UNIVERSITAS COMENIANA
ACTA MATHEMATICA UNIVERSITATIS COMENIANAE
XLII—XLIII—1983

УЛУЧШЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ—ЛИТТЛВУДА О ПЛОТНОСТИ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

ЯН МОЗЕР, Братислава

Пусть $N_0(T)$ обозначает количество нулей функции

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right),\quad t\in(0,\,T).$$

Харди и Литтлвуд показали ([1], стр. 283), что имеет место оценка

$$N_0(T+T^{1/2+\varepsilon})-N_0(T)>A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon},\ T\geqq T_0(\varepsilon),\ \varepsilon>0. \tag{1}$$

В предлагаемой работе получена теорема о количестве правильных промежутков (определние см. ниже), из которой следует оценка

$$N_0(T+T^{5/12}\psi\ln^3 T)-N_0(T)>A(\Psi)T^{5/12}\psi\ln^3 T, \tag{2}$$

($\Psi=\Psi(T)$ — сколь угодно мелленно возрастающая к $+\infty$ функция, $0<$ $<A(\Psi)$ — постоянная зависящая от выбора Ψ).

Показатель 5/12 представляет собой 16,6 %-ое улучшение показателя 1/2 у Харди—Литтлвуда.

Напомним, что А. Сельберг [(4], стр. 46, Теорема А) получил оценку

$$N_0(T+T^{1/2+\varepsilon})-N_0(T)>A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon}\ln T$$

и высказал гипотезу ([4], стр. 5), что показатель 1/2 можно заменить числом $\vartheta<1/2$. Следовательно, оценка (2) представляет собой первый шаг в этом направлении.

1. Пусть ([6], стр. 94, 383)

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right), \tag{3}$$

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}\,t\ln\pi + \operatorname{Im}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right) = \frac{1}{2}\,t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{8}\,\pi + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{4}$$

Пусть далее,

$$\vartheta_1(t) = \frac{1}{2}\,t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\,t - \frac{1}{8}\,\pi \tag{5}$$

и $\{\bar{t}_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением ([3], (2))

$$\vartheta_1(\bar{t}_\nu) = \frac{\pi}{2}\,\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Положим

$$\omega = \frac{\pi}{\ln\frac{T}{2\pi}}, \quad U = T^{5/12}\Psi\ln^3 T, \quad M_1 = M_1(\delta, T) = [\delta\ln T], \quad \delta > 1. \tag{7}$$

Определение. Промежуток

$$\langle \bar{t}_\nu + k(\nu)\omega,\ \bar{t}_\nu + (k(\nu)+1)\omega\rangle, \tag{8}$$

где

$$\bar{t}_\nu \in \langle T, T+U\rangle,\ 0 \leqq k(\nu) \leqq M_1 \tag{9}$$

и $k(\nu)$ — целое число, назовем правильным (ср. [5], [2]), если

$$Z(\bar{t}_\nu + k(\nu)\omega)\,.\,Z(\bar{t}_\nu + (k(\nu)+1)\omega) < 0. \tag{10}$$

Пусть $G(T, U, \delta)$ обозначает количество не пересекающихся правильных промежутков $\subset \langle T, T+U\rangle$. Имеет место

Теорема. Существуют $\delta_0 > 1$, $A(\Psi, \delta_0) > 0$, $T_0(\Psi, \delta_0) > 0$ такие, что

$$G(T, U, \delta_0) > A(\Psi, \delta_0)U, \qquad T \geqq T_0(\Psi, \delta_0). \tag{11}$$

Так как правильный промежуток содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(1/2+it)$, (см. (3), (10)), то отсюда получаем оценку (2), (полагая $A(\Psi, \delta_0) = A(\Psi)$).

Доказательство теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения. Положим (см. [3], (3))

$$J = \sum_{k=0}^{M}\sum_{l=0}^{M}\sum_{T \leqq \bar{t}_\nu \leqq T+U} Z(\bar{t}_\nu + k\omega)Z(\bar{t}_\nu + l\omega). \tag{12}$$

Имеет место (см. теорему из [3])

Лемма α.

$$J = AMU\ln^2 T + o(MU\ln^2 T), \tag{13}$$

где

$$U=T^{5/12}\Psi \ln^3 T,\ \ln T<M<\sqrt[3]{\Psi}\ln T, \tag{14}$$

($0<A$ — абсолютная постоянная).

Положим

$$N=\sum_{T\leqq \bar{t}_\nu \leqq T+U} |K|^2, \tag{15}$$

где

$$K=\sum_{k=0}^{M}\{e^{-i\vartheta(\bar{t}_\nu+k\omega)}Z(\bar{t}_\nu+k\omega)-1\}. \tag{16}$$

Имеет место

Лемма β.

$$N=O(MU\ln^2 T). \tag{17}$$

2. В этой части мы покажем, как с помощью лемм α, β завершается **Доказательство теоремы.** Положим

$$I(\bar{t}_\nu)=\sum_{k=0}^{M} Z(\bar{t}_\nu+k\omega), \tag{18}$$

$$L(\bar{t}_\nu)=\sum_{k=0}^{M} |Z(\bar{t}_\nu+k\omega)|. \tag{19}$$

Пусть $R=R(T,U)$ обозначает количество таких $\bar{t}_\nu^*\in\langle T, T+U\rangle$, для которых имеет место

$$|I(\bar{t}_\nu^*)|=L(\bar{t}_\nu^*). \tag{20}$$

Ясно, что при $\bar{t}_\nu^*$ последовательность

$$\{Z(\bar{t}_\nu^*+k\omega)\}_{k=0}^{M} \tag{21}$$

сохраняет знак. Имеем

$$\sum_{\bar{t}_\nu^*}|I|=\sum_{\bar{t}_\nu^*}L. \tag{22}$$

В силу (13), (16) получаем (соответственно)

$$\sum_{\bar{t}_\nu^*}|I|\leqq\sqrt{R}\Big(\sum_{\bar{t}_\nu^*}I^2\Big)^{1/2}\leqq\sqrt{R}\Big(\sum_{\bar{t}_\nu}I^2\Big)^{1/2}=(RJ)^{1/2}<A(RMU\ln^2 T)^{1/2}, \tag{23}$$

$$L=\sum_{k=0}^{M}|Z(\bar{t}_\nu+k\omega)|\geqq\Big|\sum_{k=0}^{M}e^{-i\vartheta(\bar{t}_\nu+k\omega)}Z(\bar{t}_\nu+k\omega)\Big|=$$

$$=|K+M+1|\geqq M+1-|K|. \tag{24}$$

Теперь, используя в надлежащем месте (17), получаем

$$\sum_{\bar{t}_\nu^*} L \geqq (M+1)R - \sum_{\bar{t}_\nu^*} |K| \geqq$$

$$\geqq (M+1)R - \sqrt{R}\Big(\sum_{\bar{t}_\nu^*} |K|^2\Big)^{1/2} \geqq (M+1)R - (RN)^{1/2} >$$

$$> (M+1)R - A(RMU \ln^2 T)^{1/2}. \tag{25}$$

В силу (22), (23), (25),

$$(M+1)R < A(RMU \ln^2 T)^{1/2}. \tag{26}$$

и, следовательно,

$$R < A\,\frac{U \ln^2 T}{M}. \tag{27}$$

Теперь мы подразделим количество (ср. [3], (8))

$$Q_1 = \frac{1}{\pi}\, U \ln \frac{T}{2\pi} + O\Big(\frac{U^2}{T}\Big) \tag{28}$$

значений $\bar{t}_\nu \in \langle T,\ T+U\rangle$ на $[Q_1/(2M)]$ пар примыкающих друг к другу ячеек j_1, j_2 имеющих (кроме, быть может последней из j_2) длину M (ср. [6], стр. 266). Пусть μ — число ячек j_1 состоящих только из точек $\bar{t}_\nu^*$. В силу (27) мы имеем

$$\mu M < A\,\frac{U \ln^2 T}{M},$$

т. е.

$$\mu < AU\Big(\frac{\ln T}{M}\Big)^2. \tag{29}$$

Положим $M = M_1 = [\delta \ln T]$, (см. (7)). В силу (7), (28), (29) при достаточно большом δ (скажем, $= \delta_0$) получается

$$\Big[\frac{Q_1}{2M}\Big] - \mu > A_1\,\frac{U \ln T}{M} - A_2\,\frac{U^2}{MT} - \mu > \frac{1}{\delta_0}\Big(A_3 - \frac{A_4}{\delta_0}\Big)U - A_5 > A(\Psi,\ \delta_0)U. \tag{30}$$

Это неравенство дает оценку снизу количества таких ячеек $\bar{j}_1$, каждая из которых содержит хотя бы одну точку $\bar{t}_\nu$, для которой (см. (18)—(20))

$$|I(\bar{t}_\nu)| \neq L(\bar{t}_\nu). \tag{31}$$

Для такой точки члены последовательности

$$\{Z(\bar{t}_\nu + k\omega)\}_{k=0}^{M}$$

изменяют знак, т. е. существует $k(\nu) \in \langle 0, M(\delta_0)\rangle$, (см. (7)) для которого имеет место (10). Так как (не пересекающихся) ячеек такого рода не менее чем $A(\Psi, \delta_0)U$, (см. (30)), то теорема доказана.

Доказательство леммы β помещено в следующих частях.

3. Положим (ср. (16))

$$\begin{aligned} K_1 &= \mathrm{Re}\,\{e^{-i\vartheta(\bar{t}_\nu + k\omega)} Z(\bar{t}_\nu + k\omega) - 1\}.\{e^{i\vartheta(\bar{t}_\nu + l\omega)} Z(\bar{t}_\nu + l\omega) - 1\} = \\ &= \mathrm{Re}\,\{(e^{-i\vartheta_k} Z_k - 1)(e^{i\vartheta_l} Z_l - 1)\} = \\ &= Z_k Z_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) - Z_k \cos\vartheta_k - Z_l \cos\vartheta_l + 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Отсюда, полагая

$$Z_k = 2\cos\vartheta_k + \bar{Z}_k, \quad \bar{t}_k = \bar{t}_\nu + k\omega, \tag{33}$$

где (см. [3], (117))

$$\bar{Z}_k = 2\sum_{2 \leq n < P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\vartheta_k - \bar{t}_k \ln n) + O(T^{-1/4}), \tag{34}$$

получается

$$\begin{aligned} K_1 &= \bar{Z}_k \bar{Z}_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) + \\ &+ 2\bar{Z}_k \cos\vartheta_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) + 2\bar{Z}_l \cos\vartheta_k \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) - \\ &- \bar{Z}_k \cos\vartheta_k - \bar{Z}_l \cos\vartheta_l + \\ &+ 4\cos\vartheta_k \cos\vartheta_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) - 2\cos^2\vartheta_k - 2\cos^2\vartheta_l + 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Наконец, (см. (15), (16), (32), (35)),

$$\begin{aligned} N &= \sum_{T \leq \bar{t}_\nu \leq T+U} \sum_{k=0}^{M} \sum_{l=0}^{M} K_1 = \sum_{\bar{t}_\nu} \sum_k \sum_l \bar{Z}_k \bar{Z}_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) + \\ &+ 4\sum_{\bar{t}_\nu} \sum_k \sum_l \bar{Z}_k \cos\vartheta_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) - 2\sum_{\bar{t}_\nu} \sum_k \sum_l \bar{Z}_k \cos\vartheta_k + \\ &+ \sum_{\bar{t}_\nu} \sum_k \sum_l \{4\cos\vartheta_k \cos\vartheta_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) - 4\cos^2\vartheta_k + 1\} = \\ &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4. \end{aligned} \tag{36}$$

4. В этой части мы изучим величину W_4. В силу (4), (5), [3], (118), (119),

$$\begin{aligned} &4\cos\vartheta_k \cos\vartheta_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) = \\ &= 2\cos^2(\vartheta_k - \vartheta_l) + 2\cos(\vartheta_k + \vartheta_l)\cos(\vartheta_k - \vartheta_l) = \end{aligned}$$

$$= 1 + \cos\{2(\vartheta_k - \vartheta_l)\} + \cos(2\vartheta_k) + \cos(2\vartheta_l) =$$

$$= 1 + \cos\{2(\vartheta_{1,k} - \vartheta_{1,l})\} + \cos(2\vartheta_{1,k}) + \cos(2\vartheta_{1,l}) + O\left(\frac{1}{T}\right) =$$

$$= 1 + \cos\{2(k-l)\omega \ln P_0\} + \cos(\pi\nu + 2k\omega \ln P_0) +$$

$$+ \cos(\pi\nu + 2l\omega \ln P_0) + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right) + O\left(\frac{1}{T}\right) =$$

$$= 1 + (-1)^{k+l} + (-1)^{\nu+k} + (-1)^{\nu+l} + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right), \tag{37}$$

$$-4\cos^2 \vartheta_k = -2 - 2\cos(2\vartheta_k) =$$

$$= -2 - 2\cos(\pi\nu + 2k\omega \ln P_0) + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right) =$$

$$= -2 - 2(-1)^{\nu+k} + O\left(\frac{MU}{T \ln T}\right), \tag{38}$$

так как (см. (7))

$$2\omega \ln P_0 = \pi. \tag{39}$$

Следовательно, в силу (28), (36), (38),

$$W_4 = \sum_{t_\nu} \sum_{k} \sum_{l} (-1)^{k+l} + O\left(M^2 . U \ln T \cdot \frac{MU}{T \ln T}\right) =$$

$$= O(U \ln T) + O\left(\frac{M^3 U^2}{T}\right). \tag{40}$$

5. В этой части мы изучим величину W_1. В силу (4), (5), (34), [3], (119), (120), $(m, n \in \langle 2, P_0))$,

$$\bar{Z}_k \bar{Z}_l = 2 \sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos(\vartheta_k + \vartheta_l - \bar{t}_k \ln n - \bar{t}_l \ln m) +$$

$$+ 2 \sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos(\vartheta_k - \vartheta_l - \bar{t}_k \ln n + \bar{t}_l \ln m) + O(T^{-1/12} \ln T) =$$

$$= 2 \sum_{m,n}\sum \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{mn}} \cos\{\bar{t}_\nu \ln(mn) - (k+l)\omega \ln P_0 + k\omega \ln n + l\omega \ln m\} +$$

$$+ 2 \sum_{m,n}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left\{\bar{t}_\nu \ln \frac{n}{m} + (l-k)\omega \ln P_0 + k\omega \ln n - l\omega \ln m\right\} +$$

$$+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T). \tag{41}$$

Далее, (ср. [3], (121))

$$\bar{Z}_k\bar{Z}_l\cos(\vartheta_k-\vartheta_l)=\bar{Z}_k\bar{Z}_l\cos\{(k-l)\omega\ln P_0\}+O\left(\frac{MU\ln T}{T^{2/3}}\right)=$$

$$=\sum_{m,n}\sum\frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{mn}}\cos\{\bar{t}_\nu\ln(mn)-2l\omega\ln P_0+k\omega\ln n+l\omega\ln m\}+$$

$$+\sum_{m,n}\sum\frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{mn}}\cos\{\bar{t}_\nu\ln(mn)-2k\omega\ln P_0+k\omega\ln n+l\omega\ln m\}+$$

$$+\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(\bar{t}_\nu\ln\frac{n}{m}+k\omega\ln n-l\omega\ln m\right)+$$

$$+\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left\{\bar{t}_\nu\ln\frac{n}{m}-2(k-l)\omega\ln P_0+k\omega\ln n-l\omega\ln m\right\}+$$

$$+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T)+O\left(\frac{MU\ln T}{T^{2/3}}\right)=$$

$$=S_5+S_6+S_7+S_8+O\left(\frac{MU}{\sqrt{T}\ln T}\right)+O(T^{-1/12}\ln T). \tag{42}$$

Прежде всего,

$$\sum_k\sum_l\sum_{t_\nu}\{S_5+S_6+S_7(m\neq n)+S_8(m\neq n)\}=O(M^3T^{5/12}\ln^3 T) \tag{43}$$

в силу лемм типа B, C из [3]. Далее, (ср. [3], (94), (104)),

$$S_{71}=\sum_k\sum_l S_7(m=n)=\sum_{2\leq n<P_0}\frac{1}{n}G(M+1,\omega\ln n). \tag{44}$$

Так как (см. (7))

$$0<\frac{1}{2}\omega\ln n=\frac{\pi}{4}\frac{\ln n}{\ln P_0}<\frac{\pi}{4},$$

то

$$\sin\left(\frac{1}{2}\omega\ln n\right)>A\omega\ln n \tag{45}$$

и

$$S_{71}=O\left(\frac{1}{\omega^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}\right)=O(\ln^2 T). \tag{46}$$

Следовательно (см.(28))

$$\sum_{t_\nu} S_{71} = O(U \ln T . \ln^2 T) = O(U \ln^3 T). \tag{47}$$

Аналогичным образом,

$$S_{81} = \sum_k \sum_l S_8(m=n) = \sum_{2 \leq n < P_0} \frac{1}{n} G\left(M+1, \omega \ln \frac{P_0^2}{n}\right). \tag{48}$$

Так как

$$\frac{1}{2} \omega \ln \frac{P_0^2}{n} = \frac{\pi}{2 \ln P_0^2} \ln \frac{P_0^2}{n},$$

то

$$\frac{\pi}{4} < \frac{1}{2} \omega \ln \frac{P_0^2}{n} < \frac{\pi}{2},$$

и

$$\sin\left(\frac{1}{2} \omega \ln \frac{P_0^2}{n}\right) > A > 0. \tag{49}$$

Значит,

$$S_{81} = O\left(\sum_{2 \leq n < P_0} \frac{1}{n}\right) = O(\ln T), \tag{50}$$

и следовательно,

$$\sum_{t_\nu} S_{81} = O(U \ln^2 T). \tag{51}$$

Наконец (см. (36), (42), (43), (47), (51)) в случае (14),

$$W_1 = O(M^3 T^{5/12} \ln^3 T) + O(U \ln^3 T) +$$

$$+ O\left(\frac{M^3 U^2}{\sqrt{T}}\right) + O(M^2 U T^{-1/12} \ln^3 T) = O(MU \ln^2 T). \tag{52}$$

6. В силу (34), (ср. (36))

$$4\bar{Z}_k \cos \vartheta_l \cos(\vartheta_k - \vartheta_l) =$$

$$= \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(\bar{t}_k \ln n) + \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(2\vartheta_k - \bar{t}_k \ln n) +$$

$$+ \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(2\vartheta_l - \bar{t}_k \ln n) + \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(2\vartheta_k - 2\vartheta_l - \bar{t}_k \ln n) +$$

$$O(T^{-1/4}) =$$

$$= W_{21} + W_{22} + W_{23} + W_{24} + O(T^{-1/4}), \tag{53}$$

где $\bar{t}_k = \bar{t}_\nu + k\omega$. Далее, в силу (4), (5), (28), (39), [3], (118),

$$W_{221}=\sum_{T\leq \bar{t}_\nu\leq T+U} W_{22}=$$

$$=\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\bar{t}_\nu} \cos(\pi\nu+2k\omega\ln P_0-\bar{t}_k\ln n)+O\left\{U\ln T\,.\,T^{1/4}\cdot\left(\frac{1}{T}+\frac{MU}{T\ln T}\right)\right\}=$$

$$=(-1)^k\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\bar{t}_\nu} \cos(\pi\nu-\bar{t}_\nu\ln n-k\omega\ln n)+O(MU^2T^{-3/4})=$$

$$=(-1)^k\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{\bar{t}_\nu} \cos(\pi\nu+\bar{t}_\nu\ln n+k\omega\ln n)+O(MU^2T^{-3/4}). \tag{54}$$

$\bar{t}_\nu$ — сумме соответствует следующая функция (ср. [5], стр. 99—100)

$$\chi(\nu)=\frac{1}{2\pi}(\pi\nu+\bar{t}_\nu\ln n+k\omega\ln n). \tag{55}$$

Следовательно, (см. (5), (6), $\bar{t}_\nu\in\langle T,\, T+U\rangle$)

$$\chi'(\nu)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\frac{\ln n}{\ln\sqrt{\frac{\bar{t}_\nu}{2\pi}}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{\ln n}{\ln P_0}+O\left(\frac{U}{T\ln T}\right) \tag{56}$$

и $\chi''(\nu)<0$. Значит, $\chi'(\nu)\in(1/2,\, 3/4+\varepsilon)$,, $\varepsilon\in(0,\, 1/4)$ и (ср. [5], стр. 100)

$$W_{221}=O\left(\sum_n\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+O(MU^2T^{-3/4})=O(T^{1/4}) \tag{57}$$

Аналогичные оценки получаем для величин W_{211}, W_{231}, W_{241}. Следовательно, (см. (36), (53))

$$W_2=O(M^2T^{1/4}) \tag{58}$$

и, действуя аналогичным образом,

$$W_3=O(M^2T^{1/4}). \tag{59}$$

Наконец, в силу (36), (40), (52), (53) в случае (7), имеем

$$N=O(MU\ln^2 T), \tag{60}$$

т.е. лемма β доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy, G. H.—Littlewood, J. E.: The zeros of Riemann's zeta function on critical line, Math. Zs., 10 (1921), 283—317.

[2] Мозер, Ян: О законе Грама в теории дзета-функции Римана. Acta Arith. 32 (1977), 107—113.

[3] Мозер, Ян: Об одной лемме Харди—Литтлвуда в теории дзета-функции Римана. Acta Math. Univ. Comen. 42—43, (1983), 7—26.

[4] Selberg, A.: On the zeros of Riemann's zeta-function, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1942), No 10.

[5] Titchmarsh, E. C.: On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, Quart. J. Math. IV, 5 (1934), 98—105.
[6] Титчмарш, Е. К.: Теория дзета-функции Римана, Москва 1953.

Адрес автора:
Ján Moser
Kat. mat. anal. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava

Поступила в редакцию: 12. 2. 1981

SÚHRN

ZLEPŠENIE HARDY—LITTLEWOODOVEJ VETY O HUSTOTE NULOVÝCH BODOV FUNKCIE $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

Ján Moser, Bratislava

Nech $N_0(T)$ označuje počet nulových bodov funkcie $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $t\in(0, T)$. Hardy a Littlewood dokázali, že platí odhad

$$N_0(T+T^{1/2+\varepsilon})-N_0(T)>A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon}, \qquad \varepsilon>0.$$

Použitím diskrétnej metódy je v práci dokázaný odhad

$$N_0(T+T^{5/12}\psi\ln^3 T)-N_0(T)>A(\Psi)T^{5/12}\psi\ln^3 T,$$

($\Psi=\Psi(T)$ — ľubovoľne pomaly rastúca k $+\infty$ funkcia, $0<A(\Psi)$ — konštanta, závisiaca od výberu Ψ).

SUMMARY

AN IMPROVING OF THE HARDY—LITTLEWOOD THEOREM ON DENSITY OF ZERO POINTS OF $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$

Ján Moser, Bratislava

Let $N_0(T)$ denote the number of zero points of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, $t\in(0, T)$. Hardy and Littlewood have proved the estimation

$$N_0(T+T^{1/2+\varepsilon})-N_0(T)>A(\varepsilon)T^{1/2+\varepsilon}, \qquad \varepsilon>0.$$

In the present paper, by means of a discrete method, the estimate

$$N_0(T+T^{5/12}\psi\ln^3 T)-N_0(T)>A(\Psi)T^{5/12}\psi\ln^3 T,$$

($\Psi=\Psi(T)$ — is an arbitraryly slowly increasing to $+\infty$, $0<A(\Psi)$ — is a constant depending on the choice of Ψ) is proved.