»religiösen Philosophie und Weltanschauung« Spinozas gegenüber. Das ist gewiß sehr verständlich. Wenn Weltverneinung und Weltlosigkeit der Mystik wesentlich zugehören, dann ist Hegels welterfüllende und weltbejahende Philosophie »von dem mystischen Ziel und Erlebnis weit entfernt«. Aber Janentzky kann nichtsdestoweniger mehrfach Worte aus Hegels Logik und Phänomenologie in seinen Zusammenhang ziehen und auch in seiner Auffassung von Spinozas Akosmismus berührt er sich mit Hegel (vgl. Enzykl. § 50). Doch damit nicht genug. Janentzky rechnet das triadische Denken zu den Merkmalen typisch mystischer Besinnung! Sollte da Hegel nicht doch am Ende gleichfalls eine unter die große Fragestellung »Mystik und Rationalismus« fallende Erscheinung sein?

Ich möchte hier keine Behauptung aufstellen. Einmal deswegen nicht, weil theoretisches Denken und religiöses Ahnen zum Aufbau einer solch umfassenden »Welt« wie der Hegelschen keineswegs genügen. Künstlerisches Gestalten kommt hinzu und wohl noch anderes mehr. Und dann auch deswegen nicht, weil es neuerdings Mode zu werden anfängt, an überragenden Denkern, die zu verstehen dem Verstand beschwerlich fällt, den »blinden Fleck« herauszuspüren, um sich ihnen wenigstens hier in seliger Ignoranz verbunden fühlen zu dürfen. Ich möchte lediglich fragen:

Sollte nicht jenem »Momente« des dialektischen Prozesses, das Hegel panlogistisch als das anti-thetische bezeichnet hat, als heimliche Triebkraft das Transrationale zum Grunde liegen? Deutlicher: ist der »Umschlag« vom Sein ins Nichts vielleicht a priori mystisch bedingt? Gesetzt den Fall, dies verhielte sich so: darf dann Akosmismus noch als das absolute Ziel und Schicksal aller Mystik bezeichnet werden? Gibt es dann nicht darüber hinaus noch eine Weltanschauung, derzufolge Sein und Nichts, Samsāra und Nirwāna identisch sind? Oder mit anderen Worten: eine Mystik, die ihren rationalen Unterbau (und damit die »wirkliche« Welt) ganz und gar mit ihrem Geiste erfüllt hat, ohne ihn zu vernichten?

Oder ist das eben keine Mystik mehr, sondern — Philosophie?

Hermann Glockner.

Otto Hölder, Die mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik. Berlin 1924. 563 S.

An zusammenfassenden Darstellungen des philosophisch- mathematischen Problemgebiets ist in letzter Zeit kein Mangel gewesen; es braucht nur an die Werke Natorps, B. Russells, Conturats u. a. erinnert zu werden. Indessen rühren diese Darstellungen zumeist nicht von Mathematikern her, sondern von Logikern oder zum mindesten von Forschern, die außer im Grundlagengebiet keine schöpferische mathematische Arbeit geleistet haben. (Von H. Poincarés bekannten Büchern, die aber doch mehr Essaysammlungen als systematische Werke sind, wurde hier abgesehen.) Der Verf. des vorliegenden Werkes hat sich nun auf den verschiedensten mathematischen Forschungsgebieten rühmlichst betätigt, und man darf daher an sein Buch mit der Erwartung herantreten, daß die große Forschungs- und Lehrerfahrung des vielseitigen Mathematikers der Problembehandlung ihren kennzeichnenden Stempel aufdrücken werde. Und man wird hierin nicht enttäuscht. Was das Werk des Verf. dem an den Grundlagenfragen der Mathematik interessierten Philosophen von vornherein als sehr wertvoll erscheinen läßt, ist, daß er überall aus dem Vollen schöpft, daß man einer geradezu souveränen Beherrschung des vielgestaltigen Stoffes auf Schritt und Tritt bei der Lektüre begegnet. Dazu kommt, daß das Buch in didaktischer Hinsicht sehr geschickt abgefaßt ist. Es ist in drei Teile geteilt, deren erster »Beispiele aus einzelnen Gebieten« umfaßt, »gewissermaßen die Urkunden, aus denen die logische Beurteilung der mathematischen Methoden geschöpft werden muß«. Hier werden aus allen Hauptgebieten der Mathematik, aus der niederen und höheren Arithmetik, der Analysis, der analytischen und synthetischen Geometrie und der Mechanik in sehr zweckentsprechender Weise typische Beweise und andere Betrachtungen ausgewählt und in einer, auch dem gebildeten Laien bei aufmerksamer Durcharbeitung durchaus verständlichen Art als Material für die logische Analyse bereitgestellt. Es folgt dann der wichtigste Teil: »Logische Analyse der Methoden«, der im folgenden noch näher beleuchtet werden soll, und der dritte: «Der Zusammenhang mit der Erfahrung.« Durch diese Anordnung wird erreicht, daß der Leser im Besitze einer gewissen Erfahrung aus dem mathematischen Forschungsgebiet ist, ehe er an die logische Analyse herantritt; es werden auch stets im Einzelnen die Dinge gewissermaßen zuerst vordemonstriert, und dann wird an dieses demonstrierte Material angeknüpft. Doch hat diese, von unten nach oben gehende Methode mit Induktion im Sinne der modernen Logik nichts zu tun, ebensowenig mit einer empiristischen Auffassung der Mathematik; dagegen kann man wohl Beziehungen finden zu dem echten aristotelischen Verfahren der »Hinführung« (ἐπαγωγή). Unter den modernen philosophischen Methoden erscheint sofort die phänomenologische als verwandt, und man kann sagen, daß in dem Hölderschen Buch mehr wirkliche Phänomenologie enthalten ist (trotzdem der Terminus in dem ganzen Werke nicht vorzukommen scheint), als in mancher Schrift, die sich explizit als phänomenologisch bezeichnet, aber eben auch nur — bezeichnet. Der Verf. benutzt in bemerkenswert freier Weise Anregungen aus den verschiedensten philosophischen Schriften der letzten Zeit; Sigwart, Mach und Meinong findet man, außer Natorp, am öftesten zitiert; außer den »Logischen Untersuchungen« Husserls scheint ihm keine phänomenologische Schrift bekannt zu sein. Nirgends zeigt sich eine so weitgehende Beeinflussung von irgendeiner Seite, daß man den Eindruck eines Vorurteils zugunsten einer bestimmten philosophischen »Richtung« erhält; es ist in den Augen des Ref. gerade besonders wohltuend, daß man überall an die Sachen selbst herangeführt wird, daß auch die Kategorien und Begriffe, die zur Explikation der Tatbestände dienen, aus den Sachen selbst herausgearbeitet werden, daß man nie — wie so oft in der zeitgenössischen Philosophie — von vornherein zu wissen glaubt, zu welchem Ergebnis der Verf. infolge seiner Grundauffassung kommen muß — ohne Rücksicht auf die sachlichen Umstände.

Es ist im Rahmen dieser kurzen Anzeige völlig unmöglich, von dem reichen Inhalt des Werkes einen Begriff zu geben. Es sei daher lediglich hervorgehoben, was am schärfsten die Stellung des Verf. zu den jetzt aktuellen Problemen kennzeichnet. Dies kann man wohl am besten bezeichnen als die Hervorkehrung des spezifisch Mathematischen an der Mathematik, im Gegensatz zum Logischen einerseits und zum Empirischen andererseits. Dieses »spezifische Mathematische« ist gleichbedeutend mit den arithmetisch-kombinatorischen Grundoperationen und Grundgegenständlichkeiten. Der Verf. spricht hier von »synthetischen (konstruierten) Begriffen«. Es wird besondere Sorgfalt darauf verwandt, zu zeigen, daß sie nicht mit den Mitteln der üblichen formalen Logik abgeleitet werden können, auch nicht mittelst der Relationslogik. Denn jedem Versuch, die Arithmetik und Kombinatorik auf Logik zurückzuführen, läßt sich (wie im einzelnen gezeigt wird) entgegenhalten, daß in der versuchten Ableitung selbst schon versteckterweise arithmetisch-kombinatorische Operationen gebraucht werden. Dies wird beispielsweise an einem älteren Hilbertschen Versuch (aus dem Jahr 1900), die Arithmetik rein axiomatisch aufzubauen, nachgewiesen. (Es muß dazu bemerkt werden, daß heute Hilbert selbst auf einem anderen, den Bedenken Hölders, zum mindesten in dieser Form, nicht mehr unterliegenden Standpunkt steht.) Der Zahlbegriff, und zwar der volle Begriff der Anzahl (der von dem in gewissem Sinne einfacheren Begriff des »Stellenzeichnens«, der reinen Ordinalzahl, zu unterscheiden ist), wird als mathematischer Grundbegriff erkannt; dazu kommt der Begriff der endlosen Folge. Es wird gezeigt, daß alle Versuche, den Begriff der Reihenfolge auch bei einer unendlichen Menge von Elementen auf logische Relationsgesetze zurückzuführen, fehlschlagen müssen. (Leider sind dabei die nur in Begriffsschrift vorliegenden Versuche Freges und Russells nicht im einzelnen widerlegt worden.) Und positiv wird dargelegt, daß die auch nach H. Poincaré wichtigste mathematische Schlußweise von n auf n + 1 nebst verwandten Verfahrungsweisen den Kern eines spezifisch arithmetischen, auf nichts anderes zurückführbaren Verfahrens bildet, dem eine spezifische, mit anderen unvergleichliche »arithmetische Allgemeinheit« zukommt. Dieses Verfahren beruht auf der »Beobachtung« (was aber nicht im empirischen Sinn zu nehmen ist) der eigenen »rein synthetischen« Denktätigkeit in der Arithmetik und der »hypothetisch-synthetischen« Tätigkeit in der Geometrie und Mechanik. »In der Arithmetik werden nur die aus unserer eigenen Tätigkeit entspringenden Gebilde samt ihren Relationen für sich beobachtet und untersucht, während in der Geometrie jedes eingeführte Element und jeder getane Schritt noch außerdem als anschaulicher Teil einer Figur oder als Operation in einer Konstruktion eine Bedeutung hat« (S. 295). Die arithmetische Allgemeinheit spielt nun insofern eine Rolle, als »die Tätigkeiten, durch welche in jedem Einzelfall der Begriff zu definieren ist, unmöglich für alle Fälle, die doch in unendlicher Anzahl vorhanden sind, wirklich vollzogen werden können. Hier kann aber doch die betreffende Tätigkeit allgemein so b e z e i c h n e t werden, daß sie dadurch für jeden vorkommenden Fall klar und bestimmt wird. Die Tätigkeiten ordnen sich, wie wir sagen, einer Regel unter« (aus S. 298). Diese Bezeichnung gewinnt eine besondere Bedeutung, wenn sie nicht eine eindeutige, sondern eine »vereinfachte« Abbildung der wirklich zu vollziehenden Tätigkeiten darstellt. Indessen bedeutet das keineswegs einen Ersatz von mathematischen Gegenständlichkeiten durch bloße Zeichen, sondern einen »Ueberbau von (unter Umständen selbst schon synthetischen) Begriffen durch synthetische Begriffe«. Die Allgemeinheit einer Formel von der Art des binomischen Satzes (der Entwicklung der Potenz $(a + b)^n$ in eine Summe von Produkten der Form $a^i b^k$) liegt nicht nur in der Zahl n, sondern »alle die vorkommenden Relationen von Gliedern, Faktoren usw., die in den Begriffen des Vorhergehenden und Nachfolgenden usw. gegeben sind, die überhaupt durch die Tätigkeit des Setzens und Aufhebens, des Zusammenfassens und Trennens, des Ordnens und Zuordnens bewirkt werden«, sind im arithmetischen Sinn allgemein zu nehmen. Das ganze Rechnungsverfahren »stellt einen synthetischen Allgemeinbegriff vor, der mit einer Anzahl ähnlicher Begriffe, nämlich mit den in dem Verfahren enthaltenen Teiltätigkeiten, durch Relationen verbunden ist«. In dieser Weise ü b e r b a u e n sich neue synthetische Begriffe über (in diesem Falle) bereits selbst synthetische, und dieser Ueberbau ist das eigentlich entscheidende Verfahren, auf das sich die Allgemeinheit der Buchstabenrechnung in allen höheren Fällen, der Schluß von n auf $n + 1$ u. ä. gründen. Es ist begreiflich, daß auf Grund der dargelegten Auffassung das Problem der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik rein sachlich gelöst wird. Die Arithmetik des Endlichen und Endlosen (d. h. des Unendlichen von der Art der unbegrenzten Zahlenreihe) läßt sich vermöge der erläuterten Synthesen von innen heraus rein sachlich begründen. »Die Widerspruchslosigkeit der Geometrie wird bewiesen auf Grund der Widerspruchslosigkeit der Arithmetik. Die Widerspruchslosigkeit der Arithmetik muß aber durch den folgerichtigen Aufbau ihrer Begriffe dargetan werden. Glaubt man, die Arithmetik auch auf Axiome gründen zu müssen, so ergibt sich die neue Aufgabe, nunmehr auch die Widerspruchslosigkeit der Axiome der Arithmetik zu beweisen. Dieser Beweis könnte aber, wenn kein Beweis ohne Axiome möglich wäre, nur auf Grund wiederum neuer Axiome geführt werden usw.

Man käme also schließlich auf einen recursus in infinitum, der zu keiner vollständigen Begründung führen könnte« (S. 325). Es wird also die Notwendigkeit und Möglichkeit einer »absoluten« Begründung der Arithmetik behauptet. Indessen die Arithmetik umfaßt nicht das Gesamtgebiet der reinen Mathematik. Es fragt sich, ob die Analysis, die mathematische Theorie des Kontinuums, ebenfalls in der angedeuteten Weise synthetisch begründet werden kann. Das ist in der Tat die Frage, die augenblicklich im Brennpunkt des Interesses steht; sie hat den gegenwärtig anhängigen Streit um die Grundlegung der Mathematik hervorgerufen. Der Verf. hat schon im Jahre 1892, in einer Rezension in den »Göttinger Gelehrten Anzeigen« darauf eine verneinende Antwort gegeben, die in dem vorliegenden Werke ausführlich begründet wird. Man kann danach, sei es mittels der Dedekindschen »Schnitte«, sei es anderswie, die irrationalen Zahlen einwandfrei definieren und die Rechnung mit ihnen begründen. Aber man kann nicht »die Gesamtheit aller Irrationalzahlen rein arithmetisch erhalten . . . Bedenkt man, daß die Definition jedes Schnittes ein besonderes Gesetz erfordert, so bedeutet der Begriff der Gesamtheit aller Schnitte, daß wir glauben, uns die Gesamtheit aller der Gesetze, die noch einer gewissen Forderung entsprechen, denken zu können. Eine solche gänzlich unbestimmte Gesamtheit dürfte aber einen unzulässigen Begriff vorstellen; demgemäß bin ich der Ansicht, daß das Kontinuum nicht arithmetisch erzeugt werden kann« (S. 194). »Rein logisch kann man also nicht beweisen, daß das Kontinuum mit seinen Axiomen niemals auf einen Widerspruch führen kann« (S. 351). Bis hierher stimmt der Verf. in seiner Grundauffassung mit den sog. »Intuitionisten« Brouwer und Weyl im Wesentlichen überein. Aber er nimmt sofort darauf eine überraschende Wendung. Er fährt nämlich wörtlich fort: »Trotzdem werden die wenigsten bereit sein, auf die Teilgebiete der Mathematik, die vom Kontinuum Gebrauch machen, zu verzichten. Man kann ohnehin für die Einführung dieses Begriffs nicht nur Erfahrungstatsachen (? d. Ref.), sondern vielleicht auch innere Gründe geltend machen, und wenn man überhaupt eine Form als »reine Anschauung a priori« im Sinne von Kant oder als eine Art von »Platonischer Idee« gelten lassen will, so dürfte sich dazu die Idee des einfachen Kontinuums eignen« (S. 357—358). An dieser Stelle müssen wir, als der einzigen des Buches, prinzipielle Bedenken gegenüber der Auffassung des Verf. hegen. Es erscheint uns gänzlich unmöglich, das Kontinuum zuerst als einen unvollziehbaren Begriff hinzustellen und dann doch nachträglich als »intuitive Urform«, als »Platonische Idee«, wieder einzuführen — letzten Endes nur aus dem pragmatischen Grunde, um die klassische Analysis in ihrem hergebrachten Umfang retten zu können. Dies widerspricht gänzlich der sonstigen vorsichtig-kritischen Haltung des Verf. und erscheint als ein nicht zu begründender Gewaltakt. Trotz der Versicherung des Verf., daß für die Annahme des Kontinuums im Gegensatz zu anderen »ursprünglichen unendlichen Gesamtheiten«, wie z. B. der sog. »2. Zahlenklasse« Cantors, »innere und äußere Gründe sprechen«, kann sich der Ref. von einem derartig durchgreifenden »inneren« Unterschied nicht überzeugen [1]). So sehr man die sonstigen feinsinnigen Analysen der synthetischen Begriffsbildung, die der Arithmetik zugrunde liegt, besonders von einem phänomenologischen Gesichtspunkt aus begrüßen muß, so entschieden muß man sich gegen einen derartigen intuitiven Ansatz en bloc wenden, dessen phänomenologische Analyse grundsätzlich unmöglich ist. Es ist ein großes Verdienst des Verf., schon seit 1892 die Trennungslinie gesehen zu haben, die die Arithmetik von der üblichen Theorie des Kontinuums (nach Dedekind u. a.) trennt. Aber diese Leistung wird um ihre schönste Frucht gebracht, wenn man daraus nicht rücksichtslos die notwendigen Konsequenzen zieht — dahingehend, daß derjenige Teil der Analysis, der sich mittels der Begriffe der Arithmetik des Endlichen und Endlosen begründen läßt, auch rein arithmetisch zu begründen ist (welche Begründung gegenwärtig von Weyl und Brouwer in Angriff genommen wird), während für den übrigen Teil der reinen Mathematik andere Methoden gewählt werden müssen (zu denen vielleicht die neuesten Arbeiten Hilberts und seiner Schüler den Weg weisen). Es soll nicht völlig von der Hand gewiesen werden, daß für die letztere Aufgabe vielleicht auch die Einführung neuer intuitiver »Urformen« über die rein arithmetische der endlosen Folge hinaus in Frage kommen könnte. Aber man darf diese Formen nicht eher einführen, als bis die Reichweite einer rein arithmetischen Begründung genau bestimmt ist. Man kommt damit gewissermaßen zu einer axiomatischen Problematik höherer Ordnung, vergleichbar mit gewissen

1) Der Verf. sagt (S. 556): »Die nicht gesetzmäßigen unendlichen Gesamtheiten stellen mathematisch nicht verwendbare, nicht klare und deutliche Begriffe dar.« Und fügt dann die Anmerkung hinzu: »Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß einige zunächst als unbestimmt und deshalb unzulässig erscheinenden Gesamtheiten nachher doch wieder synthetisch hergeleitet werden können, wenn man, wie ich es empfehlen möchte, sich entschließt, das Kontinuum als eine apriorische Form anzuerkennen und es bei mathematischen Gedankenkonstruktionen zu benützen. Dadurch gewinnt man z. B. die Gesamtheit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, damit dann auch diejenigen dieser Zahlen, die nicht rational sind. Indem man dann die zuletzt genannten Zahlen in Kettenbrüche entwickelt denkt, erhält man in den Folgen der Teilnenner dieser Kettenbrüche die Gesamtheit der »nach irgendeinem Gesetz gebildeten«, nicht abbrechenden Folgen von absoluten ganzen Zahlen.« Hier scheinen sich Text und Anmerkung geradezu zu widersprechen. Sollte nicht zum mindesten die vom Verf. gezeigte Tatsache, daß das als eine Menge von Punkten aufgefaßte Kontinuum auf eine nicht gesetzmäßige unendliche Gesamtheit führt, als »innerer« Gegengrund gegen die Annahme des Kontinuums geltend gemacht werden können? Für das Kontinuum spricht eigentlich nur, daß es auf eine fruchtbare, widerspruchsfreie Theorie führt; tut das aber auch nicht der größte Teil der Mengenlehre, die man doch sehr wohl von Paradoxien zu reinigen neuerdings verstanden hat? Weshalb also die Bevorzugung gerade des Kontinuums?

geometrischen Fragestellungen, wie etwa der nach der Tragweite des archimedischen Axioms, des Pascalschen und Desarguesschen Satzes u. dgl. Nur ist das neue Problem von eminenter philosophischer Wichtigkeit, denn man kann es so wenden: wieviel von der mathematischen höheren Analysis kann auf Grund der »rein synthetischen« Begriffe allein bewiesen werden? Wie weit kann man mit dieser rein rationalen, elementaren Begriffssynthese in das Phänomen des Kontinuums eindringen?

Und hier scheinen sich durch die Brouwersche Theorie des Kontinuums ganz neue Möglichkeiten zu eröffnen, die allerdings im Grunde auf sehr alte Anschauungen zurückgehen, die man zum mindesten bis auf Aristoteles, vielleicht sogar bis auf Anaxagoras zurückverfolgen kann.

Dem 3. Teil des Hölderschen Werkes können leider bei dem uns zur Verfügung stehenden beschränkten Raum nur wenige Worte gewidmet werden. Die geometrischen Erörterungen bringen auch nichts von ähnlich grundsätzlicher Wichtigkeit wie die arithmetischen. Es sei daher nur noch über den physikalischen Teil etwas bemerkt. Seine Tendenz ist auffallend zurückhaltend, gewissermaßen konservativ, besonders gegenüber den neuesten Entwicklungen der Physik, seit der Relativitätstheorie. Es wird mit Nachdruck auf die weitgehenden Hypothesenbildungen dieser neuen Forschungsrichtung hingewiesen und der nur indirekte und vielfach lose Zusammenhang mit der Erfahrung im Vergleich mit dem klassischen Theorientypus betont. Das mag zunächst befremden (der Verf. deutet selbst dergleichen im Vorwort an), aber auch dies ist im Grunde nur eine Konsequenz der zugrunde liegenden »sachlichen«, dem axiomatischen Formalismus abgewandten Grundhaltung. Es muß unseres Erachtens anerkannt werden, daß in die modernen physikalischen Theorien ein aprioristisches Moment in noch grundsätzlich ungeklärter Weise hineinspielt, indem bestimmte, besonders durchsichtig und harmonisch erscheinende oder sonstwie ausgezeichnete Theorien vor anderen an sich ebensogut mit der Erfahrung verträglichen Anschauungen bevorzugt werden. Dieses »materiale Apriori«, das über die bloß logische Konsequenz hinausgeht, bedarf dringend einer prinzipiellen, letzten Endes philosophischen Durchleuchtung. Die Theorien des modernen Typus scheinen gewissermaßen von einem bestimmten »Ethos« getragen zu sein und sind vielleicht mit der konkreten geistesgeschichtlichen Situation ihrer Entstehungszeit in höherem Maße verbunden, als gewisse klassische Entwicklungen, die, nur unwesentlich verändert und in neuer Weise eingeordnet, den eisernen Bestand jeglicher Physik zu bilden scheinen (eben wegen ihrer geringeren Belastung mit Hypothesen). Hier liegen noch wichtige, kaum in Angriff genommene Forschungsgebiete [1]).

Dies mag genügen, um Einiges des Wichtigsten aus dem reichen Inhalt

1) Derartiges hat neuerdings auch H. Weyl (Math. Zeitschrift Bd. 20 S. 149 f.) angedeutet.