получаем (62).

3. В этой части мы получим оценку (см. [2], (65))

$$\sum_{t_{M+1}\leqq t_\nu \leqq T} S_3=O(Z \ln T). \tag{65'}$$

Имеем (см. [2], (27), (29))

$$\sum_{t_{M+1}\leqq t_\nu\leqq T} S_3=2\sum \frac{d^2(n)}{n} \sum_{\tau\leqq t_\nu\leqq T} \cos (2\tilde{t}_\nu \ln n). \tag{7}$$

Сумме (7) соответствует внутренняя сумма

$$\Sigma \cos \{2\pi\varphi(\nu)\}, \tag{8}$$

где

$$\varphi(\nu)=\frac{1}{\pi} \tilde{t}_\nu \ln n. \tag{9}$$

Так как (ср. [2], (58))

$$\varphi''(v) = -\frac{\pi}{4}\frac{\ln n}{\{\vartheta'(\tilde{t}_v)\}^3}\vartheta''(\tilde{t}_v) < -\frac{A}{T\ln^3 T}, \qquad (n \geqq 2), \tag{10}$$

то (ср. [2], (59), (61)) получаем

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leqq \tilde{t}_v \leqq T} S_3(n \geqq 2) = O\{\sqrt{T}(\ln T)^{11/2}\} \tag{11}$$

и, очевидно, (см. [2], (2), (5), (15))

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leqq \tilde{t}_v \leqq T} S_3(n = 1) = O(T \ln T). \tag{12}$$

В силу (11), (12) имеем (65′).

4. В этой части мы покажем, что имеет место (ср. [2], (27), (64))

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leqq \tilde{t}_v \leqq T} S_1 = \sum_{\tilde{t}_{M+1} \leqq \tilde{t}_v \leqq T} \sum_{n \leqq (\tilde{t}_v/2\pi)} \frac{d^2(n)}{n} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^3} T \ln^5 T + O\left(\frac{T\ln^5 T}{\Psi}\right), \tag{64′}$$

где $\Psi = \Psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция (например, $\Psi \leqq \ln\ln\ln T$).

Действуя в случае соотношения [2], (5) способом [3], стр. 102, получаем

$$\tilde{t}_{v+1} - \tilde{t}_v = \frac{\pi}{\ln\frac{\tilde{t}_v}{2\pi} + O\left(\frac{1}{\tilde{t}_v}\right)} + O\left(\frac{1}{\tilde{t}_v \ln^3 \tilde{t}_v}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\ln\frac{\tilde{t}_v}{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\tilde{t}_v \ln^2 \tilde{t}_v}\right). \tag{13}$$

Прежде всего, в силу (13) и [2], (61),

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leqq \tilde{t}_v \leqq (T/\Psi)} \sum_{n \leqq (\tilde{t}_v/2\pi)} \frac{d^2(n)}{n} = O\left(\frac{T}{\Psi}\ln T . \ln^4 T\right) = 0\left(\frac{T\ln^5 T}{\Psi}\right). \tag{14}$$

Далее, в случае

$$\tilde{t}_v \in \left(\frac{T}{2^m}, \frac{T}{2^{m-1}}\right\rangle = \mathrm{I}_m, \quad m = 1, \ldots, m_0, \quad \frac{T}{2^{m_0+1}} < \frac{T}{\Psi} \leqq \frac{T}{2^{m_0}},$$

имеем

$$\frac{1}{\ln\frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}}=\frac{1}{\ln\frac{T}{2\pi\,.\,2^m}}+O\left(\frac{1}{\ln^2\frac{T}{2^m}}\right),$$

и

$$\tilde{t}_{\nu+1}-\tilde{t}_\nu=\frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi\,.\,2^m}}+O\left(\frac{1}{\ln^2\frac{T}{2^m}}\right).$$

Значит,

$$\sum_{\tilde{t}_\nu\in I_m}1=\frac{T}{\pi\,.\,2^m}\ln\frac{T}{2\pi\,.\,2^m}+O\left(\frac{T}{2^m}\right)=$$

$$=\frac{T}{\pi 2^m}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{\ln 2}{\pi}\cdot\frac{m}{2^m}\,T+O\left(\frac{T}{2^m}\right),$$

и

$$\sum_{\frac{T}{\Psi}\leq\tilde{t}_\nu\leq T}1=\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{\tilde{t}_\nu\in I_m}1+O\left(\frac{T\ln T}{\Psi}\right)=\frac{1}{\pi}\,T\ln T+O\left(\frac{T\ln T}{\Psi}\right).\tag{15}$$

Однако, (см. [2], (61))

$$\sum_{n\leq(\tilde{t}_\nu/2\pi)}\frac{d^2(n)}{n}=\frac{1}{4\pi^2}\ln^4\frac{T}{2\pi}+O(\Psi\ln^3 T),\qquad \tilde{t}_\nu\in\left\langle\frac{T}{\Psi},\,T\right\rangle.\tag{16}$$

Следовательно,

$$\sum_{\frac{T}{\Psi}\leq\tilde{t}_\nu\leq T}\;\sum_{n\leq(\tilde{t}_\nu/2\pi)}\frac{d^2(n)}{n}=\frac{1}{4\pi^3}\,T\ln^5 T+O\left(\frac{T\ln^5 T}{\Psi}\right).\tag{17}$$

Наконец, из (14), (17) следует (64′).

5. В силу (62′), (64′), (65′), [2], (39), из [2], (27) получаем (ср. [2], (66))

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1}\leq\tilde{t}_\nu\leq T}4S=\frac{1}{2\pi^3}\,T\ln^5 T+O\left(\frac{T\ln^5 T}{\Psi}\right).\tag{66′}$$

Теперь, в силу (66′) и [2], (67), (68) получаем (3).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ingham, A. E.: Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function. Proc. Lond. Math. Soc. 2, 27 (1926), 273—300.

[2] Мозер, Ян: Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана. Acta Arith. 36 (1980), 147—156.

[3] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann. Quart. J. Math., 5 (1934), 98—105.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 8. 1. 1981

SÚHRN

O JEDNEJ BIKVADRATICKEJ SUME V TEÓRII RIEMANNOVEJ DZETA-FUNKCIE

Ján Moser, Bratislava

V tejto práci je dokázaná nasledujúca veta o strednej hodnote

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu) \sim \frac{1}{2\pi^3} T \ln^5 T .$$

SUMMARY

ON A BIQUADRATIC SUM IN THE THEORY OF THE RIEMANN'S ZETA FUNCTION

Ján Moser, Bratislava

In the paper the following mean value theorem is proved

$$\sum_{\tilde{t}_{M+1} \leq \tilde{t}_\nu \leq T} Z^4(\tilde{t}_\nu) \sim \frac{1}{2\pi^3} T \ln^5 T .$$